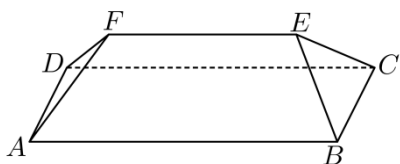


8. 若 $xy \neq 0$, 则“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

9. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一, 蕴含着丰富的数学元素. 安装灯带可以勾勒出建筑轮廓, 展现造型之美. 如图, 某坡屋顶可视为一个五面体, 其中两个面是全等的等腰梯形, 两个面是全等的等腰三角形. 若 $AB = 25\text{m}, BC = AD = 10\text{m}$, 且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$, 则该五面体的所有棱长之和为 ()



- A. 102m
B. 112m
C. 117m
D. 125m

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6(n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 ()

- A. 当 $a_1 = 3$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列, 且存在常数 $M \leq 0$, 使得 $a_n > M$ 恒成立
B. 当 $a_1 = 5$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 且存在常数 $M \leq 6$, 使得 $a_n < M$ 恒成立
C. 当 $a_1 = 7$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列, 且存在常数 $M > 6$, 使得 $a_n > M$ 恒成立
D. 当 $a_1 = 9$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 且存在常数 $M > 0$, 使得 $a_n < M$ 恒成立

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知函数 $f(x) = 4^x + \log_2 x$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.

12. 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$, 离心率为 $\sqrt{2}$, 则 C 的方程为 _____.

13. 已知命题 p : 若 α, β 为第一象限角, 且 $\alpha > \beta$, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$. 能说明 p 为假命题的一组 α, β 的值为 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____.

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史, 战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”. 已知 9 枚环权的质量 (单位: 铢) 从小到大构成项数为 9 的数列 $\{a_n\}$, 该数列的前 3 项成等差数

列，后 7 项成等比数列，且 $a_1 = 1, a_5 = 12, a_9 = 192$ ，则 $a_7 =$ _____；数列 $\{a_n\}$ 所有项的和为 _____。

15. 设 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -a, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ -\sqrt{x} - 1, & x > a. \end{cases}$ 给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(a-1, +\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a \geq 1$ 时， $f(x)$ 存在最大值；

③ 设 $M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$ ，则 $|MN| > 1$ ；

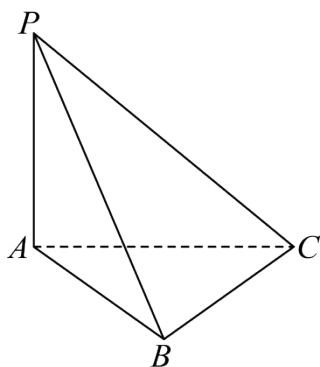
④ 设 $P(x_3, f(x_3)) (x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4)) (x_4 \geq -a)$ 。若 $|PQ|$ 存在最小值，则 a 的取值范围是

$$\left(0, \frac{1}{2}\right].$$

其中所有正确结论的序号是_____。

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $PA = AB = BC = 1, PC = \sqrt{3}$ 。



(1) 求证： $BC \perp$ 平面 PAB ；

(2) 求二面角 $A-PC-B$ 的大小。

17. 设函数 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi \left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$ 。

(1) 若 $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 φ 的值。

(2) 已知 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增， $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$ ，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中

选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω, φ 的值。

条件①: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$;

条件②: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$;

条件③: $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第(2)问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. 为研究某种农产品价格变化的规律, 收集得到了该农产品连续 40 天的价格变化数据, 如下表所示. 在描述价格变化时, 用“+”表示“上涨”, 即当天价格比前一天价格高; 用“-”表示“下跌”, 即当天价格比前一天价格低; 用“0”表示“不变”, 即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化																			
第 1 天到第 20 天	-	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	-	-	+	-	+	0	0	+
第 21 天到第 40 天	0	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	+	-	-	-	+	0	-	+

用频率估计概率.

- 试估计该农产品价格“上涨”的概率;
- 假设该农产品每天的价格变化是相互独立的. 在未来的日子里任取 4 天, 试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率;
- 假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格变化的影响. 判断第 41 天该农产品价格“上涨”“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大. (结论不要求证明)

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, A, C 分别是 E 的上、下顶点, B, D 分别是 E

的左、右顶点, $|AC| = 4$.

- 求 E 的方程;
- 设 P 为第一象限内 E 上的动点, 直线 PD 与直线 BC 交于点 M , 直线 PA 与直线 $y = -2$ 交于点 N . 求证: $MN \parallel CD$.

20. 设函数 $f(x) = x - x^3 e^{ax+b}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$.

- 求 a, b 的值;

(2) 设函数 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;

(3) 求 $f(x)$ 的极值点个数.

21. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的项数均为 $m (m > 2)$, 且 $a_n, b_n \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 并规定 $A_0 = B_0 = 0$. 对于 $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, 定义 $r_k = \max\{i \mid B_i \leq A_k, i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}\}$, 其中, $\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

(1) 若 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3, b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 3$, 求 r_0, r_1, r_2, r_3 的值;

(2) 若 $a_1 \geq b_1$, 且 $2r_j \leq r_{j+1} + r_{j-1}, j = 1, 2, \dots, m-1$, 求 r_n ;

(3) 证明: 存在 $p, q, s, t \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, 满足 $p > q, s > t$, 使得 $A_p + B_t = A_q + B_s$.