

2025 年全国统一高考数学试卷

(新高考II卷)

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在试卷上无效.
- 3.考试结束后,本试卷和答题卡一并交回.

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 样本数据 2, 8, 14, 16, 20 的平均数为 ()
A. 8 B. 9 C. 12 D. 18
2. 已知 $z = 1 + i$, 则 $\frac{1}{z-1} =$ ()
A. $-i$ B. i C. -1 D. 1
3. 已知集合 $A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}$, $B = \{x \mid x^3 = x\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1, 2, 8\}$
C. $\{2, 8\}$ D. $\{0, 1\}$
4. 不等式 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 的解集是 ()
A. $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x \mid x \leq -2\}$
C. $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$ D. $\{x \mid x > 1\}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$, 则 $A =$ ()
A. 45° B. 60° C. 120° D. 135°
6. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 A 在 C 上, 过 A 作 C 的准线的垂线, 垂足为 B , 若直线 BF 的方程为 $y = -2x + 2$, 则 $|AF| =$ ()
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_3 = 6, S_5 = -5$, 则 $S_6 =$ ()

- A. -20 B. -15 C. -10 D. -5

8. 已知 $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， q 为 $\{a_n\}$ 的公比， $q > 0$, 若 $S_3 = 7, a_3 = 1$, 则 (\quad)

- A. $q = \frac{1}{2}$ B. $a_5 = \frac{1}{9}$
 C. $S_5 = 8$ D. $a_n + S_n = 8$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则 (\quad)

- A. $f(0) = 0$ B. 当 $x < 0$ 时， $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$
 C. $f(x) \geq 2$ 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$ D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N 两点，且 $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$, 则 (\quad)

- A. $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$ B. $|MA_1| = 2|MA_2|$
 C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$ D. 当 $a = \sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知平面向量 $\vec{a} = (x, 1), \vec{b} = (x-1, 2x)$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则 $|\vec{a}| = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 若 $x = 2$ 是函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 一个底面半径为 4cm，高为 9cm 的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi) (0 \leq \varphi < \pi), f(0) = \frac{1}{2}$.

(1) 求 φ ;

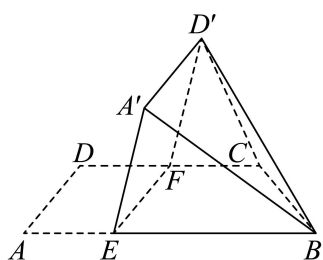
(2) 设函数 $g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 求 $|AB|$.

17. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, \angle DAB = 90^\circ$, F 为 CD 的中点, 点 E 在 AB 上, $EF \parallel AD$, $AB = 3AD, CD = 2AD$, 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$, 使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60° .



(1) 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$;

(2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值.

18. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, 其中 $0 < k < \frac{1}{3}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点;

(2) 设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点.

(i) 设函数 $g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$. 证明: $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减;

(ii) 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明你的结论.

19. 甲、乙两人进行乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分, 负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 $P\left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$, 乙胜的概率为 q , $p+q=1$, 且各球的胜负相互独立, 对正整数 $k \geq 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3, p_4 (用 p 表示).

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$, 求 p .

(3) 证明: 对任意正整数 m , $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

1. C

【分析】由平均数的计算公式即可求解.

【详解】样本数据 2,8,14,16,20 的平均数为 $\frac{2+8+14+16+20}{5} = \frac{60}{5} = 12$.

故选: C.

2. A

【分析】由复数除法即可求解.

【详解】因为 $z=1+i$, 所以 $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+i-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

故选: A.

3. D

【分析】求出集合 B 后结合交集的定义可求 $A \cap B$.

【详解】 $B = \{x | x^3 = x\} = \{0, -1, 1\}$, 故 $A \cap B = \{0, 1\}$,

故选: D.

4. C

【分析】移项后转化为求一元二次不等式的解即可.

【详解】 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 即为 $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$ 即 $\begin{cases} (x+2)(x-1) \leq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 故 $-2 \leq x < 1$,

故解集为 $[-2, 1)$,

故选: C.

5. A

【分析】由余弦定理 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$ 直接计算求解即可.

【详解】由题意得 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(\sqrt{6})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{6} \times (1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $A = 45^\circ$.

故选: A

6. C

【分析】先由直线 l_{BF} 求出焦点 F 和 P 即抛物线 C 的方程, 进而依次得抛物线的准线方程和

点 B , 从而可依次求出 y_A 和 x_A , 再由焦半径公式即可得解.

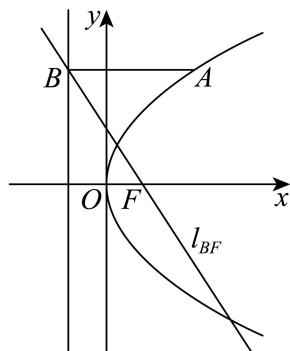
【详解】对 $l_{BF}: y = -2x + 2$, 令 $y = 0$, 则 $x = 1$,

所以 $F(1, 0)$, $p = 2$ 即抛物线 $C: y^2 = 4x$, 故抛物线的准线方程为 $x = -1$,

故 $B(-1, 4)$, 则 $y_A = 4$, 代入抛物线 $C: y^2 = 4x$ 得 $x_A = 4$.

所以 $|AF| = |AB| = x_A + \frac{p}{2} = 4 + 1 = 5$.

故选: C



7. B

【分析】由等差数列前 n 项和公式结合题意列出关于首项 a_1 和公差 d 的方程求出首项 a_1 和公差 d , 再由等差数列前 n 项和公式即可计算求解.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则由题可得
$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 6 \\ 5a_1 + 10d = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

所以 $S_6 = 6a_1 + 15d = 6 \times 5 + 15 \times (-3) = -15$.

故选: B.

8. D

【分析】利用二倍角余弦公式得 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 最后再根据两角差的正弦公式即可得到答案.

【详解】 $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{5}$,

因为 $0 < \alpha < \pi$, 则 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$,

则 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

故选: D.

9. AD

【分析】对 A，根据等比数列通项公式和前 n 项和公式得到方程组，解出 a_1, q ，再利用其通项公式和前 n 项和公式一一计算分析即可。

【详解】对 A，由题意得 $\begin{cases} a_1 q^2 = 1 \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 \end{cases}$ ，结合 $q > 0$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 9 \\ q = -\frac{1}{3} \end{cases}$ （舍去），

故 A 正确；

对 B，则 $a_5 = a_1 q^4 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ ，故 B 错误；

对 C， $S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{4 \times \left(1 - \frac{1}{32}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{4}$ ，故 C 错误；

对 D， $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{3-n}$ ， $S_n = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 8 - 2^{-n+3}$ ，

则 $a_n + S_n = 2^{3-n} + 8 - 2^{3-n} = 8$ ，故 D 正确；

故选：AD.

10. ABD

【分析】对 A，根据奇函数特点即可判断；对 B，利用 $f(x) = -f(-x)$ 代入求解即可；对 C，举反例 $f(-1) > 2$ 即可；对 D，直接求导，根据极大值点判定方法即可判断。

【详解】对 A，因为 $f(x)$ 定义在 \mathbb{R} 上奇函数，则 $f(0) = 0$ ，故 A 正确；

对 B，当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，则 $f(x) = -f(-x) = -\left[\left((-x)^2 - 3\right)e^{-x} + 2\right] = -\left(x^2 - 3\right)e^{-x} - 2$ ，故 B 正确；

对 C， $f(-1) = -(1-3)e^{-2} = 2(e^{-1}) > 2$ ，故 C 错误；

对 D，当 $x < 0$ 时， $f(x) = (3-x^2)e^{-x} - 2$ ，则 $f'(x) = -(3-x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = -1$ 或 3 （舍去），

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时， $f'(x) > 0$ ，此时 $f(x)$ 单调递增，

当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，此时 $f(x)$ 单调递减，

则 $x = -1$ 是 $f(x)$ 极大值点，故 D 正确；

故选：ABD.

11. ACD

【分析】由平行四边形的性质判断 A；由 $F_1M \perp F_2M$ 且 $|MO|=c$ 结合 M 在渐近线上可求 M 的坐标，从而可判断 B 的正误，或者利用三角函数定义和余弦定理也可判断；由中线向量结合 B 的结果可得 $c^2 = 13a^2$ ，计算后可判断 C 的正误，或者利用 $\frac{|MA_2|}{|A_1A_2|} = \frac{b}{2a} = \sqrt{3}$ 并结合离心率变形公式即可判断；结合 BC 的结果求出面积后可判断 D 的正误.

【详解】不妨设渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$ ， M 在第一象限， N 在第三象限，

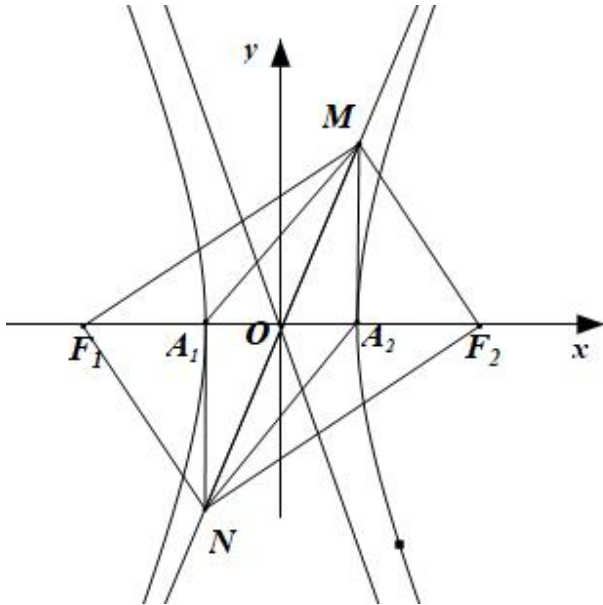
对于 A，由双曲线的对称性可得 A_1MA_2N 为平行四边形，故 $\angle A_1MA_2 = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ，

故 A 正确；

对于 B，方法一：因为 M 在以 F_1F_2 为直径的圆上，故 $F_1M \perp F_2M$ 且 $|MO|=c$ ，

$$\text{设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = c^2 \\ y_0 = \frac{b}{a}x_0 \end{cases}, \text{ 故 } \begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}, \text{ 故 } MA_2 \perp A_1A_2,$$

由 A 得 $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$ ，故 $|MA_2| = |MA_1| \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 即 $|MA_1| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|MA_2|$ ，故 B 错误；

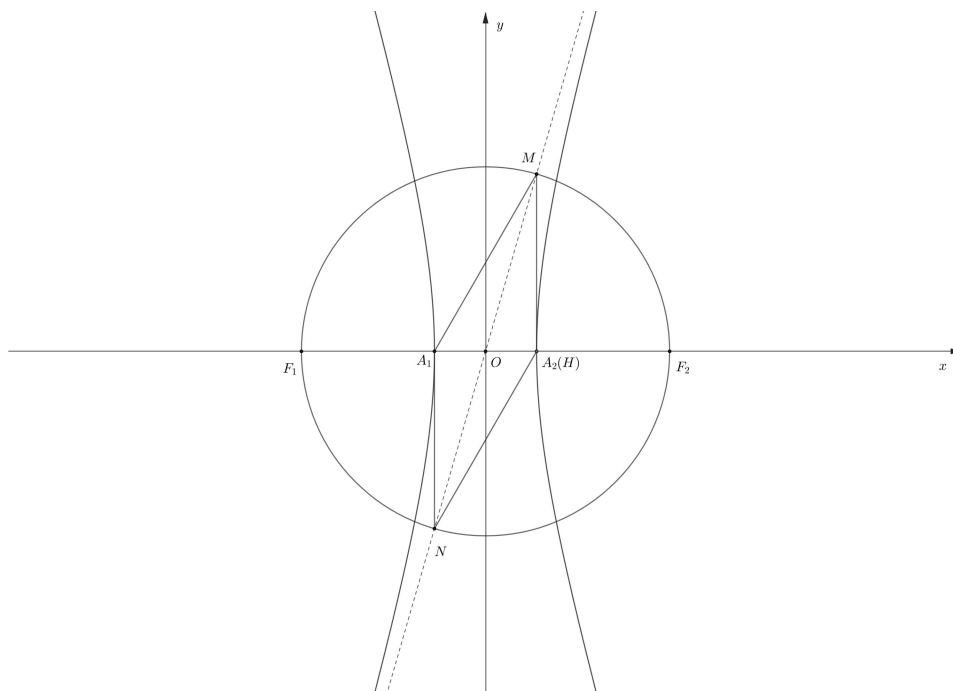


方法二：因为 $\tan \angle MOA_2 = \frac{b}{a}$ ，因为双曲线中， $c^2 = a^2 + b^2$ ，

则 $\cos \angle MOA_2 = \frac{a}{c}$ ，又因为以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M 、 N ，则 $OM = c$ ，

则若过点 M 往 x 轴作垂线，垂足为 H ，则 $|OH| = c \cdot \frac{a}{c} = a = |OA_2|$ ，则点 H 与 $A_2(H)$ 重合，则

$MA_2 \perp x$ 轴，则 $|MA_2| = \sqrt{c^2 - a^2} = b$ ，



方法三：在 $\triangle OMA_2$ 利用余弦定理知， $|MA_2|^2 = |OM|^2 + |OA_2|^2 - 2|OM||OA_2|\cos\angle MOA_2$ ，

即 $|MA_2|^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \frac{a}{c} = b^2$ ，则 $|MA_2| = b$ ，

则 $\triangle A_1A_2M$ 为直角三角形，且 $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$ ，则 $2|MA_2| = \sqrt{3}|MA_1|$ ，故 B 错误；

对于 C，方法一：因为 $\overline{MO} = \frac{1}{2}(\overline{MA_1} + \overline{MA_2})$ ，故 $4\overline{MO}^2 = \overline{MA_1}^2 + 2\overline{MA_1} \cdot \overline{MA_2} + \overline{MA_2}^2$ ，

由 B 可知 $|MA_2| = b, |MA_1| = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$ ，

故 $4c^2 = b^2 + \frac{4}{3}b^2 + 2 \times b \times \frac{2\sqrt{3}}{3}b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{3}b^2 = \frac{13}{3}(c^2 - a^2)$ 即 $c^2 = 13a^2$ ，

故离心率 $e = \sqrt{13}$ ，故 C 正确；

方法二：因为 $\frac{|MA_2|}{|A_1A_2|} = \frac{b}{2a} = \sqrt{3}$ ，则 $\frac{b}{a} = 2\sqrt{3}$ ，则 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$ ，故 C 正

确；

对于 D，当 $a = \sqrt{2}$ 时，由 C 可知 $e = \sqrt{13}$ ，故 $c = \sqrt{26}$ ，

故 $b = 2\sqrt{6}$ ，故四边形 NA_1MA_2 为 $2S_{\triangle MA_1A_2} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{3}$ ，

故 D 正确，

故选：ACD.

12. $\sqrt{2}$

【分析】根据向量坐标化运算得 $\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$ ，再利用向量垂直的坐标表示得到方程，解出即可.

【详解】 $\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$ ，因为 $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$ ，则 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ ，

则 $x+1-2x=0$ ，解得 $x=1$.

则 $\vec{a}=(1,1)$ ，则 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

故答案为： $\sqrt{2}$.

13. -4

【分析】由题意得 $f'(2)=0$ 即可求解 a ，再代入即可求解.

【详解】由题意有 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ ，

所以 $f'(x)=(x-a)(x-1)+(x-1)(x-2)+(x-a)(x-2)$ ，

因为 2 是函数 $f(x)$ 极值点，所以 $f'(2)=2-a=0$ ，得 $a=2$ ，

当 $a=2$ 时， $f'(x)=2(x-2)(x-1)+(x-2)^2=(x-2)(3x-4)$ ，

当 $x\in(-\infty,\frac{4}{3})$ ， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增，当 $x\in(\frac{4}{3},2)$ ， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(2,+\infty)$ ， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增，

所以 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极小值点，符合题意；

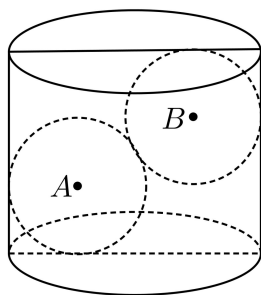
所以 $f(0)=-1\times(-2)\times(-a)=-2a=-4$.

故答案为：-4.

14. 2.5

【分析】根据圆柱与球的性质以及球的体积公式可求出球的半径；

【详解】



圆柱的底面半径为4cm，设铁球的半径为 r ，且 $r < 4$ ，

由圆柱与球的性质知 $AB^2 = (2r)^2 = (8 - 2r)^2 + (9 - 2r)^2$ ，

即 $4r^2 - 68r + 145 = (2r - 5)(2r - 29) = 0$ ， $\because r < 4$ ，

$\therefore r = 2.5$.

故答案为：2.5.

15. (1) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(2) 答案见解析

【分析】(1) 直接由题意得 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, ($0 \leq \varphi < \pi$)，结合余弦函数的单调性即可得解；

(2) 由三角恒等变换得 $g(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，由此可得值域，进一步由整体代入法可得函数 $g(x)$ 的单调区间.

【详解】(1) 由题意 $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$, ($0 \leq \varphi < \pi$)，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ；

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

所以 $g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos 2x = \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ，

令 $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

令 $\pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ ，

函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

16. (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) $\sqrt{5}$

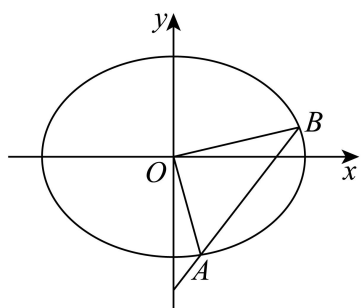
【分析】(1) 根据长轴长和离心率求出基本量后可得椭圆方程；

(2) 设出直线方程并联立椭圆方程后结合韦达定理用参数 t 表示面积后可求 t 的值，从而可求弦长.

【详解】(1) 因为长轴长为 4，故 $a=2$ ，而离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 $c=\sqrt{2}$ ，

故 $b=\sqrt{2}$ ，故椭圆方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2)



由题设直线 AB 的斜率不为 0，故设直线 $l: x = t(y+2)$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

由 $\begin{cases} x = t(y+2) \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$ 可得 $(t^2 + 2)y^2 + 4t^2y + 4t^2 - 4 = 0$ ，

故 $\Delta = 16t^4 - 4(t^2 + 2)(4t^2 - 4) = 4(8 - 4t^2) > 0$ 即 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ ，

且 $y_1 + y_2 = -\frac{4t^2}{t^2 + 2}$ ， $y_1 y_2 = \frac{4t^2 - 4}{t^2 + 2}$ ，

故 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times |2t| \times |y_1 - y_2| = |t| \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{|t| \sqrt{32 - 16t^2}}{t^2 + 2} = \sqrt{2}$ ，

解得 $t = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

故 $|AB| = \sqrt{1+t^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{2}{3}} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\frac{5}{3}} \times \frac{\sqrt{32 - 16 \times \frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} + 2} = \sqrt{5}$ 。

17. (1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{42}}{7}$

【分析】(1) 先应用线面平行判定定理得出 $A'E \parallel$ 平面 $CD'F$ 及 $EB \parallel$ 平面 $CD'F$ ，

再应用面面平行判定定理得出平面 $A'EB \parallel$ 平面 $CD'F$ ，进而得出线面平行；

(2) 建立空间直角坐标系，利用已知条件将点 B, C, D', E, F 的坐标表示出来，然后将平面 BCD' 及平面 $EFD'A'$ 的法向量求出来，利用两个法向量的数量积公式可将两平面的夹角余弦值求出来，进而可求得其正弦值。

【详解】(1) 设 $AD = 1$ ，所以 $AB = 3, CD = 2$ ，因为 F 为 CD 中点，所以 $DF = 1$ ，因为 $EF \parallel AD$ ， $AB \parallel CD$ ，所以 $AEFD$ 是平行四边形，所以 $AE \parallel DF$ ，所以 $A'E \parallel D'F$ ，

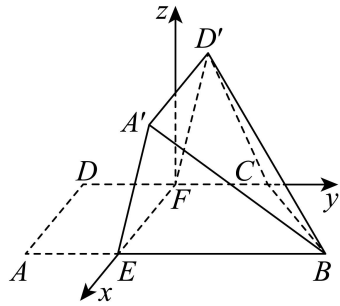
因为 $D'F \subset$ 平面 $CD'F, A'E \not\subset$ 平面 $CD'F$ ，所以 $A'E \parallel$ 平面 $CD'F$ ，

因为 $FC \parallel EB, FC \subset$ 平面 $CD'F, EB \not\subset$ 平面 $CD'F$ ，所以 $EB \parallel$ 平面 $CD'F$ ，

又 $EB \cap A'E = E$ ， $EB, A'E \subset$ 平面 $A'EB$ ，所以平面 $A'EB \parallel$ 平面 $CD'F$ ，

又 $A'B \subset$ 平面 $A'EB$ ，所以 $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$ 。

(2)



因为 $\angle DAB = 90^\circ$ ，所以 $AD \perp AB$ ，又因为 $AB \parallel FC, EF \parallel AD$ ，所以 $EF \perp FC$ ，

以 F 为原点， FE, FC 以及垂直于平面 $BECF$ 的直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系。

因为 $D'F \perp EF, CF \perp EF$ ，平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成二面角为 60° ，

所以 $\angle D'FC = 60^\circ$ 。

则 $B(1, 2, 0)$ ， $C(0, 1, 0)$ ， $D'\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $E(1, 0, 0)$ ， $F(0, 0, 0)$ ，.

所以 $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 0)$ ， $\overrightarrow{CD'} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{FE} = (1, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{FD'} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

设平面 BCD' 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CD'} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = \sqrt{3}, \text{ 则 } z = 1, x = -\sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{n} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1).$$

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \overline{FE} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overline{FD'} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \text{ 所以} \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

令 $y = \sqrt{3}$, 则 $z = -1, x = 0$, 所以 $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, -1)$.

$$\text{所以} \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{0 + 3 - 1}{\sqrt{3+3+1} \times \sqrt{1+3}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

所以平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 夹角的正弦值为 $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

18. (1) 证明见解析;

(2) (i) 证明见解析; (ii) $2x_1 > x_2$, 证明见解析.

【分析】(1) 先由题意求得 $f'(x) = x^2 \left(\frac{1}{1+x} - 3k \right)$, 接着构造函数 $g(x) = \frac{1}{1+x} - 3k, x > 0$, 利用导数工具研究函数 $g(x)$ 的单调性和函数值情况, 从而得到函数的单调性, 进而得证函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在唯一极值点; 再结合 $f(0) = 0$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 的正负情况即可得证 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点;

(2) (i) 由 (1) $x_1 + 1 = \frac{1}{3k}$ 和 $g'(t) = f'(x_1 + t) - f'(x_1 - t)$ 结合 (1) 中所得导函数 $f'(x_1)$ 计算得到 $g'(t) = -t \left[\frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \right]$, 再结合 $t \in (0, x_1)$ 得

$g'(t) < 0$ 即可得证;

(ii) 由函数 $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递减得到 $0 > f(2x_1)$, 再结合 $f(x_2) = 0$, 和函数 $f(x)$ 的单调性以及函数值的情况即可得证.

【详解】(1) 由题得 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = \frac{x^2}{1+x} - 3kx^2 = x^2 \left(\frac{1}{1+x} - 3k \right)$,

因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $x^2 > 0$, 设 $g(x) = \frac{1}{1+x} - 3k, x > 0$,

则 $g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$g(0) = 1 - 3k > 0$, 令 $g(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3k} - 1$,

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 则 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一极值点,

对函数 $y = \ln(1+x) - x$ 有 $y' = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $y = \ln(1+x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $y = \ln(1+x) - x < y|_{x=0} = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

又因为 $f(0) = 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{2}x^2 - kx^3 = \frac{1}{2}x^2(1 - 2kx) < 0$,

所以 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) < 0$,

所以存在唯一 $x_2 \in (0, +\infty)$ 使得 $f(x_2) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点.

(2) (i) 由 (1) 知 $x_1 = \frac{1}{3k} - 1$, 则 $x_1 + 1 = \frac{1}{3k}$, $f'(x) = x^2 \left(\frac{1}{1+x} - 3k \right)$,

则 $g'(t) = f'(x_1 + t) - f'(x_1 - t) = (x_1 + t)^2 \left(\frac{1}{x_1 + t + 1} - 3k \right) - (x_1 - t)^2 \left(\frac{1}{x_1 - t + 1} - 3k \right)$

$$= (x_1 + t)^2 \left(\frac{1}{x_1 + t + 1} - \frac{1}{x_1 + 1} \right) - (x_1 - t)^2 \left(\frac{1}{x_1 - t + 1} - \frac{1}{x_1 + 1} \right)$$

$$= \frac{-t(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} - \frac{t(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} = -t \left[\frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \right]$$

$$= -t \left[\frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \right],$$

因为 $t \in (0, x_1)$, 所以 $x_1 - t + 1 > 0$, 所以 $\frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} > 0$,

所以 $g'(t) < 0$, 所以函数 $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递减;

(ii) $2x_1 > x_2$, 证明如下:

由 (i) 知: 函数 $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递减,

所以 $g(0) > g(x_1)$ 即 $0 > f(2x_1)$, 又 $f(x_2) = 0$,

由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减, $x_2 \in (x_0, +\infty)$, 且对任意 $x \in (0, x_2)$ $f(x) > 0$,

所以 $2x_1 > x_2$.

19. (1) $p_3 = p^3, p_4 = p^3(4-3p)$

(2) $p = \frac{2}{3}$

(3) 证明过程见解析

【分析】(1) 直接由二项分布概率计算公式即可求解；

(2) 由题意 $q_3 = q^3, q_4 = q^3(4-3q)$ ，联立 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4, p + q = 1$ 即可求解；

(3) 首先 $p_{2m} - p_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m, p_{2m+2} - p_{2m+1} = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m$ ，同理有 $q_{2m} - q_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} q^{m+1} p^m$ ，

$q_{2m+2} - q_{2m+1} = C_{2m+1}^m q^{m+2} p^m$ ，作差有 $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}$ ，另一方面

$$p_{2m+2} - p_{2m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot p \left(p - \frac{m}{2m+1} \right), \text{ 且同理有}$$

$$q_{2m+2} - q_{2m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot q \left(q - \frac{m}{2m+1} \right), \text{ 作差能得到 } p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}, \text{ 由此即可}$$

得证.

【详解】(1) p_3 为打完 3 个球后甲比乙至少多得两分的概率，故只能甲胜三场，

故所求为 $p_3 = C_3^3(1-p)^0 p^3 = p^3$ ，

p_4 为打完 4 个球后甲比乙至少多得两分的概率，故甲胜三场或四场，

故所求为 $p_4 = C_4^3(1-p)^1 p^3 + C_4^4(1-p)^0 p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p)$ ；

(2) 由 (1) 得 $p_3 = p^3, p_4 = p^3(4-3p)$ ，同理 $q_3 = q^3, q_4 = q^3(4-3q)$ ，

若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4, p + q = 1$ ，

则 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{p^3(4-3p) - p^3}{q^3(4-3q) - q^3} = \frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)} = \frac{p^3 q}{q^3 p} = \left(\frac{p}{q} \right)^2 = 4$ ，

由于 $0 < p, q < 1$ ，所以 $p = 2q = 2(1-p) > 0$ ，解得 $p = \frac{2}{3}$ ；

(3) 我们有

$$\begin{aligned} p_{2m} - p_{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m+1-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k \\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-2} C_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m.$$

以及

$$\begin{aligned} p_{2m+2} - p_{2m+1} &= \sum_{k=0}^m C_{2m+2}^k p^{2m+2-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k p^{2m+2-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m + (p-1) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} + C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m. \end{aligned}$$

至此我们得到 $p_{2m} - p_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m$, $p_{2m+2} - p_{2m+1} = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m$, 同理有

$$q_{2m} - q_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} q^{m+1} p^m, \quad q_{2m+2} - q_{2m+1} = C_{2m+1}^m q^{m+2} p^m.$$

故 $p_{2m} - p_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m = p \cdot (C_{2m}^{m-1} p^m q^m) > q \cdot (C_{2m}^{m-1} p^m q^m) = C_{2m}^{m-1} q^{m+1} p^m = q_{2m} - q_{2m+1}$, 即

$$p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}.$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} p_{2m+2} - p_{2m} &= (p_{2m+2} - p_{2m+1}) - (p_{2m} - p_{2m+1}) = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m = p^m q^m \cdot p \left(p \cdot C_{2m+1}^m - C_{2m}^{m-1} \right) \\ &= p^m q^m \cdot p \left(p \cdot \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} \right) = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot p \left(p - \frac{m}{2m+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{且同理有 } q_{2m+2} - q_{2m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot q \left(q - \frac{m}{2m+1} \right).$$

故结合

$$p \left(p - \frac{m}{2m+1} \right) - q \left(q - \frac{m}{2m+1} \right) = (p-q) \left(p+q - \frac{m}{2m+1} \right) > (p-q) \left(p-q - \frac{m}{2m+1} \right) = \frac{m+1}{2m+1} (p-q) > 0,$$

就能得到 $p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m}$, 即 $p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$, 证毕.