

# 2011年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

## 数学 I

参考公式：

(1) 样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ，其中  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  .

(2) 直棱柱的侧面积  $S = ch$ ，其中  $c$  为底面周长， $h$  为高.

(3) 棱柱的体积  $V = Sh$ ，其中  $S$  为底面积， $h$  为高.

**一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分。请把答案填写在答题卡相应位置上。**

1. 已知集合  $A = \{-1, 1, 2, 4\}$ ， $B = \{-1, 0, 2\}$ ，则  $A \cap B =$      ▲     .

2. 函数  $f(x) = \log_5(2x+1)$  的单调增区间是     ▲     .

3. 设复数  $z$  满足  $i(z+1) = -3+2i$  ( $i$  为虚数单位)，则  $z$  的实部是     ▲     .

4. 根据如图所示的伪代码，当输入  $a, b$  分别为2, 3时，最后输出的  $m$  的值为     ▲     .

```

Read a, b
If a > b Then
    m ← a
Else
    m ← b
End If
Print m
    
```

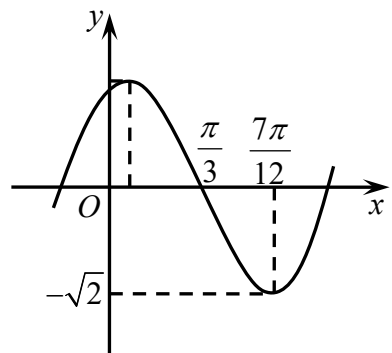
5. 从1, 2, 3, 4这四个数中一次随机取两个数，则其中一个数是另一个的两倍的概率是     ▲     .

6. 某老师从星期一到星期五收到的信件数分别是10, 6, 8, 5, 6，则该组数据的方差  $s^2 =$      ▲     .

7. 已知  $\tan(x + \frac{\pi}{4}) = 2$ ，则  $\frac{\tan x}{\tan 2x}$  的值为     ▲     .

8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，过坐标原点的一条直线与函数  $f(x) = \frac{2}{x}$  的图象交于  $P, Q$  两点，则线段  $PQ$  长的最小值是     ▲     .

9. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A, \omega, \varphi$  是常数， $A > 0, \omega > 0$ ) 的部分图象如图所示，则  $f(0)$  的



值是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

10. 已知  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  是夹角为  $\frac{2}{3}\pi$  的两个单位向量,  $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \vec{b} = k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ , 若

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 则实数  $k$  的值为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

11. 已知实数  $a \neq 0$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 1 \\ -x - 2a, & x \geq 1 \end{cases}$ , 若  $f(1-a) = f(1+a)$ , 则  $a$  的值

为

$\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $P$  是函数  $f(x) = e^x (x > 0)$  的图象上的动点, 该图象在  $P$  处的切线  $l$  交  $y$  轴于点  $M$ , 过点  $P$  作  $l$  的垂线交  $y$  轴于点  $N$ , 设线段  $MN$  的中点的纵坐标为  $t$ , 则  $t$  的最大值是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

13. 设  $1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7$ , 其中  $a_1, a_3, a_5, a_7$  成公比为  $q$  的等比数列,  $a_2, a_4, a_6$  成公差为 1 的等差数列, 则  $q$  的最小值是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

14. 设集合  $A = \{(x, y) \mid \frac{m}{2} \leq (x-2)^2 + y^2 \leq m^2, x, y \in R\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid$

$2m \leq x+y \leq 2m+1, x, y \in R\}$ , 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则实数  $m$  的取值范围是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$

**二、解答题: 本大题共6小题, 共计90分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. (本小题满分14分)

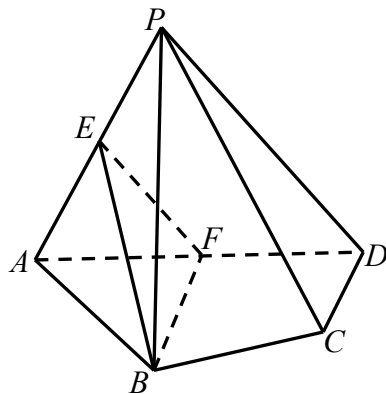
在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ .

(1) 若  $\sin(A + \frac{\pi}{6}) = 2\cos A$ , 求  $A$  的值;

(2) 若  $\cos A = \frac{1}{3}, b = 3c$ , 求  $\sin C$  的值.

16. (本小题满分14分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB = AD$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $E, F$  分别是



$AP, AD$  的中点.

求证: (1) 直线  $EF \parallel$  平面  $PCD$ ;

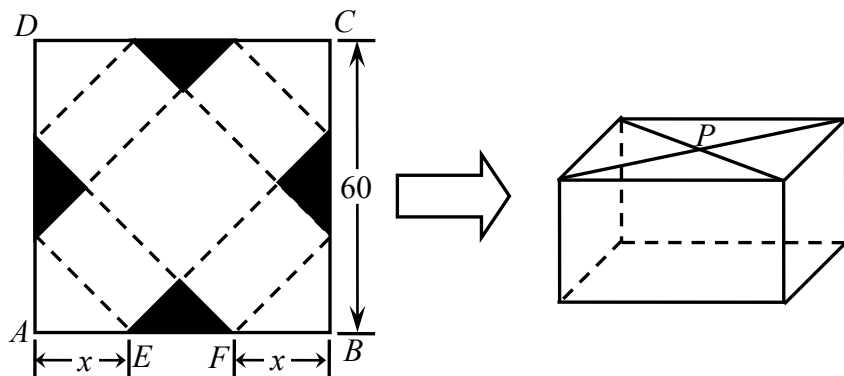
(2) 平面  $BEF \perp$  平面  $PAD$ .

17. (本小题满分14分)

请你设计一个包装盒, 如图所示,  $ABCD$  是边长为60cm的正方形硬纸片, 切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形, 再沿虚线折起, 使得  $A, B, C, D$  四个点重合于图中的点  $P$ , 正好形成一个正四棱柱形状的包装盒,  $E, F$  在  $AB$  上, 是被切去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点. 设  $AE = FB = x$  (cm).

(1) 某广告商要求包装盒的侧面积  $S$  ( $\text{cm}^2$ ) 最大, 试问  $x$  应取何值?

(2) 某厂商要求包装盒的容积  $V$  ( $\text{cm}^3$ ) 最大, 试问  $x$  应取何值? 并求出此时包装盒的高与底面边长的比值.



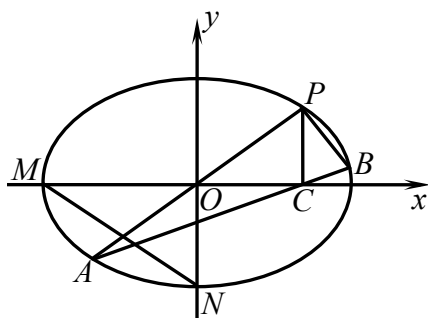
18. (本小题满分16分)

如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $M, N$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$  的顶点, 过坐标原点的直线交椭圆于  $P, A$  两点, 其中点  $P$  在第一象限, 过  $P$  作  $x$  轴的垂线, 垂足为  $C$ , 连接  $AC$ , 并延长交椭圆于点  $B$ . 设直线  $PA$  的斜率为  $k$ .

(1) 当直线  $PA$  平分线段  $MN$ , 求  $k$  的值;

(2) 当  $k = 2$  时, 求点  $P$  到直线  $AB$  的距离  $d$

;



(3) 对任意  $k > 0$ ，求证： $PA \perp PB$ 。

19. (本小题满分16分)

已知  $a, b$  是实数，函数  $f(x) = x^3 + ax$ ， $g(x) = x^2 + bx$ ， $f'(x)$  和  $g'(x)$  是  $f(x)$  和  $g(x)$  的导函数。若  $f'(x)g'(x) \geq 0$  在区间  $I$  上恒成立，则称  $f(x)$  和  $g(x)$  在区间  $I$  上单调性一致。

(1) 设  $a > 0$ ，若  $f(x)$  和  $g(x)$  在区间  $[-1, +\infty)$  上单调性一致，求实数  $b$  的取值范围；

(2) 设  $a < 0$  且  $a \neq b$ ，若  $f(x)$  和  $g(x)$  在以  $a, b$  为端点的开区间上单调性一致，求  $|a - b|$  的最大值。

20. (本小题满分16分)

设  $M$  为部分正整数组成的集合，数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 1$ ，前  $n$  项的和为  $S_n$ ，已知对任意整数  $k \in M$ ，当  $n > k$  时， $S_{n+k} + S_{n-k} = 2(S_n + S_k)$  都成立。

(1) 设  $M = \{1\}$ ， $a_2 = 2$ ，求  $a_5$  的值；

(2) 设  $M = \{3, 4\}$ ，求数列  $\{a_n\}$  的通项公式。



# 2011年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

## 数学 II（附加题）

21. [选做题] 本题包括A、B、C、D四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答。

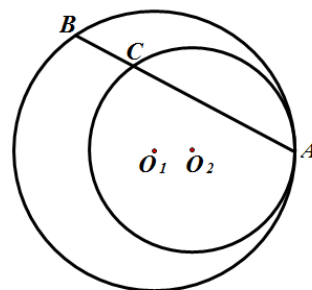
若多做，则按作答的前两题评分。

解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. 选修4-1：几何证明选讲

（本小题满分10分）

如图，圆  $O_1$  与圆  $O_2$  内切于点  $A$ ，其半径分别为  $r_1$  与  $r_2$ （ $r_1 > r_2$ ）。圆  $O_1$  的弦  $AB$  交圆  $O_2$  于点  $C$ （ $O_1$  不在  $AB$  上）。



求证：  $AB:AC$  为定值。

B. 选修4-2：矩阵与变换

（本小题满分10分）

已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，向量  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。求向量  $\alpha$ ，使得  $A^2\alpha = \beta$ 。

C. 选修4-4：坐标系与参数方程

（本小题满分10分）

在平面直角坐标系  $xOy$  中，求过椭圆  $\begin{cases} x = 5 \cos \varphi \\ y = 3 \sin \varphi \end{cases}$ （ $\varphi$  为参数）的右焦点，且与直线

$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$ （ $t$  为参数）平行的直线的普通方程。

D. 选修4-5：不等式选讲

（本小题满分10分）

解不等式：  $x + |2x - 1| < 3$  .

**【必做题】第22题、第23题，每题10分，共计20分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

22. (本小题满分10分)

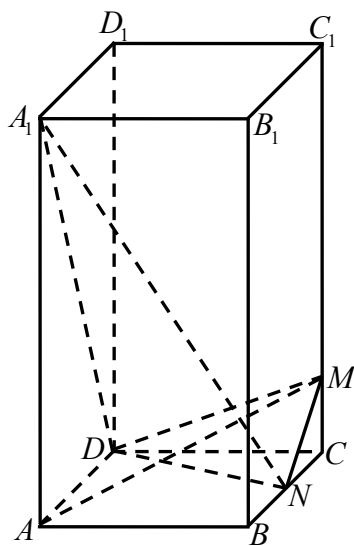
如图，在正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，  $AA_1 = 2$  ,

$AB = 1$  , 点  $N$  是  $BC$  的中点，点  $M$  在  $CC_1$  上.

设二面角  $A_1 - DN - M$  的大小为  $\theta$  .

(1) 当  $\theta = 90^\circ$  时，求  $AM$  的长；

(2) 当  $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$  时，求  $CM$  的长.



23. (本小题满分10分)

设整数  $n \geq 4$  ,  $P(a,b)$  是平面直角坐标系  $xOy$  中的点，其中  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  ,

$a > b$  .

(1) 记  $A_n$  为满足  $a - b = 3$  的点  $P$  的个数，求  $A_n$  ;

(2) 记  $B_n$  为满足  $\frac{1}{3}(a - b)$  是整数的点  $P$  的个数，求  $B_n$  .

## 数学 I 试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法。每小题 5 分，共计 70 分。

- |                         |                                 |                    |                             |
|-------------------------|---------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| 1. $\{-1, 2\}$          | 2. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$    | 3. 1               | 4. 3                        |
| 5. $\frac{1}{3}$        | 6. 3.2                          | 7. $\frac{4}{9}$   | 8. 4                        |
| 9. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | 10. $\frac{5}{4}$               | 11. $-\frac{3}{4}$ | 12. $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$ |
| 13. $\sqrt[3]{3}$       | 14. $[\frac{1}{2}, 2+\sqrt{2}]$ |                    |                             |

### 二、解答题

15. 本小题主要考查三角函数的基本关系式、两角和的正弦公式、解三角形，考查运算求解能力。满分 14 分。

解：(1) 由题设知  $\sin A \cos \frac{\pi}{6} + \cos A \sin \frac{\pi}{6} = 2\cos A$ 。从而  $\sin A = \sqrt{3} \cos A$ ，所以  $\cos A \neq 0$ ，  
 $\tan A = \sqrt{3}$ 。因为  $0 < A < \pi$ ，所以  $A = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 由  $\cos A = \frac{1}{3}$ ， $b = 3c$  及  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，得  $a^2 = b^2 - c^2$ 。

故  $\triangle ABC$  是直角三角形，且  $B = \frac{\pi}{2}$ 。所以  $\sin C = \cos A = \frac{1}{3}$ 。

16. 本小题主要考查直线与平面、平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力。满分 14 分。

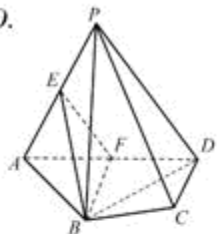
证明：(1) 在  $\triangle PAD$  中，因为  $E, F$  分别为  $AP, AD$  的中点，所以  $EF \parallel PD$ 。

又因为  $EF \not\subset$  平面  $PCD$ ， $PD \subset$  平面  $PCD$ ，  
 所以直线  $EF \parallel$  平面  $PCD$ 。

(2) 连结  $BD$ 。因为  $AB = AD$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，所以  $\triangle ABD$  为正三角形。因为  $F$  是  $AD$  的中点，所以  $BF \perp AD$ 。

因为平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ， $BF \subset$  平面  $ABCD$ ，  
 平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ ，所以  $BF \perp$  平面  $PAD$ 。

又因为  $BF \subset$  平面  $BEF$ ，所以平面  $BEF \perp$  平面  $PAD$ 。



(第 16 题)

17. 本小题主要考查函数的概念、导数等基础知识，考查数学建模能力、空间想象能力、数学阅读能力及解决实际问题的能力。满分 14 分。

解：设包装盒的高为  $h$  (cm)，底面边长为  $a$  (cm)。由已知得

$$a = \sqrt{2}x, h = \frac{60-2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(30-x), 0 < x < 30.$$

(1)  $S = 4ah = 8x(30-x) = -8(x-15)^2 + 1800$ ，  
 所以当  $x = 15$  时， $S$  取得最大值。

(2)  $V = a^2h = 2\sqrt{2}(-x^3 + 30x^2)$ ， $V' = 6\sqrt{2}x(20-x)$ 。  
 由  $V' = 0$  得  $x = 0$  (舍) 或  $x = 20$ 。

当  $x \in (0, 20)$  时， $V' > 0$ ；当  $x \in (20, 30)$  时， $V' < 0$ 。  
 所以当  $x = 20$  时， $V$  取得极大值，也是最大值。

此时  $\frac{h}{a} = \frac{1}{2}$ . 即包装盒的高与底面边长的比值为  $\frac{1}{2}$ .

18. 本小题主要考查椭圆的标准方程及几何性质、直线方程、直线的垂直关系、点到直线的距离等基础知识,考查运算求解能力和推理论证能力. 满分 16 分.

解:(1)由题设知,  $a=2, b=\sqrt{2}$ , 故  $M(-2, 0), N(0, -\sqrt{2})$ , 所以线段  $MN$  中点的坐标为  $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ . 由于直线  $PA$  平分线段  $MN$ , 故直线  $PA$  过线段  $MN$  的中点, 又直线  $PA$

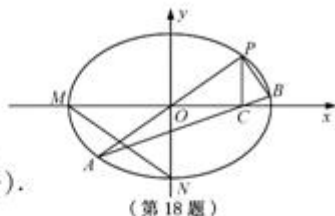
过坐标原点, 所以  $k = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- (2) 直线  $PA$  的方程为  $y=2x$ , 代入椭圆方程得

$$\frac{x^2}{4} + \frac{4x^2}{2} = 1, \text{ 解得 } x = \pm \frac{2}{3}, \text{ 因此 } P(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), A(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}).$$

于是  $C(\frac{2}{3}, 0)$ , 直线  $AC$  的斜率为  $\frac{0 + \frac{4}{3}}{\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3})} = 1$ , 故直线  $AB$  的方程为  $x - y - \frac{2}{3} = 0$ .

$$\text{因此, } d = \frac{|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



- (3) 解法一:

将直线  $PA$  的方程  $y=kx$  代入  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ , 解得  $x = \pm \frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$ . 记  $\mu = \frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$ ,

则  $P(\mu, \mu k), A(-\mu, -\mu k)$ . 于是  $C(\mu, 0)$ . 故直线  $AB$  的斜率为  $\frac{0 + \mu k}{\mu + \mu} = \frac{k}{2}$ ,

其方程为  $y = \frac{k}{2}(x - \mu)$ , 代入椭圆方程得  $(2+k^2)x^2 - 2\mu k^2 x - \mu^2(3k^2+2) = 0$ ,

解得  $x = \frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2}$  或  $x = -\mu$ . 因此  $B(\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2}, \frac{\mu k^3}{2+k^2})$ .

于是直线  $PB$  的斜率  $k_1 = \frac{\frac{\mu k^3}{2+k^2} - \mu k}{\frac{\mu(3k^2+2)}{2+k^2} - \mu} = \frac{k^3 - k(2+k^2)}{3k^2+2 - (2+k^2)} = -\frac{1}{k}$ .

因此  $k_1 k = -1$ , 所以  $PA \perp PB$ .

解法二:

设  $P(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 \neq x_2, A(-x_1, -y_1), C(x_1, 0)$ . 设直线  $PB, AB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ . 因为  $C$  在直线  $AB$  上, 所以  $k_2 = \frac{0 - (-y_1)}{x_1 - (-x_1)} = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{k}{2}$ . 从而

$$\begin{aligned} k_1 k + 1 &= 2k_1 k_2 + 1 = 2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 - (-y_1)}{x_2 - (-x_1)} + 1 \\ &= \frac{2y_2^2 - 2y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} + 1 = \frac{(x_2^2 + 2y_2^2) - (x_1^2 + 2y_1^2)}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{4 - 4}{x_2^2 - x_1^2} = 0. \end{aligned}$$

因此  $k_1 k = -1$ , 所以  $PA \perp PB$ .

19. 本小题主要考查函数的概念、性质及导数等基础知识,考查灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力. 满分 16 分.

解:  $f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2x + b$ .

(1) 由题意知  $f'(x)g'(x) \geq 0$  在  $[-1, +\infty)$  上恒成立. 因为  $a > 0$ , 故  $3x^2 + a > 0$ ,

进而  $2x+b \geq 0$ , 即  $b \geq -2x$  在区间  $[-1, +\infty)$  上恒成立, 所以  $b \geq 2$ . 因此  $b$  的取值范围是  $[2, +\infty)$ .

(2) 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = \pm \sqrt{-\frac{a}{3}}$ .

若  $b > 0$ , 由  $a < 0$  得  $0 \in (a, b)$ . 又因为  $f'(0)g'(0) = ab < 0$ , 所以函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $(a, b)$  上不是单调性一致的. 因此  $b \leq 0$ .

现设  $b \leq 0$ . 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $g'(x) < 0$ ; 当  $x \in (-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{3}})$  时,  $f'(x) > 0$ . 因此,

当  $x \in (-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{3}})$  时,  $f'(x)g'(x) < 0$ . 故由题设得  $a \geq -\sqrt{-\frac{a}{3}}$  且  $b \geq -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ ,

从而  $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ , 于是  $-\frac{1}{3} \leq b \leq 0$ . 因此  $|a-b| \leq \frac{1}{3}$ , 且当  $a = -\frac{1}{3}$ ,  $b = 0$  时等号成立.

又当  $a = -\frac{1}{3}$ ,  $b = 0$  时,  $f'(x)g'(x) = 6x(x^2 - \frac{1}{9})$ , 从而当  $x \in (-\frac{1}{3}, 0)$  时  $f'(x)g'(x) > 0$ ,

故函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $(-\frac{1}{3}, 0)$  上单调性一致. 因此  $|a-b|$  的最大值为  $\frac{1}{3}$ .

20. 本小题考查数列的通项与前  $n$  项和的关系、等差数列的基本性质等基础知识, 考查考生分析探究及逻辑推理的能力. 满分 16 分.

解: (1) 由题设知, 当  $n \geq 2$  时,  $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + S_1)$ , 即  $(S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = 2S_1$ .

从而  $a_{n+1} - a_n = 2a_1 = 2$ . 又  $a_2 = 2$ , 故当  $n \geq 2$  时,  $a_n = a_2 + 2(n-2) = 2n-2$ .

所以  $a_5$  的值为 8.

(2) 由题设知, 当  $k \in M = \{3, 4\}$  且  $n > k$  时,  $S_{n+k} + S_{n-k} = 2S_n + 2S_k$  且  $S_{n+1+k} + S_{n+1-k} = 2S_{n+1} + 2S_k$ , 两式相减得  $a_{n+1+k} + a_{n+1-k} = 2a_{n+1}$ , 即  $a_{n+1+k} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_{n+1-k}$ . 所以当  $n \geq 8$  时,  $a_{n-6}, a_{n-3}, a_n, a_{n+3}, a_{n+6}$  成等差数列, 且  $a_{n-6}, a_{n-2}, a_{n+2}, a_{n+6}$  也成等差数列.

从而当  $n \geq 8$  时,  $2a_n = a_{n+3} + a_{n-3} = a_{n+6} + a_{n-6}$ , (\*)

且  $a_{n+6} + a_{n-6} = a_{n+2} + a_{n-2}$ . 所以当  $n \geq 8$  时,  $2a_n = a_{n+2} + a_{n-2}$ , 即  $a_{n+2} - a_n = a_n - a_{n-2}$ . 于是

当  $n \geq 9$  时,  $a_{n-3}, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{n+3}$  成等差数列, 从而  $a_{n+3} + a_{n-3} = a_{n+1} + a_{n-1}$ , 故由 (\*)

式知  $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ , 即  $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ . 当  $n \geq 9$  时, 设  $d = a_n - a_{n-1}$ .

当  $2 \leq m \leq 8$  时,  $m+6 \geq 8$ , 从而由 (\*) 式知  $2a_{m+6} = a_m + a_{m+12}$ , 故  $2a_{m+7} = a_{m+1} + a_{m+13}$ .

从而  $2(a_{m+7} - a_{m+6}) = a_{m+1} - a_m + (a_{m+13} - a_{m+12})$ , 于是  $a_{m+1} - a_m = 2d - d = d$ .

因此,  $a_{n+1} - a_n = d$  对任意  $n \geq 2$  都成立. 又由  $S_{n+k} + S_{n-k} - 2S_n = 2S_k$  ( $k \in \{3, 4\}$ ) 可知

$(S_{n+k} - S_n) - (S_n - S_{n-k}) = 2S_k$ , 故  $9d = 2S_3$  且  $16d = 2S_4$ . 解得  $a_4 = \frac{7}{2}d$ , 从而  $a_2 = \frac{3}{2}d$ ,

$a_1 = \frac{d}{2}$ . 因此, 数列  $\{a_n\}$  为等差数列. 由  $a_1 = 1$  知  $d = 2$ .

所以数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2n - 1$ .

## 数学 II (附加题)

21. 【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题, 请选定其中两题, 并在相应的答题区域内作答. 若多做, 则按作答的前两题评分.

解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

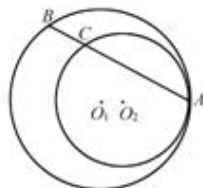
A. 选修 4-1: 几何证明选讲

(本小题满分 10 分)

如图, 圆  $O_1$  与圆  $O_2$  内切于点 A, 其半径分别为  $r_1$  与  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ). 圆  $O_1$  的弦 AB 交圆  $O_2$  于点 C ( $O_1$  不在 AB 上). 求证:  $AB : AC$  为定值.

B. 选修 4-2: 矩阵与变换

(本小题满分 10 分)



(第 21-A 题)

已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , 向量  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . 求向量  $\alpha$ , 使得  $A^2\alpha = \beta$ .

- C. 选修4-4: 坐标系与参数方程  
(本小题满分10分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 求过椭圆  $\begin{cases} x = 5\cos\varphi \\ y = 3\sin\varphi \end{cases}$  ( $\varphi$  为参数) 的右焦点, 且与直线  $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 平行的直线的普通方程.

- D. 选修4-5: 不等式选讲  
(本小题满分10分)

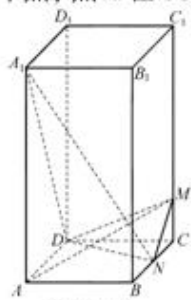
解不等式  $x + |2x - 1| < 3$ .

- 【必做题】第22题、第23题, 每题10分, 共计20分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分10分)

如图, 在正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 2$ ,  $AB = 1$ , 点  $N$  是  $BC$  的中点, 点  $M$  在  $CC_1$  上. 设二面角  $A_1 - DN - M$  的大小为  $\theta$ .

- (1) 当  $\theta = 90^\circ$  时, 求  $AM$  的长;  
(2) 当  $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$  时, 求  $CM$  的长.



(第22题)

23. (本小题满分10分)

设整数  $n \geq 4$ ,  $P(a, b)$  是平面直角坐标系  $xOy$  中的点, 其中  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $a > b$ .

- (1) 记  $A_n$  为满足  $a - b = 3$  的点  $P$  的个数, 求  $A_n$ ;  
(2) 记  $B_n$  为满足  $\frac{1}{3}(a - b)$  是整数的点  $P$  的个数, 求  $B_n$ .

## 数学 II (附加题) 参考答案

21. 【选做题】

- A. 选修4-1: 几何证明选讲

本小题主要考查两圆内切、相似比等基础知识, 考查推理论证能力. 满分10分.

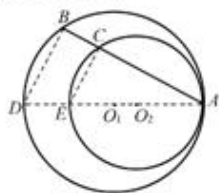
证明: 连结  $AO_1$ , 并延长分别交两圆于点  $E$  和点  $D$ . 连结  $BD, CE$ .

因为圆  $O_1$  与圆  $O_2$  内切于点  $A$ , 所以点  $O_2$  在  $AD$  上. 故  $AD, AE$  分别为圆  $O_1, O_2$  的直径.

从而  $\angle ABD = \angle ACE = \frac{\pi}{2}$ . 所以  $BD \parallel CE$ ,

于是  $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{r_1}{r_2}$ .

所以  $AB : AC$  为定值.



(第21-A题)

- B. 选修4-2: 矩阵与变换

本小题主要考查矩阵运算等基础知识, 考查运算求解能力. 满分10分.

解:  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ .

设  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . 由  $A^2\alpha = \beta$ , 得  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 从而  $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$ .

解得  $x = -1, y = 2$ , 所以  $\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

- C. 选修4-4: 坐标系与参数方程

本小题主要考查椭圆及直线的参数方程等基础知识, 考查转化问题的能力. 满分10分.

解: 由题设知, 椭圆的长半轴长  $a = 5$ , 短半轴长  $b = 3$ , 从而  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$ , 所以右焦点为  $(4, 0)$ . 将已知直线的参数方程化为普通方程:  $x - 2y + 2 = 0$ .

故所求直线的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 因此其方程为  $y = \frac{1}{2}(x-4)$ , 即  $x-2y-4=0$ .

**D. 选修 4-5: 不等式选讲**

本小题主要考查绝对值不等式的基础知识, 考查分类讨论、运算求解能力. 满分 10 分.

解: 原不等式可化为  $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x+(2x-1) < 3; \end{cases}$  或  $\begin{cases} 2x-1 < 0, \\ x-(2x-1) < 3. \end{cases}$

解得  $\frac{1}{2} \leq x < \frac{4}{3}$  或  $-2 < x < \frac{1}{2}$ .

所以原不等式的解集是  $\left\{x \mid -2 < x < \frac{4}{3}\right\}$ .

**22. 【必做题】** 本小题主要考查空间向量的基础知识, 考查运用空间向量解决问题的能力. 满分 10 分.

解: 建立如图所示的空间直角坐标系  $D-xyz$ . 设  $CM=t$  ( $0 \leq t \leq 2$ ), 则各点的坐标为  $A(1,0,0)$ ,

$A_1(1,0,2)$ ,  $N\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ ,  $M(0,1,t)$ . 所以  $\vec{DN} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ ,  $\vec{DM} = (0, 1, t)$ ,  $\vec{DA_1} = (1, 0, 2)$ .

设平面  $DMN$  的法向量为  $n_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , 则

$n_1 \cdot \vec{DN} = 0$ ,  $n_1 \cdot \vec{DM} = 0$ . 即  $x_1 + 2y_1 = 0$ ,  $y_1 + tz_1 = 0$ .

令  $z_1 = 1$ , 则  $y_1 = -t$ ,  $x_1 = 2t$ . 所以  $n_1 = (2t, -t, 1)$  是

平面  $DMN$  的一个法向量.

设平面  $A_1DN$  的法向量为  $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , 则

$n_2 \cdot \vec{DA_1} = 0$ ,  $n_2 \cdot \vec{DN} = 0$ . 即  $x_2 + 2z_2 = 0$ ,  $x_2 + 2y_2 = 0$ .

令  $z_2 = 1$ , 则  $x_2 = -2$ ,  $y_2 = 1$ . 所以  $n_2 = (-2, 1, 1)$  是

平面  $A_1DN$  的一个法向量. 从而  $n_1 \cdot n_2 = -5t + 1$ .

(1) 因为  $\theta = 90^\circ$ , 所以  $n_1 \cdot n_2 = -5t + 1 = 0$ , 解得  $t = \frac{1}{5}$ . 从而

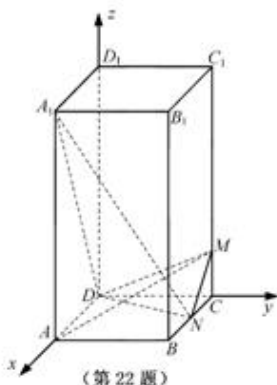
$M\left(0, 1, \frac{1}{5}\right)$ .

所以  $AM = \sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{51}}{5}$ .

(2) 因为  $|n_1| = \sqrt{5t^2 + 1}$ ,  $|n_2| = \sqrt{6}$ , 所以  $\cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{-5t + 1}{\sqrt{6} \sqrt{5t^2 + 1}}$ .

因为  $\langle n_1, n_2 \rangle = \theta$  或  $\pi - \theta$ , 所以  $\left| \frac{-5t + 1}{\sqrt{6} \sqrt{5t^2 + 1}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{6}$ , 解得  $t = 0$  或  $t = \frac{1}{2}$ .

根据图形和(1)的结论可知  $t = \frac{1}{2}$ , 从而  $CM$  的长为  $\frac{1}{2}$ .



**23. 【必做题】** 本小题主要考查计数原理, 考查探究能力. 满分 10 分.

解: (1) 点  $P$  的坐标满足条件:  $1 \leq b = a - 3 \leq n - 3$ , 所以  $A_n = n - 3$ .

(2) 设  $k$  为正整数, 记  $f_n(k)$  为满足题设条件以及  $a - b = 3k$  的点  $P$  的个数. 只要讨论

$f_n(k) \geq 1$  的情形. 由  $1 \leq b = a - 3k \leq n - 3k$  知  $f_n(k) = n - 3k$ , 且  $k \leq \frac{n-1}{3}$ .

设  $n-1 = 3m+r$ , 其中  $m \in \mathbf{N}^*$ ,  $r \in \{0, 1, 2\}$ , 则  $k \leq m$ . 所以

$$B_n = \sum_{k=1}^m f_n(k) = \sum_{k=1}^m (n-3k) = mn - \frac{3m(m+1)}{2} = \frac{m(2n-3m-3)}{2}.$$

将  $m = \frac{n-1-r}{3}$  代入上式, 化简得  $B_n = \frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{r(r-1)}{6}$ .

所以  $B_n = \begin{cases} \frac{n(n-3)}{6}, & \frac{n}{3} \text{ 是整数,} \\ \frac{(n-1)(n-2)}{6}, & \frac{n}{3} \text{ 不是整数.} \end{cases}$