绝密★启用前

2019年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

答案解析版

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.设集合A={x|x^2-5x+6>0}，B={ x|x-1<0}，则$A\cap B$=

A. (-∞，1)　　B. (-2，1)

C. (-3，-1)　　D. (3，+∞)

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查集合的交集和一元二次不等式的解法，渗透了数学运算素养．采取数轴法，利用数形结合的思想解题．

【详解】由题意得，$A=\left\{x\left|x2,\text{或}x3\right.\right\},B=\left\{x\left|x<1\right.\right\}$，则 $A\cap B=\left\{x\left|x<1\right.\right\}$．故选A．

【点睛】本题考点为集合的运算，为基础题目，难度偏易．不能领会交集的含义易致误，区分交集与并集的不同，交集取公共部分，并集包括二者部分．

2.设z=-3+2i，则在复平面内$\overline{z}$对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查复数的共轭复数和复数在复平面内的对应点位置，渗透了直观想象和数学运算素养．采取定义法，利用数形结合思想解题．

【详解】由 $z=-3+2i,$ 得 $\overline{z}=-3-2i,$ 则 $\overline{z}=-3-2i,$ 对应点（-3，-

2）位于第三象限．故选C．

【点睛】本题考点为共轭复数，为基础题目，难度偏易．忽视共轭复数的定义致错，复数与共轭复数间的关系为实部同而虚部异，它的实部和虚部分别对应复平面上点的横纵坐标

．

3.已知 $\overrightarrow{AB}$ =(2,3)，$\overrightarrow{AC}$ =(3，*t*)，$|\overrightarrow{BC}|$ =1，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ =

A. -3

B. -2

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查平面向量数量积的坐标运算，渗透了直观想象和数学运算素养．采取公式法，利用转化与化归思想解题．

【详解】由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,t-3)$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{1^2+(t-3)^2}=1$，得 $t=3$，则

$\overrightarrow{BC}=(1,0)$，$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=(2,3)\bullet(1,0)=2\times1+3\times0=2$．故选C．

【点睛】本题考点为平面向量的数量积，侧重基础知识和基本技能，难度不大．学生易在处理向量的法则运算和坐标运算处出错，借助向量的模的公式得到向量的坐标，然后计算向量数量积．

4.2019年1月3日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就，实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系．为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行．L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上．设地球质量为 M_1，月球质量为M_2，地月距离为R，L_2 点到月球的距离为r，根据牛顿运动定律和万有引力定律，r满足方程：

$$\frac{M_1}{(R+r)^2}+\frac{M_2}{r^2}=(R+r)\frac{M_1}{R^3}.$$

设 $\alpha=\frac{r}{R}$，由于 α 的值很小，因此在近似计算中 $\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx3\alpha^3$，则$r$的近似值为

A. $\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}R$

B. $\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}}R$

C. $\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}R$

D. $\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题在正确理解题意的基础上，将有关式子代入给定公式，建立α 的方程，解方程、近似计算．题目所处位置应是“解答题”，但由于题干较长，易使考生“望而生畏”，注重了阅读理解、数学式子的变形及运算求解能力的考查．

【详解】由$\alpha=\dfrac{r}{R}$，得$r=\alpha R$

因为$\dfrac{M_1}{(R+r)^2}+\dfrac{M_2}{r^2}=(R+r)\dfrac{M_1}{R^3}$，

所以$\dfrac{M_1}{R^2(1+\alpha)^2}+\dfrac{M_2}{\alpha^2R^2}=(1+\alpha)\dfrac{M_1}{R^2}$，

即$\dfrac{M_2}{M_1}=\alpha^2[(1+\alpha)-\dfrac{1}{(1+\alpha)^2}]=\dfrac{\alpha^5+3\alpha^4+3\alpha^3}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，

解得$\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}$，

所以$r=\alpha R=\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R.$

【点睛】由于本题题干较长，所以，易错点之一就是能否静心读题，正确理解题意；易错点之二是复杂式子的变形出错．

5.演讲比赛共有9位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从9个原始评分中去掉1个最高分、1个最低分，得到7个有效评分.7个有效评分与9个原始评分相比，不变的数字特征是

A. 中位数　　B. 平均数

C. 方差　　D. 极差

【答案】A

【解析】

【分析】

可不用动笔，直接得到答案，亦可采用特殊数据，特值法筛选答案．

【详解】设9位评委评分按从小到大排列为$x_1<x_2<x_3<x_4\cdots<x_8<x_9$．

则①原始中位数为x_5，去掉最低分x_1，最高分x_9，后剩余$x_2<x_3<x_4\cdots<x_8$，

中位数仍为x_5，$\therefore$ A正确.

②原始平均数$\overline{x}=\frac{1}{9}(x_1<x_2<x_3<x_4\cdots<x_8<x_9)$，后来平均数

$\overline{x'}=\frac{1}{7}(x_2<x_3<x_4\cdots<x_8)$

平均数受极端值影响较大，$\therefore$ $\overline{x}$与$\overline{x'}$不一定相同，B不正确

③$S^2=\frac{1}{9}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_q-\overline{x}\right)^2\right]$

$s'^2=\frac{1}{7}\left[\left(x_2-\overline{x'}\right)^2+\left(x_3-\overline{x'}\right)^2+\cdots+\left(x_8-\overline{x'}\right)^2\right]$由②易知，C不正确.

④原极差$=x_9-x_1$，后来极差$=x_8-x_2$显然极差变小，D不正确.

【点睛】本题旨在考查学生对中位数、平均数、方差、极差本质的理解.

6.若$a>b$，则

A. $\ln(a-b)>0$

B. $3^a<3^b$

C. $a^3-b^3>0$

D. $|a|>|b|$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题也可用直接法，因为$a>b$，所以$a-b>0$，当$a-b=1$时，$\ln(a-b)=0$，知A错，因为$y=3^x$是增函数，所以$3^a>3^b$，故B错；因为幂函数$y=x^3$是增函数，$a>b$，所以$a^3>b^3$，知C正确；取$a=1,b=-2$，满足$a>b$，$1=|a|<|b|=2$，知D错.

【详解】取$a=2,b=1$，满足$a>b$，$\ln(a-b)=0$，知A错，排除A；因为$9=3^a>3^b=3$，知B错，排除B；取$a=1,b=-2$，满足$a>b$，$1=|a|<|b|=2$，知D错，排除D，因为幂函数$y=x^3$是增函数，$a>b$，所以$a^3>b^3$，故选C.

【点睛】本题主要考查对数函数性质、指数函数性质、幂函数性质及绝对值意义，渗透了逻辑推理和运算能力素养，利用特殊值排除即可判断.

7.设α，β为两个平面，则$\alpha // \beta$的充要条件是

A. α内有无数条直线与β平行

B. α内有两条相交直线与β平行

C. α，β平行于同一条直线

D. α，β垂直于同一平面

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查了空间两个平面的判定与性质及充要条件，渗透直观想象、逻辑推理素养，利用面面平行的判定定理与性质定理即可作出判断.

【详解】由面面平行的判定定理知：α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的充分条件，

由面面平行性质定理知，若 $\alpha // \beta$，则 α 内任意一条直线都与 β 平行，所以 α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的必要条件，故选B.

【点睛】面面平行的判定问题要紧扣面面平行判定定理，最容易犯的错误为定理记不住，凭主观臆断，如：“若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // b$，则 $\alpha // \beta$”此类的错误.

8.若抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则p=

A. 2

B. 3

C. 4

D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】

利用抛物线与椭圆有共同的焦点即可列出关于 p 的方程，即可解出 p，或者利用检验排除的方法，如 $p=2$ 时，抛物线焦点为（1，0），椭圆焦点为（±2，0），排除A，同样可排除B，C，故选D.

【详解】因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $(\frac{p}{2},0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，所以

$3p-p=(\frac{p}{2})^2$，解得 $p=8$，故选D.

【点睛】本题主要考查抛物线与椭圆的几何性质，渗透逻辑推理、运算能力素养.

9.下列函数中，以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间($\frac{\pi}{4}$， $\frac{\pi}{2}$)单调递增的是

A. $f(x)=|\cos 2x|$ B. $f(x)=|\sin 2x|$

C. $f(x)=\cos|x|$ D. $f(x)=\sin|x|$

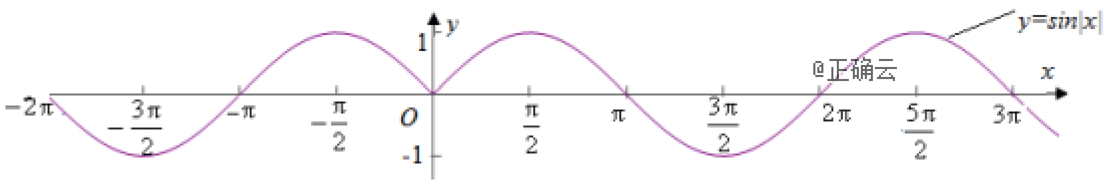
【答案】A

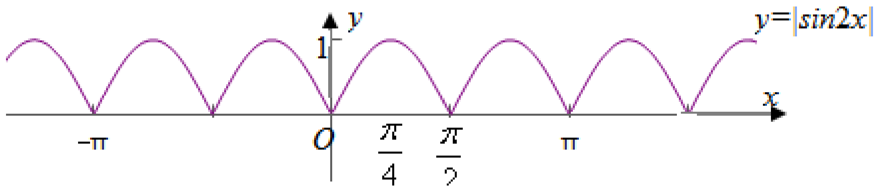
【解析】

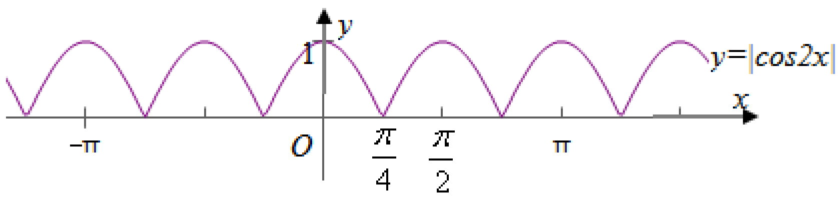
【分析】

本题主要考查三角函数图象与性质，渗透直观想象、逻辑推理等数学素养．画出各函数图象，即可做出选择.

【详解】因为 $y=\sin|x|$ 图象如下图，知其不是周期函数，排除D；因为 $y=\cos|x|=\cos x$，周期为 2π，排除C，作出 $y=|\cos 2x|$ 图象，由图象知，其周期为 $\frac{\pi}{2}$，在区间 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 单调递增，A正确；作出 $y=|\sin 2x|$ 的图象，由图象知，其周期为 $\frac{\pi}{2}$，在区间 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 单调递减，排除B，故选A.







【点睛】利用二级结论：①函数 $y=|f(x)|$ 的周期是函数 $y=f(x)$ 周期的一半；② $y=\sin|\omega x|$ 不是周期函数；

10.已知$a\in$（0，$\frac{\pi}{2}$），2sin2α=cos2α+1，则sinα=

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】

利用二倍角公式得到正余弦关系，利用角范围及正余弦平方和为1关系得出答案．

【详解】$\because 2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，$\therefore 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cos^2\alpha.\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\therefore \cos\alpha>0$

.

$\sin\alpha>0$，$\therefore$ $2\sin\alpha=\cos\alpha$，又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\therefore 5\sin^2\alpha=1$，$\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，又

$\sin\alpha>0$，$\therefore \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故选B．

【点睛】本题为三角函数中二倍角公式、同角三角函数基本关系式的考查，中等难度，判断正余弦正负，运算准确性是关键，题目不难，需细心，解决三角函数问题，研究角的范围后得出三角函数值的正负，很关键，切记不能凭感觉．

11.设F为双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$>0，$b$>0）的右焦点，$O$为坐标原点，以$OF$为直径的圆与圆$x^2+y^2=a^2$交于$P$、$Q$两点．若$|PQ|=|OF|$，则$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】

准确画图，由图形对称性得出P点坐标，代入圆的方程得到c与a关系，可求双曲线的离心率.

【详解】设 PQ 与 x 轴交于点 A，由对称性可知 $PQ \perp x$ 轴，

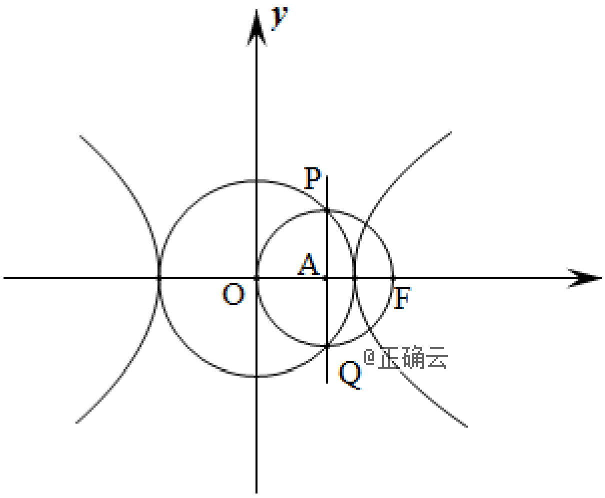
又$\because |PQ| = |OF| = c$，$\therefore |PA| = \dfrac{c}{2}$，$\therefore PA$ 为以 OF 为直径的圆的半径，

$\therefore A$ 为圆心 $|OA| = \dfrac{c}{2}$.

$\therefore P\left(\dfrac{c}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$，又 P 点在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上，

$\therefore \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{c^2}{4} = a^2$，即 $\dfrac{c^2}{2} = a^2$，$\therefore \quad e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = 2$.

$\therefore e = \sqrt{2}$，故选A.



【点睛】本题为圆锥曲线离心率的求解，难度适中，审题时注意半径还是直径，优先考虑几何法，避免代数法从头至尾，运算繁琐，准确率大大降低，双曲线离心率问题是圆锥曲线中的重点问题，需强化练习，才能在解决此类问题时事半功倍，信手拈来.

12.设函数 $f(x)$ 的定义域为$\mathbf{R}$，满足 $f(x+1) = 2f(x)$，且当 $x \in (0,1]$ 时，$f(x) = x(x-1)$.若对任意 $x \in (-\infty, m]$，都有 $f(x) \geq -\dfrac{8}{9}$，则m的取值范围是

A. $\left(-\infty, \dfrac{9}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty, \dfrac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】

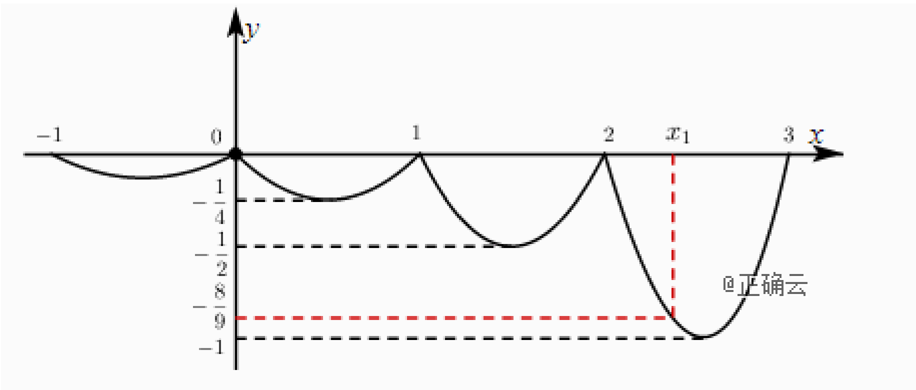
本题为选择压轴题，考查函数平移伸缩，恒成立问题，需准确求出函数每一段解析式，分析出临界点位置，精准运算得到解决．

【详解】$\because x\in(0,1]$时，$f(x)=x(x-1)$，$f(x+1)=2f(x)$，$\therefore f(x)=2f(x-1)$，即$f(x)$右移1个单位，图像变为原来的2倍．

如图所示：当$2<x\le 3$时，$f(x)=4f(x-2)=4(x-2)(x-3)$，令$4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$，整理得：$9x^2-45x+56=0$，

$\therefore (3x-7)(3x-8)=0$，$\therefore x_1=\frac{7}{3},x_2=\frac{8}{3}$（舍），$\therefore$ $x\in(-\infty,m]$时，$f(x)\ge -\frac{8}{9}$成立，

即$m\le\frac{7}{3}$，$\therefore m\in\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$，故选B．



【点睛】易错警示：图像解析式求解过程容易求反，画错示意图，画成向左侧扩大到2倍，导致题目出错，需加深对抽象函数表达式的理解，平时应加强这方面练习，提高抽象概括、数学建模能力．

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13.我国高铁发展迅速，技术先进．经统计，在经停某站的高铁列车中，有10个车次的正点率为0.97，有20个车次的正点率为0.98，有10个车次的正点率为0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为___________．

【答案】0．98.

【解析】

【分析】

本题考查通过统计数据进行概率的估计，采取估算法，利用概率思想解题．

【详解】由题意得，经停该高铁站的列车正点数约为

$10\times0.97+20\times0.98+10\times0.99=39.2$，其中高铁个数为10+20+10=40，所以该站所有高铁平均正点率约为$\dfrac{39.2}{40}=0.98$．

【点睛】本题考点为概率统计，渗透了数据处理和数学运算素养．侧重统计数据的概率估算，难度不大．易忽视概率的估算值不是精确值而失误，根据分类抽样的统计数据，估算出正点列车数量与列车总数的比值．

14.已知$f(x)$是奇函数，且当$x<0$时，$f(x)=-\mathrm{e}^{ax}$.若$f(\ln 2)=8$，则$a=$__________.

【答案】-3

【解析】

【分析】

本题主要考查函数奇偶性，对数的计算．渗透了数学运算、直观想象素养．使用转化思想得出答案．

【详解】因为$f(x)$是奇函数，且当$x<0$时，$f(x)=-e^{-ax}$．

又因为$\ln 2\in(0,1)$，$f(\ln 2)=8$，

所以$-e^{-a\ln 2}=-8$，两边取以e为底的对数得$-a\ln 2=3\ln 2$，所以$-a=3$，即3π．

【点睛】本题主要考查函数奇偶性，对数的计算．

15.$\vee ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$b=6,a=2c,B=\dfrac{\pi}{3}$，则$\vee ABC$的面积为__________.

【答案】$6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

本题首先应用余弦定理，建立关于c的方程，应用a,c的关系、三角形面积公式计算求解，本题属于常见题目，难度不大，注重了基础知识、基本方法、数学式子的变形及运算求

解能力的考查．

【详解】由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以$(2c)^2+c^2-2\times 2c\times c\times\frac{1}{2}=6^2$，

即$c^2=12$

解得$c=2\sqrt{3},c=-2\sqrt{3}$（舍去）

所以$a=2c=4\sqrt{3}$，

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

【点睛】本题涉及正数开平方运算，易错点往往是余弦定理应用有误或是开方导致错误．解答此类问题，关键是在明确方法的基础上，准确记忆公式，细心计算．

16.中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一．印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”（图1）.半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体.半正多面体体现了数学的对称美．图2是一个棱数为48的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为1．则该半正多面体共有________个面，其棱长为_________．

图1

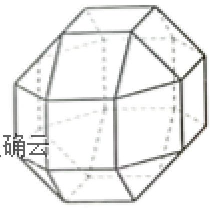


图2

【答案】 (1). 共26个面． (2). 棱长为$\sqrt{2}-1$．

【解析】

【分析】

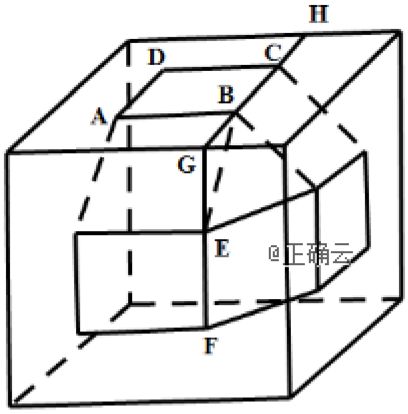
第一问可按题目数出来，第二问需在正方体中简单还原出物体位置，利用对称性，平面几何解决．

【详解】由图可知第一层与第三层各有9个面，计18个面，第二层共有8个面，所以该半正多面体共有$18+8=26$个面．

如图，设该半正多面体的棱长为x，则$AB=BE=x$，延长BC与FE交于点G，延长BC交正方体棱于H，由半正多面体对称性可知，ΔBGE为等腰直角三角形，

$\therefore BG=GE=CH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$, $\therefore$ $GH=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+x=(\sqrt{2}+1)x=1$，

$\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，即该半正多面体棱长为$\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.



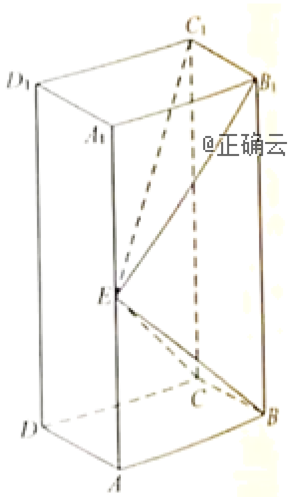
【点睛】本题立意新颖，空间想象能力要求高，物体位置还原是关键，遇到新题别慌乱，题目其实很简单，稳中求胜是关键．立体几何平面化，无论多难都不怕，强大空间想象能力，快速还原图形.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分。

17.

如图，长方体$ABCD–A_1B_1C_1D_1$的底面$ABCD$是正方形，点E在棱AA_1上，$BE\perp EC_1$.



（1）证明：$BE\perp$平面EB_1C_1；

（2）若$AE=A_1E$，求二面角$B–EC–C_1$的正弦值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】

（1）利用长方体的性质，可以知道 $B_1C_1\perp$ 侧面 A_1B_1BA，利用线面垂直的性质可以证明出 $B_1C_1\perp EB$，这样可以利用线面垂直的判定定理，证明出 $BE\perp$ 平面 EB_1C_1；

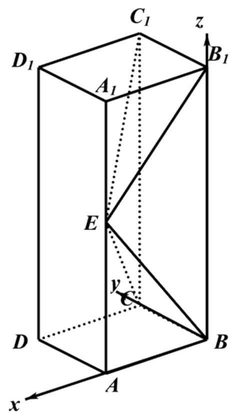
（2）以点 B 坐标原点，以 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}$ 分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，

设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，$B_1B=b$，求出相应点的坐标，利用 $BE\perp EC_1$，可以求出 a,b 之间的关系，分别求出平面 EBC、平面 ECC_1 的法向量，利用空间向量的数量积公式求出二面角 $B-EC-C_1$ 的余弦值的绝对值，最后利用同角的三角函数关系，求出二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值.

【详解】证明（1）因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，所以 $B_1C_1\perp$ 侧面 A_1B_1BA，而 $BE\subset$ 平面 A_1B_1BA，所以 $BE\perp B_1C_1$

又 $BE\perp EC_1$，$B_1C_1\cap EC_1=C_1$，$B_1C_1,EC_1\subset$ 平面 EB_1C_1，因此 $BE\perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）以点 B 坐标原点，以 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}$ 分别为 x,y,z 轴，建立如下图所示的空间直角坐标系，



$B(0,0,0),C(0,a,0),C_1(0,a,b),E(a,0,\dfrac{b}{2})$，

因为 $BE\perp EC_1$，所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0\Rightarrow(a,0,\frac{b}{2})\cdot(-a,a,\frac{b}{2})=0\Rightarrow-a^2+\frac{b^2}{4}=0\Rightarrow b=2a$

，

所以 $E(a,0,a)$，$\overrightarrow{EC}=(-a,a,-a),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2a),\overrightarrow{BE}=(a,0,a)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 BEC 的法向量，

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ax_1+az_1=0,\\ -ax_1+ay_1-az_1=0.\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=(1,0,-1)$，

设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 ECC_1 的法向量，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2az_2=0,\\ -ax_2+ay_2-az_2=0.\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(1,1,0)$，

二面角 $B-EC-C_1$ 的余弦值的绝对值为 $\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}$，

所以二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题考查了利用线面垂直的性质定理证明线线垂直，考查了利用空间向量求二角角的余弦值，以及同角的三角函数关系，考查了数学运算能力.

18.

11分制乒乓球比赛，每赢一球得1分，当某局打成10:10平后，每球交换发球权，先多得2分的一方获胜，该局比赛结束.甲、乙两位同学进行单打比赛，假设甲发球时甲得分的概率为0.5，乙发球时甲得分的概率为0.4，各球的结果相互独立.在某局双方10:10平后，甲先发球，两人又打了X个球该局比赛结束.

（1）求P（X=2）；

（2）求事件“X=4且甲获胜”的概率.

【答案】（1）0.5；（2）0.1

【解析】

【分析】

(1)本题首先可以通过题意推导出 $P\left(X=2\right)$ 所包含的事件为“甲连赢两球或乙连赢两球”

，然后计算出每种事件的概率并求和即可得出结果；

(2)本题首先可以通过题意推导出 $P\left(X=4\right)$ 所包含的事件为“前两球甲乙各得1分，后两

球均为甲得分”，然后计算出每种事件的概率并求和即可得出结果。

【详解】(1)由题意可知，$P(X=2)$所包含的事件为“甲连赢两球或乙连赢两球”

所以$P(X=2)=0.5\times 0.4+0.5\times 0.6=0.5$

(2)由题意可知，$P(X=4)$包含的事件为“前两球甲乙各得1分，后两球均为甲得分”

所以$P(X=4)=0.5\times 0.6\times 0.5\times 0.4+0.5\times 0.4\times 0.5\times 0.4=0.1$

【点睛】本题考查古典概型的相关性质，能否通过题意得出$P(X=2)$以及$P(X=4)$所包含的事件是解决本题的关键，考查推理能力，考查学生从题目中获取所需信息的能力，是中档题。

19.

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

（1）证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

（2）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

【答案】（1）见解析；（2）$a_n=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$，$b_n=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$。

【解析】

【分析】

(1)可通过题意中的$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$以及$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$对两式进行相加和相减即可推导出数列$\{a_n+b_n\}$是等比数列以及数列$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

(2)可通过(1)中的结果推导出数列$\{a_n+b_n\}$以及数列$\{a_n-b_n\}$的通项公式，然后利用数列$\{a_n+b_n\}$以及数列$\{a_n-b_n\}$的通项公式即可得出结果。

【详解】(1)由题意可知$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$，$a_1+b_1=1$，$a_1-b_1=1$，

所以$4a_{n+1}+4b_{n+1}=3a_n-b_n+4+3b_n-a_n-4=2a_n+2b_n$，即$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，

所以数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1、公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，$a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

因为$4a_{n+1}-4b_{n+1}=3a_n-b_n+4-(3b_n-a_n-4)=4a_n-4b_n+8$，

所以$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$，数列$\{a_n-b_n\}$是首项$1$、公差为$2$的等差数列，

$a_n-b_n=2n-1$。

(2)由(1)可知，$a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$a_n-b_n=2n-1$，

所以$a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+b_n+a_n-b_n\right)=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$，$b_n=\frac{1}{2}\left[a_n+b_n-\left(a_n-b_n\right)\right]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$。

【点睛】本题考查了数列的相关性质，主要考查了等差数列以及等比数列的相关证明，证明数列是等差数列或者等比数列一定要结合等差数列或者等比数列的定义，考查推理能力，考查化归与转化思想，是中档题。

20.

已知函数$f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论$f(x)$的单调性，并证明$f(x)$有且仅有两个零点；

（2）设x_0是$f(x)$的一个零点，证明曲线$y=\ln x$在点$A(x_0$，$\ln x_0)$处的切线也是曲线$y=\mathrm{e}^x$的切线.

【答案】（1）函数$f(x)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$上是单调增函数，证明见解析；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】

（1）对函数$f(x)$求导，结合定义域，判断函数的单调性；

（2）先求出曲线$y=\ln x$在$\mathrm{A}(x_0,\ln x_0)$处的切线l，然后求出当曲线$y=e^x$切线的斜率与l斜率相等时，证明曲线$y=e^x$切线l'在纵轴上的截距与l在纵轴的截距相等即可.

【详解】（1）函数$f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，

$f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$，因为函数$f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以$f'(x)>0$，因此函数$f(x)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$上是单调增函数；

当$x\in(0,1)$，时，$x\to 0,y\to-\infty$，而$f(\dfrac{1}{e})=\ln\dfrac{1}{e}-\dfrac{\dfrac{1}{e}+1}{\dfrac{1}{e}-1}=\dfrac{2}{e-1}>0$，显然当$x\in(0,1)$

，函数 $f(x)$ 有零点，而函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递增，故当 $x\in(0,1)$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一的零点；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(e)=\ln e-\dfrac{e+1}{e-1}=\dfrac{-2}{e-1}<0, f(e^2)=\ln e^2-\dfrac{e^2+1}{e^2-1}=\dfrac{e^2-3}{e^2-1}>0$，

因为 $f(e)\cdot f(e^2)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 (e,e^2) 必有一零点，而函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调递增，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一的零点

综上所述，函数 $f(x)$ 的定义域 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 内有2个零点；

（2）因为 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，所以 $f(x_0)=\ln x_0-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=0\Rightarrow \ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$

$y=\ln x\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在 $\mathrm{A}(x_0,\ln x_0)$ 处的切线 l 的斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}$，故曲线

$y=\ln x$ 在 $\mathrm{A}(x_0,\ln x_0)$ 处的切线 l 的方程为：$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$ 而 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，所以

l 的方程为 $y=\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{2}{x_0-1}$，它在纵轴的截距为 $\dfrac{2}{x_0-1}$.

设曲线 $y=e^x$ 的切点为 $B(x_1,e^{x_1})$，过切点为 $B(x_1,e^{x_1})$ 切线 l'，$y=e^x\Rightarrow y'=e^x$，所以在 $B(x_1,e^{x_1})$ 处的切线 l' 的斜率为 e^{x_1}，因此切线 l' 的方程为 $y=e^{x_1}x+e^{x_1}(1-x_1)$，

当切线 l' 的斜率 $k_1=e^{x_1}$ 等于直线 l 的斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}$ 时，即 $e^{x_1}=\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow x_1=-(\ln x_0)$，

切线 l' 在纵轴的截距为 $b_1=e^{x_1}(1-x_1)=e^{-\ln x_0}(1+\ln x_0)=\dfrac{1}{x_0}(1+\ln x_0)$，而 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$

，所以 $b_1=\dfrac{1}{x_0}(1+\dfrac{x_0+1}{x_0-1})=\dfrac{2}{x_0-1}$，直线 l,l' 的斜率相等，在纵轴上的截距也相等，因此直线 l,l' 重合，故曲线 $y=\ln x$ 在 $\mathrm{A}(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

【点睛】本题考查了利用导数求已知函数的单调性、考查了曲线的切线方程，考查了数学运算能力.

21.

已知点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点$M(x,y)$满足直线AM与BM的斜率之积为$-\frac{1}{2}$.记M的轨迹为曲线C.

（1）求C的方程，并说明C是什么曲线；

（2）过坐标原点的直线交C于P，Q两点，点P在第一象限，$PE\perp x$轴，垂足为E，连结QE并延长交C于点G.

（i）证明：$\triangle PQG$ 是直角三角形；

（ii）求$\triangle PQG$ 面积的最大值.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分．

【答案】（1）详见解析（2）详见解析

【解析】

【分析】

（1）分别求出直线AM与BM的斜率，由已知直线AM与BM的斜率之积为$-\frac{1}{2}$，可以得到等式，化简可以求出曲线C的方程，注意直线AM与BM有斜率的条件；

（2）（i）设出直线 PQ 的方程，与椭圆方程联立，求出P，Q两点的坐标，进而求出点 E 的坐标，求出直线 QE 的方程，与椭圆方程联立，利用根与系数关系求出 G 的坐标，再求出直线 PG 的斜率，计算 $k_{PQ}k_{PG}$ 的值，就可以证明出$\triangle PQG$ 是直角三角形；

（ii）由（i）可知 P,Q,G 三点坐标，$\triangle PQG$ 是直角三角形，求出 PQ,PG 的长，利用面积公式求出$\triangle PQG$ 的面积，利用导数求出面积的最大值.

【详解】（1）直线 AM 的斜率为$\frac{y}{x+2}(x\neq -2)$，直线 BM 的斜率为$\frac{y}{x-2}(x\neq 2)$，由题意可知：$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2+2y^2=4,(x\neq\pm 2)$，所以曲线$C$是以坐标原点为中心，焦点在 x 轴上，不包括左右两顶点的椭圆，其方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\left(x\neq\pm 2\right)$；

（2）（i）设直线 PQ 的方程为 $y=kx$,由题意可知 $k>0$,直线 PQ 的方程与椭圆方程

$x^2+2y^2=4$联立,即$\begin{cases}y=kx,\\x^2+2y^2=4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}},\\y=\dfrac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}.\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{-2}{\sqrt{2k^2+1}},\\y=\dfrac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}}.\end{cases}$,点$P$在第一象限

，所以$P(\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}),Q(\dfrac{-2}{\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}})$，因此点$E$的坐标为

$(\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}},0)$

直线QE的斜率为$k_{QE}=\dfrac{k}{2}$，可得直线QE方程：$y=\dfrac{k}{2}x-\dfrac{k}{\sqrt{2k^2+1}}$，与椭圆方程联立，

$\begin{cases}y=\dfrac{k}{2}x-\dfrac{k}{\sqrt{2k^2+1}},\\x^2+2y^2=4.\end{cases}$，消去$y$得，$(2+k^2)x^2-\dfrac{4k^2x}{\sqrt{2k^2+1}}-\dfrac{12k^2+8}{2k^2+1}=0$（*），设点

$G(x_1,y_1)$，显然Q点的横坐标$\dfrac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}$和$x_1$是方程（*）的解

所以有$x_1\cdot\dfrac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}=\dfrac{-\dfrac{12k^2+8}{2k^2+1}}{2+k^2}\Rightarrow x_1=\dfrac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}$，代入直线$QE$方程中，得

$y_1=\dfrac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}$，所以点$G$的坐标为$(\dfrac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}})$，

直线PG的斜率为; $k_{PG}=\dfrac{\dfrac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}-\dfrac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}}{\dfrac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}}}=\dfrac{2k^3-2k(k^2+2)}{6k^2+4-2(k^2+2)}=-\dfrac{1}{k}$,

因为$k_{PQ}k_{PG}=k\cdot(-\dfrac{1}{k})=-1,$所以$PQ\perp PG$，因此$\triangle PQG$是直角三角形;

（ii）由（i）可知：$P(\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}),Q(\dfrac{-2}{\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}})$，

G的坐标为$(\dfrac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}},\dfrac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}})$，

$$PQ=\sqrt{(\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}-\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}})^2+(\frac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}}-\frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}})^2}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}},$$

$$PG=\sqrt{(\frac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}-\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}})^2+(\frac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}-\frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}})^2}=\frac{4k\sqrt{k^2+1}}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}$$

,

$$S_{\Delta PQG}=\frac{1}{2}\times\frac{4k\sqrt{k^2+1}}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}\cdot\frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}}=\frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2}$$

$S^{'}=\dfrac{-8(k+1)(k-1)(2k^4+3k^2+2)}{(2k^4+5k^2+2)^2}$,因为$k>0$，所以当$0<k<1$时，$S^{'}>0$，函数$S(k)$单调递增，当$k>1$时，$S^{'}<0$，函数$S(k)$单调递减，因此当$k=1$时，函数$S(k)$有最大值，最大值为$S(1)=\dfrac{16}{9}$.

【点睛】本题考查了求椭圆的标准方程，以及利用直线与椭圆的位置关系，判断三角形形状以及三角形面积最大值问题，考查了数学运算能力，考查了利用导数求函数最大值问题.

22.[选修4-4：坐标系与参数方程]

在极坐标系中，O为极点，点$M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$在曲线$C:\rho=4\sin\theta$上，直线$l$过点$A(4,0)$且与$OM$垂直，垂足为$P$.

（1）当$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$时，求ρ_0及l的极坐标方程；

（2）当M在C上运动且P在线段OM上时，求P点轨迹的极坐标方程.

【答案】（1）$\rho_0=2\sqrt{3}$，l的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=2$；（2）$\rho=4\cos\theta(\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$

【解析】

【分析】

（1）先由题意，将$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$代入$\rho=4sin\theta$即可求出ρ_0；根据题意求出直线l的直角坐标方程，再化为极坐标方程即可；

（2）先由题意得到P点轨迹的直角坐标方程，再化为极坐标方程即可，要注意变量的取值范围.

【详解】（1）因为点$M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$在曲线$C:\rho=4\sin\theta$上，

所以$\rho_0=4\sin\theta_0=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$；

即$M(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$，所以$k_{OM}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

因为直线l过点$A(4,0)$且与OM垂直，

所以直线l的直角坐标方程为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$，即$x+\sqrt{3}y-4=0$；

因此，其极坐标方程为$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta=4$，即$l$的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=2$

；

（2）设$P(x,y)$，则$k_{OP}=\frac{y}{x}$，$k_{AP}=\frac{y}{x-4}$，

由题意，$OP\perp AP$，所以$k_{OP}k_{AP}=-1$，故$\frac{y^2}{x^2-4x}=-1$，整理得$x^2+y^2-4x=0$，

因为P在线段OM上，M在C上运动，所以$0\le x\le 2,2\le y\le 4$，

所以，P点轨迹的极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，即$\rho=4\cos\theta(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$.

【点睛】本题主要考查极坐标方程与直角坐标方程的互化，熟记公式即可，属于常考题型.

23.[选修4-5：不等式选讲]

已知$f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)<0$的解集；

（2）若$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)<0$，求a的取值范围.

【答案】（1）$(-\infty,1)$；（2）$[1,+\infty)$

【解析】

【分析】

（1）根据$a=1$，将原不等式化为$|x-1|x+|x-2|(x-1)<0$，分别讨论$x<1$，$1\le x<2$，$x\ge 2$三种情况，即可求出结果；

（2）分别讨论$a\geqslant 1$和$a<1$两种情况，即可得出结果.

【详解】（1）当$a=1$时，原不等式可化为$|x-1|x+|x-2|(x-1)<0$；

当$x<1$时，原不等式可化为$(1-x)x+(2-x)(x-1)<0$，即$(x-1)^2>0$，显然成立，

此时解集为$(-\infty,1)$；

当$1\le x<2$时，原不等式可化为$(x-1)x+(2-x)(x-1)<0$，解得$x<1$，此时解集为空集

；

当$x\ge 2$时，原不等式可化为$(x-1)x+(x-2)(x-1)<0$，即$(x-1)^2<0$，显然不成立；

此时解集为空集；

综上，原不等式的解集为$(-\infty,1)$；

（2）当$a\geqslant 1$时，因为$x\in(-\infty,1)$，所以由$f(x)<0$可得$(a-x)x+(2-x)(x-a)<0$，

即$(x-a)(x-1)>0$，显然恒成立；所以$a\geqslant 1$满足题意；

当$a<1$时，$f(x)=\begin{cases}2(x-a),a\le x<1\\2(x-a)(1-x),x<a\end{cases}$，因为$a\le x<1$时，

$f(x)<0$显然不能成立，所以$a<1$不满足题意；

综上，a的取值范围是$[1,+\infty)$.

【点睛】本题主要考查含绝对值的不等式，熟记分类讨论的方法求解即可，属于常考题型.