2007年山东高考文科数学真题及答案

第Ⅰ卷（共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，选择一个符合题目要求的选项.

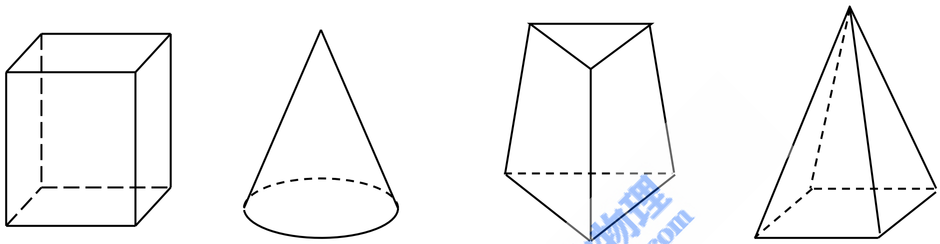
1．复数 $\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的实部是（　　）

A．-2　　B．2　　C．3　　D．4

2．已知集合 $M=\{-1,1\}$，$N=\left\{x\,|\,\dfrac{1}{2}<2^{x+1}<4，x\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{0\}$　　C．$\{-1\}$　　D．$\{-1,0\}$

3．下列几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是（　　）



①正方形　　②圆锥　　③三棱台　　④正四棱锥

A．①②　　B．①③　　C．①④　　D．②④

4．要得到函数 $y=\sin x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象（　　）

A．向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位　　B．向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

C．向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　　D．向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位

5．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1，n)$，$\boldsymbol{b}=(-1，n)$，若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $|\boldsymbol{a}|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

6．给出下列三个等式：$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$．下列函数中不满足其中任何一个等式的是（　　）

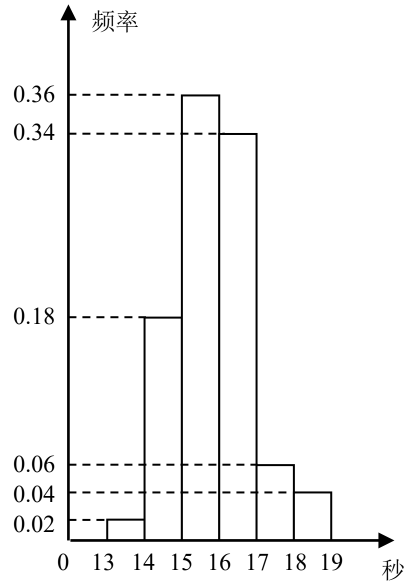
A．$f(x)=3^x$　　B．$f(x)=\sin x$　　C．$f(x)=\log_2 x$ D．$f(x)=\tan x$

7．命题“对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$”的否定是（　　）

A．不存在 $x\in R$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$　　B．存在 $x\in R$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$

C．存在$x\in R$，$x^3-x^2+1>0$　　　　D．对任意的$x\in R$，$x^3-x^2+1>0$

8．某班 50 名学生在一次百米测试中，成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间，将测试结果按如下方式分成六组：每一组，成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒；第二组，成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒；……第六组，成绩大于等于 18 秒且小于等于 19 秒．右图是按上述分组方法得到的频率分布直方图，设成绩小于 17 秒的学生人数占全班人数的百分比为x，成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为y，则从频率分布直方图中可以分析出x和y分别为（　　）



A．$0.9,35$　　B．$0.9,45$

C．$0.1,35$　　D．$0.1,45$

9．设O是坐标原点，F是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，A是抛物线上的一点，$\overrightarrow{FA}$与x轴正向的夹角为60°，则$|\overrightarrow{OA}|$为（　　）

A．$\dfrac{21p}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{21}p}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{13}}{6}p$　　D．$\dfrac{13}{36}p$

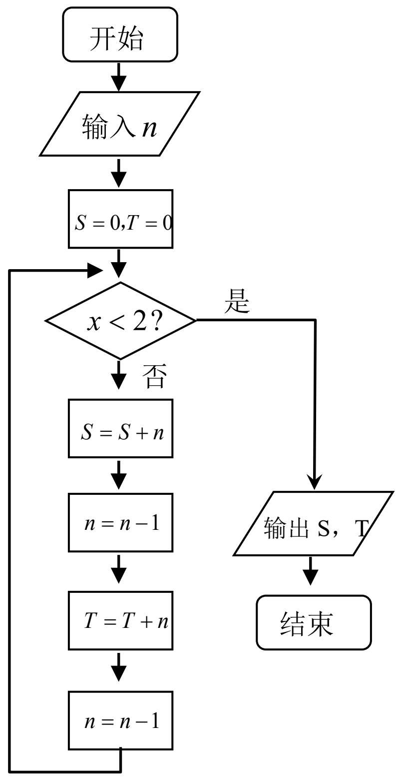
10．阅读右边的程序框，若输入的n是 100，则输出的变量S和T的值依次是（　　）

A．2550，2500

B．2550，2550

C．2500，2500

D．2500，2550



11．设函数$y=x^3$与$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$的图象的交点为$(x_0,\ y_0)$，则$x_0$所在的区间是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

12．设集合$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，分别从集合A和B中随机取一个数a和b，确定平面上的一个点$P(a,\ b)$，记“点$P(a,\ b)$落在直线$x+y=n$上”为事件$C_n(2\leqslant n\leqslant 5,\ n\in\mathbf{N})$，若事件$C_n$的概率最大，则$n$的所有可能值为（　　）

A．3　　　B．4　　　C．2 和 5　　　D．3 和 4

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，答案须填在题中横线上．

13．设函数 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=x^{-1}$，$f_3(x)=x^3$，则 $f_1(f_2(f_3(2007)))=$________．

14．函数 $y=a^{1-x}(a>0，a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A，若点 A 在直线 $mx+ny-1=0(mn>0)$ 上，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为________．

15．当 $x\in(1,2)$ 时，不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立，则 m 的取值范围是_________．

16．与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是________．

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分．解答写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\tan C=3\sqrt{7}$．

（1）求 $\cos C$；

（2）若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{5}{2}$，且 $a+b=9$，求 c．

18．（本小题满分 12 分）

设 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $S_3=7$，且 $a_1+3,3a_2，a_3+4$ 构成等差数列．

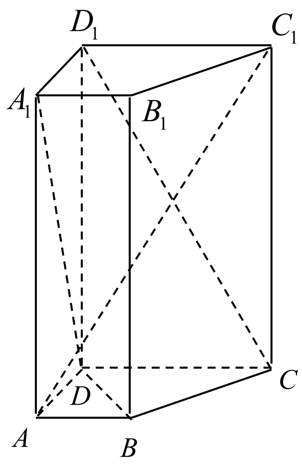
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的等差数列．

（2）令 $b_n=\ln a_{3n+1}，n=1,2,\cdots$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T．

19．（本小题满分 12 分）

本公司计划 2008 年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 分钟的广告，广告总费用不超过 9 万元，甲、乙电视台的广告收费标准分别为 500 元/分钟和 200 元/分钟，规定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告，能给公司事来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元．问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元？

20．（本小题满分 12 分）



如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$，$AD\perp DC，AB\parallel DC$．

（1）求证：$D_1C\perp AC_1$；

（2）设 E 是 DC 上一点，试确定 E 的位置，使 $D_1E\parallel$ 平面

A_1BD，并说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=ax^2+b\ln x$，其中 $ab\neq 0$.

证明：当 $ab>0$ 时，函数 $f(x)$ 没有极值点；当 $ab<0$ 时，函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点，并求出极值.

22.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3，最小值为 1.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A，B 两点（A，B 不是左右顶点），且以 AB 为直径的图过椭圆 C 的右顶点．求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

答案

一、选择题

1．B　2．C　3．D　4．A　5．C　6．B

7．C　8．A　9．B　10．A　11．B　12．D

二、填空题

13．$\dfrac{1}{2007}$　14．1　15．$m\leqslant -5$　16．$(x-2)^2+(y-2)^2=2$

三、解答题

17．解：（1）$\because \tan C=3\sqrt{7},\therefore \dfrac{\sin C}{\cos C}=3\sqrt{7}$

又$\because \sin^2 C+\cos^2 C=1$

解得$\cos C=\pm\dfrac{1}{8}$.

$\because \tan C>0$，$\therefore C$是锐角.

$\therefore \cos C=\dfrac{1}{8}$.

（2）$\because \overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}=\dfrac{5}{2}$,

$\therefore ab\cos C=\dfrac{5}{2}$,

$\therefore ab=20$.

又$\because a+b=9$

$\therefore a^2+2ab+b^2=81$.

$\therefore a^2+b^2=41$.

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=36$.

$\therefore c=6$.

18．解：（1）由已知得:$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=7, \\ \dfrac{(a_1+3)+(a_3+4)}{2}=3a_2. \end{cases}$

解得$a_2=2$.

设数列$\{a_n\}$的公比为q，由$a_2=2$，可得$a_1=\dfrac{2}{q}$，$a_3=2q$.

又$S_3=7$，可知$\dfrac{2}{q}+2+2q=7$，

即$2q^2-5q+2=0$，

解得 $q_1=2$，$q_2=\dfrac{1}{2}$.

由题意得 $q>1, \therefore q=2$.

$\therefore a_1=1$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2^{n-1}$.

（2）由于 $b_n=\ln a_{3n+1}$，$n=1,2,\cdots$，

由（1）得 $a_{3n+1}=2^{3n}$

$\therefore b_n=\ln 2^{3n}=3n\ln 2$

又 $b_{n+1}-b_n=3\ln 2_n$

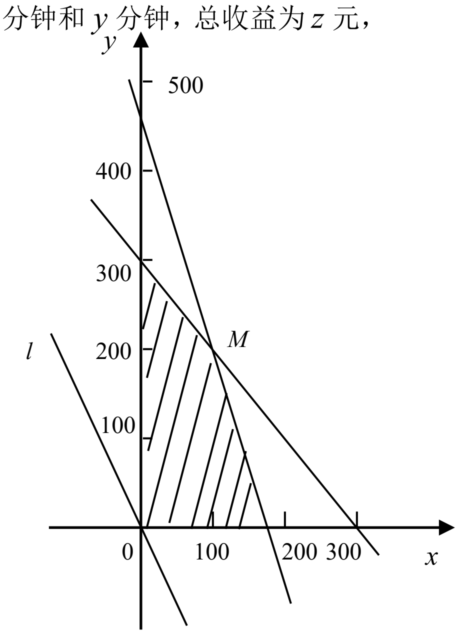
$\therefore \{b_n\}$ 是等差数列.

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$=\frac{n(b_1+b_n)}{2}$$
$$=\frac{n(3\ln 2+3\ln 2)}{2}$$
$$=\frac{3n(n+1)}{2}\ln 2.$$

故 $T_n=\dfrac{3n(n+1)}{2}\ln 2$.

19．解: 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 x 分钟和 y 分钟，总收益为 z 元，



由题意得 $\begin{cases} x+y\leqslant 300, \\ 500x+200y\leqslant 90000, \\ x\geqslant 0，y\geqslant 0. \end{cases}$

目标函数为 $z=3000x+2000y$.

二元一次不等式组等价于 $\begin{cases} x+y\leqslant 300, \\ 5x+2y\leqslant 900, \\ x\geqslant 0，y\geqslant 0. \end{cases}$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即可行域.

如图：

作直线 $l:3000x+2000y=0$，

即$3x+2y=0$.

平移直线l，从图中可知，当直线l过M点时，目标函数取得最大值.

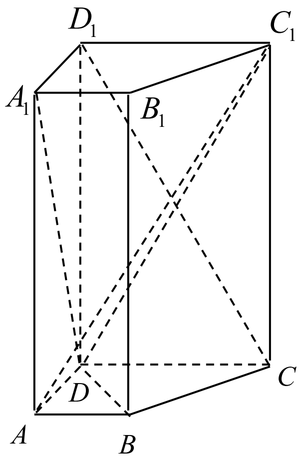
联立$\begin{cases}x+y=300,\\5x+2y=900.\end{cases}$解得$x=100$，$y=200$.

$\therefore$点M的坐标为$(100,200)$.

$\therefore z_{\max}=3000x+2000y=700000$（元）

答:该公司在甲电视台做100分钟广告，在乙电视台做200分钟广告，公司的收益最大，最大收益是70万元.

20.（1）证明：在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，



连结C_1D，

$\because DC=DD_1$，

$\therefore$四边形DCC_1D_1是正方形.

$\therefore DC_1\perp D_1C$.

又$AD\perp DC$，$AD\perp DD_1$，$DC\perp DD_1=D$，

$\therefore AD\perp$平面DCC_1D_1，

$D_1C\subset$平面DCC_1D_1，

$\therefore AD\perp D_1C$.

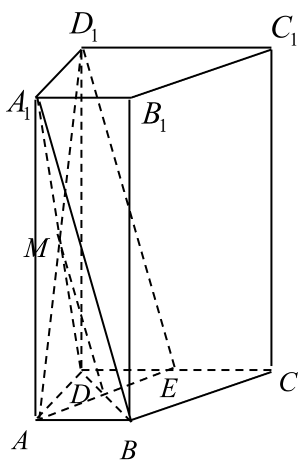
$\because AD$，$DC_1\subset$平面ADC_1，

且$AD\perp DC=D$，

$\therefore D_1C\perp$平面ADC_1，

又$AC_1\subset$平面ADC_1，

$\therefore D_1C\perp AC_1$.



（2）连结AD_1，连结AE，

设$AD_1\cap A_1D=M$，

$BD\cap AE=N$，连结MN，

$\because$ 平面 $AD_1E\cap$ 平面 $A_1BD=MN$，

要使 $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD，

须使 $MN\parallel D_1E$，

又 M 是 AD_1 的中点.

$\therefore N$ 是 AE 的中点.
又易知 $\triangle ABN\cong\triangle EDN$，
$\therefore AB=DE$.
即 E 是 DC 的中点.

综上所述，当 E 是 DC 的中点时，可使 $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD.

21．证明：因为 $f(x)=ax^2+b\ln x$，$ab\neq 0$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=2ax+\frac{b}{x}=\frac{2ax^2+b}{x}.$$

当 $ab>0$ 时，如果 $a>0$，$b>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

如果 $a<0$，$b<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $ab>0$，函数 $f(x)$ 没有极值点.

当 $ab<0$ 时，

$$f'(x)=\frac{2a\left(x+\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)}{x}$$

令 $f'(x)=0$，

将 $x_1=-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\notin(0,+\infty)$（舍去），$x_2=\sqrt{-\frac{b}{2a}}(0,+\infty)$，

当 $a>0$，$b<0$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$\left(0,\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	$\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

从上表可看出，

函数$f(x)$有且只有一个极小值点，极小值为$f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=-\frac{b}{2}\left[1-\ln\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

当$a<0$，$b>0$时，$f'(x)$，$f(x)$随x的变化情况如下表：

x	$\left(0,\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	$\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘

从上表可看出，

函数$f(x)$有且只有一个极大值点，极大值为$f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=-\frac{b}{2}\left[1-\ln\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

综上所述，

当$ab>0$时，函数$f(x)$没有极值点；

当$ab<0$时，

若$a>0$，$b<0$时，函数$f(x)$有且只有一个极小值点，极小值为$-\frac{b}{2}\left[1-\ln\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

若$a<0$，$b>0$时，函数$f(x)$有且只有一个极大值点，极大值为$-\frac{b}{2}\left[1-\ln\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

22．解：（1）由题意设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由已知得：$a+c=3$，$a-c=1$，

$a=2$，$c=1$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$

$\therefore$椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

联立$\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1. \end{cases}$

得　$(3+4k^2)x^2+8mkx+4(m^2-3)=0$，则

$$\begin{cases} \Delta=64m^2k^2-16(3+4k^2)(m^2-3)>0，\text{即}3+4k^2-m^2>0, \\ x_1+x_2=-\dfrac{8mk}{3+4k^2}, \\ x_1x_2=\dfrac{4(m^2-3)}{3+4k^2}. \end{cases}$$

又$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}$.

因为以AB为直径的圆过椭圆的右顶点$D(2,0)$，

$\therefore k_{AD}k_{BD}=-1$，即$\dfrac{y_1}{x_1-2}\bullet\dfrac{y_2}{x_2-2}=-1$.

$\therefore y_1y_2+x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=0$.

$\therefore \dfrac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}+\dfrac{4(m^2-3)}{3+4k^2}+\dfrac{15mk}{3+4k^2}+4=0$.

$\therefore 7m^2+16mk+4k^2=0$.

解得：$m_1=-2k$，$m_2=-\dfrac{2k}{7}$，且均满足$3+4k^2-m^2>0$.

当$m_1=-2k$时，l的方程$y=k(x-2)$，直线过点$(2,0)$，与已知矛盾；

当$m_2=-\dfrac{2k}{7}$时，l的方程为$y=k\left(x-\dfrac{2}{7}\right)$，直线过定点$\left(\dfrac{2}{7},0\right)$.

所以，直线l过定点，定点坐标为$\left(\frac{2}{7},0\right)$.