2002年北京高考理科数学真题及答案

参考公式：三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

正棱台、圆台的侧面积公式 $S_{台体}=\frac{1}{2}(c'+c)l$ 其中 c'、c 分别表示上、下底面周长，l 表示斜高或母线长

球体的体积公式　$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$ 其中 R 表示球的半径.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2．在平面直角坐标系中，已知两点 $A(\cos80^0,\sin80^0),B(\cos20^0,\sin20^0)$，则 $|AB|$ 的值是（　　）

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) 1

3．下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上为减函数的是（　　）

(A) $y=\cos^2x$　　(B) $y=2|\sin x|$　　(C) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$　　(D) $y=-\cot x$

4．64个直径都为 $\frac{a}{4}$ 的球，记它们的体积之和为 $V_甲$，表面积之和为 $S_甲$；一个直径为a的球，记其体积为 $V_乙$，表面积为 $S_乙$，则（　　）

(A) $V_甲>V_乙$，且 $S_甲>S_乙$　(B) $V_甲<V_乙$，且 $S_甲<S_乙$　(C) $V_甲=V_乙$，且 $S_甲>S_乙$　(D) $V_甲=V_乙$，且 $S_甲=S_乙$

5．已知某曲线的参数方程是 $\begin{cases}x=\sec\varphi\\ y=\tan\varphi\end{cases}$,($\varphi$为参数)，若以原点为极点，x轴的正半轴为极轴，长度单位不便变，建立极坐标系，则该曲线的极坐标方程是（　　）

(A) $\rho=1$　　(B) $\rho\cos2\theta=1$　　(C) $\rho^2\sin2\theta=1$

6．给定四条曲线：①$x^2+y^2=\frac{5}{2}$，②$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，③$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，④$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．其中与直线 $x+y-\sqrt{5}=0$ 仅有一个交点的曲线是（　　）

(A) ①②③　　(B) ②③④　　(C) ①②④　　(D) ①③④

7．已知 z_1，$z_2\in C$，且 $|z_1|=1$．若 $z_1+z_2=2$，则 $|z_1-z_2|$ 的最大值是（　　）

(A) 6　　(B) 5　　(C) 4　　(D) 3

8．若 $\dfrac{\cot\theta-1}{2\cot\theta+1}=1$，则 $\dfrac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ 的值为（　　）

(A) 3　　(B) −3　　(C) −2　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

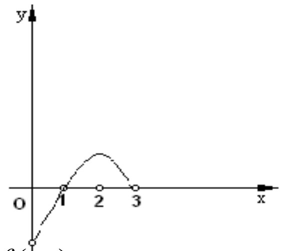
9．12 名学生分别到三个不同的路口进行车流量的调查，若每个路口 4 人，则不同的分配方案共有（　）

(A) $C_{12}^4C_8^4C_4^4$ 种　(B) $3C_{12}^4C_8^4C_4^4$ 种　(C) $C_{12}^4C_8^4P_3^3$ 种　(D) $C_{12}^4C_8^4C_4^4/P_3^3$ 种

10．设命题："直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直"；命题乙："直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体"，那么，甲是乙的（　）

(A) 充分必要条件　(B) 充分非必要条件　(C) 必要非充分条件　(D) 即非充分又非必要条件

11．已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数，当 $0<x<3$ 时，$f(x)$ 的图象如图所示，那么不等式 $f(x)\cos x<0$ 的解集是（　）



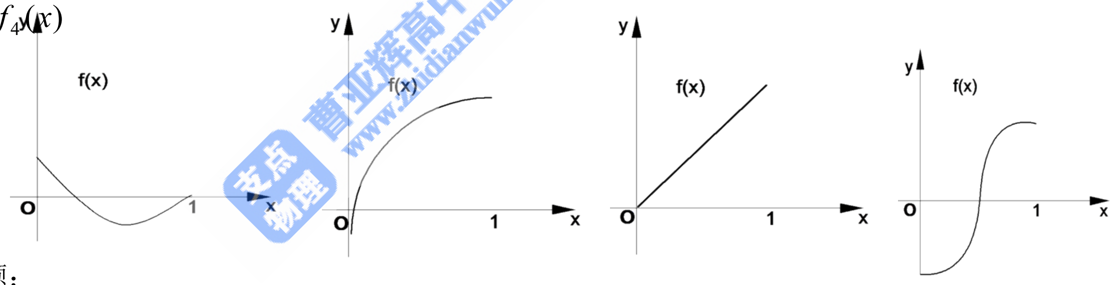
(A) $(-3,-\dfrac{\pi}{2})\cup(0,1)\cup(\dfrac{\pi}{2},3)$　(B) $(-\dfrac{\pi}{2},-1)\cup(0,1)\cup(\dfrac{\pi}{2},3)$

(C) $(-3,-1)\cup(0,1)\cup(1,3)$　(D) $(-3,-\dfrac{\pi}{2})\cup(0,1)\cup(1,3)$

12．如图所示，$f_i(x)(i=1,2,3,4)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的四个函数，其中满足性质："对 $[0,1]$ 中任意的 x_1 和 x_2，任意 $\lambda\in[0,1]$，$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立"的只有（　）

(A) $f_1(x),f_2(x)$　(B) $f_2(x)$　(C) $f_2(x),f_3(x)$

(D) $f_4(x)$



二．填空题：

13． $\arcsin(-\dfrac{2}{5}),\arccos(-\dfrac{3}{4}),\arctan(-\dfrac{5}{4})$ 从大到小的顺序是__________.

14．等差数列 $\{a_n\}$，中，$a_1=2$，公差不为零，且 a_1,a_3,a_n 恰好是某等比数列的前三项，那么该等比数列公比的值等于________.

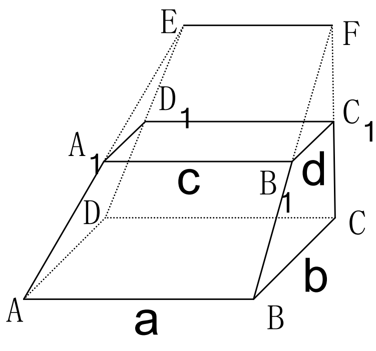
15．关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断：①可能是 0^0 的角；②可能是锐角；③可能是直角；④可能是直角；⑤可能是 180^0 的角．其中正确的序号是________．（注：把你认为正确判断的序号都填上）．

16．已知 P 是直线 $3x+4y+8=0$ 上的动点，PA，PB 是圆 $x^2+y^2-2x-2y+8=0$ 的两条切线，A，B 是切点，C 是圆心，那么四边形 $PACB$ 面积的最小值为____________.

三．解答题：解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤．

17．解不等式 $\left|\sqrt{2x-1}-x\right|<2$

18．如图，在多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，上、下底面平行且均为矩形，相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等，侧棱延长后相交与 E,F 两点，上、下底面矩形的长、宽分别为 c,d 与 a,b，且 $a>c,b>d$，两底面间的距离为 h．



（1）求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小；

（2）证明：$EF // 面ABCD$；

（3）在估侧该多面体的体积时，经常运用近似公式 $V_{估} = S_{中截面} \cdot h$ 来计算，已知它的体积公式是 $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{h}}{6}(S_{上底面} + 4S_{中底面} + S_{下底面})$ 试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系，并加以证明.

（注：与两个底面平行，且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.）

19．数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定：$x_1 = a > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), n \in N$.

（1）证明：对 $n \geq 2$，总有 $x_n \geq \sqrt{a}$；

（2）证明：对 $n \geq 2$，总有 $x_n \geq x_{n+1}$；

（3）若数列 $\{a_n\}$ 的极限存在，且大于零，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 的值.

20．在研究并行计算的基本算法时，有以下简单模型问题：

用计算机求 n 个不同的数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的和 $\sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$，计算开始前，$n$ 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中，每台机器存一个数. 计算开始后，在一个单位时间内，每台机器至多到一台其他机器中读数据，并与自己原有数据相加得到新的数据，各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间，即可完成计算，方法可用下表表示：

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结　　果	被读机号	结　　果	被读机号	结　　果
1	V_1	2	$V_1 + V_2$				
2	V_2	1	$V_2 + V_1$				

（1）当 $n = 4$ 时，至少需要多少个单位时间可完成计算？把你设计的方法填入下表

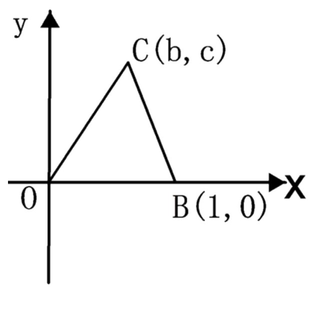
机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结　　果	被读机号	结　　果	被读机号	结　　果
1	V_1						
2	V_2						
3	V_3						
4	V_4						

（2）当 $n = 128$ 时，要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^{n} v_i$，至少需要多少个单位时间可完成计算？（结论不要求证明）

21．已知 $O(0,0)$，$B(1,0)$，$C(b,c)$ 是 ΔOBC 的三个顶点.

（1）写出 ΔOBC 的重心 G，外心 F，垂心 H 的坐标，并证明 G, F, H 三点共线；

（2）当直线 FH 与 OB 平行时，求顶点 C 的轨迹.



22．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为零的函数，且对于任意的 $a,b\in R$ 都满足：$f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$．

（1）求 $f(0),f(1)$ 的值；

（2）判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

（3）若 $f(2)=2$，$u_n=\dfrac{f(2^{-n})}{n}(n\in N)$，求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n

参考解答

说明：

一. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四. 只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一. 选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分。

1. B	2. D	3. B	4. C	5. D
6. D	7. C	8. A	9. A	10. C
11. B	12. A			

二. 填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分。

13. $\arctan(-\frac{5}{4})<\arcsin(-\frac{2}{5})<\arccos(-\frac{3}{4})$

14. 4

15. （1）（2）（3）（4）（5）

16. $2\sqrt{2}$

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 本小题主要考查不等式的解法等基本知识，考查运算能力和逻辑思维能力，满分 12 分。

解：原不等式 $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x-1}-x<2\\ \sqrt{2x-1}-x>-2\end{cases}$

因为 $\sqrt{2x-1}-x<2\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}<x+2\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\geq 0\\ x+2\geq 0\\ 2x-1<(x+2)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ x^2+2x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$$

又 $\sqrt{2x-1}-x>-2\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\geq 0\\ x-2\geq 0\\ 2x-1>(x-2)^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1\geq 0\\ x-2<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x^2-6x+5<0\end{cases}$ 或 $\frac{1}{2}\leq x<2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ 1<x<5\end{cases}$ 或 $\frac{1}{2}\leq x<2$

$\Leftrightarrow 2\leq x<5$ 或 $\frac{1}{2}\leq x<2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq x<5$

所以，原不等式组 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \le x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x < 5$

因此，原不等式的解集为 $\{x|-\dfrac{1}{2} \le x < 5\}$

18. 本小题主要考查直线、平面的位置关系，考查不等式的基本知识，考查空间想象能力和逻辑推理能力，满分 12 分。

（1）解：过 B_1C_1 作底面 ABCD 的垂直平面，交底面于 PQ，过 B_1 作 $B_1G \perp PQ$，垂足为 G

$\because$ 平面 ABCD//平面 $A_1B_1C_1D_1$，$\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$

$\therefore AB \perp PQ$，$AB \perp B_1P$

$\therefore \angle B_1PG$ 为所求二面角的平面角

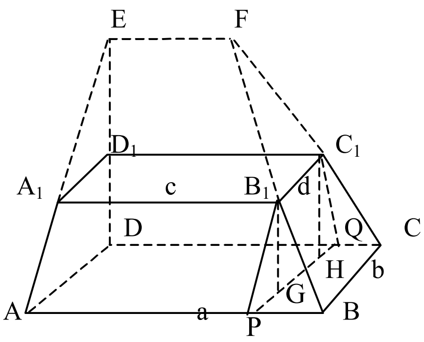
过 C_1 作 $C_1H \perp PQ$，垂足为 H，由于相对侧面与底面所成二面角的大小相等，故四边形 B_1PQC_1 为等腰梯形

$\therefore PG = \dfrac{1}{2}(b-d)$

又 $B_1G = h$

$\therefore tg\angle B_1PG = \dfrac{2h}{b-d}(b>d)$

$\therefore \angle B_1PG = arctg\dfrac{2h}{b-d}$，即所求二面角的大小为 $arctg\dfrac{2h}{b-d}$



（2）证明：$\because$ AB、CD 是矩形 ABCD 的一组对边，有 AB//CD

又 CD 是面 ABCD 与面 CDEF 的交线

$\therefore$ AB//面 CDEF

$\because$ EF 是面 ABFE 与面 CDEF 的交线

$\therefore$ AB//EF

$\because$ AB 是平面 ABCD 内的一条直线，EF 在平面 ABCD 外

$\therefore$ EF//面 ABCD

（3）$V_{估} < V$

证明：$\because a > c$，$b > d$

$\therefore V - V_{估} = \dfrac{h}{6}(cd + ab + 4 \times \dfrac{a+c}{2} \times \dfrac{b+d}{2}) - \dfrac{a+c}{2} \times \dfrac{b+d}{2}h$

$= \dfrac{h}{12}[2cd + 2ab + 2(a+c)(b+d) - 3(a+c)(b+d)] = \dfrac{h}{12}(a-c)(b-d) > 0$

$\therefore V_{估} < V$

19. 本小题主要考查数列、数列极限、不等式等基本知识，考查逻辑思维能力，满分 12 分。

（1）证明：由 $x_1 = a > 0$ 及 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$ 可归纳证明 $x_n > 0$（没有证明过程不扣分）

从而有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\times\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}(n\in N)$

所以，当 $n\geq 2$ 时，$x_n\geq\sqrt{a}$ 成立

（2）证法一：当 $n\geq 2$ 时，因为 $x_n\geq\sqrt{a}>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$

所以 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n=\frac{1}{2}\times\frac{a-x_n{}^2}{x_n}\leq 0$

故当 $n\geq 2$ 时，$x_n\geq x_{n-1}$ 成立

证法二：当 $n\geq 2$ 时，因为 $x_n\geq\sqrt{a}>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$

所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})}{x_n}=\frac{x_n^2+a}{2x_n^2}\leq\frac{x_n^2+x_n^2}{2x_n^2}=1$

故当 $n\geq 2$ 时，$x_n\geq x_{n+1}$ 成立

（3）解：记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=A$，且 $A>0$

由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{2}(\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n})$

即 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})$

由 $A>0$，解得 $A=\sqrt{a}$

故

20．本小题主要考查运用数学思想方法，分析和解决科学问题的能力，满分 12 分

（1）解：当 $n=4$ 时，只用 2 个单位时间即可完成计算

方法之一如下：

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2	3	$v_1+v_2+v_3+v_4$		
2	v_2	1	v_2+v_1	4	$v_2+v_1+v_4+v_3$		
3	v_3	4	v_3+v_4	1	$v_3+v_4+v_1+v_2$		
4	v_4	3	v_4+v_3	2	$v_4+v_3+v_2+v_1$		

（2）解：当 $n=128=2^7$ 时，至少需要 7 个单位时间才能完成计算

21．本小题主要考查直线与椭圆等基本知识，考查分析问题和解决问题的能力，满分 13

分

（1）解：由ΔOBC三顶点坐标O（0，0），B（1，0），C（b，c）（$c\neq 0$），可求得

重心G（$\frac{b+1}{3}$，$\frac{c}{3}$），外心F（$\frac{1}{2}$，$\frac{b^2+c^2-b}{2c}$），垂心H（b，$\frac{b-b^2}{c}$）

当$b=\frac{1}{2}$时，G、F、H三点的横坐标均为$\frac{1}{2}$，故三点共线

当$b\neq\frac{1}{2}$时，设G、H所在直线的斜率为k_{GH}，F、G所在直线的斜率为k_{FG}

因为
$$k_{GH}=\frac{\frac{c}{3}-\frac{b-b^2}{c}}{\frac{b+1}{3}-b}=\frac{c^2+3b^2-3b}{c(1-2b)}$$

$$k_{FG}=\frac{\frac{c}{3}-\frac{b^2+c^2-b}{2c}}{\frac{b+1}{3}-\frac{1}{2}}=\frac{c^2+3b^2-3b}{c(1-2b)}$$

所以$k_{GH}=k_{FG}$，G、F、H三点共线

综上可得，G、F、H三点共线

（2）解：若FH//OB，由$k_{FH}=\frac{c^2+3b^2-3b}{c(1-2b)}=0$，得

$3(b^2-b)+c^2=0$（$c\neq 0$，$b\neq\frac{1}{2}$）

配方得$3(b-\frac{1}{2})^2+c^2=\frac{3}{4}$，即$\frac{(b-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{c^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$

即$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$（$x\neq\frac{1}{2}$，$y\neq 0$）

所以，顶点C的轨迹是中心在（$\frac{1}{2}$，0），长半轴长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，短半轴长为$\frac{1}{2}$，且短轴在x轴上的椭圆，除去（0，0），（1，0），（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），（$\frac{1}{2}$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$）四点

22. 本小题主要考查函数与数列等基本知识，考查分析问题和解决问题的能力，满分13分

（1）解：$f(0)=f(0\cdot 0)=0\times f(0)+0\times f(0)=0$

因为$f(1)=f(1\cdot 1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)$

所以$f(1)=0$

（2）$f(x)$是奇函数

证明：因为$f(1)=f[(-1)^2]=-f(-1)-f(-1)=0$

所以 $f(-1)=0$

$f(-x)=f(-1\cdot x)=-f(x)+xf(-1)=-f(x)$

因此，$f(x)$ 为奇函数

（3）解法一：

由 $f(a^2)=af(a)+af(a)=2af(a)$

$f(a^3)=a^2f(a)+af(a^2)=3a^2f(a)$

猜测 $f(a^n)=na^{n-1}f(a)$

下面用数学归纳法证明：

1. 当 $n=1$ 时，$f(a^1)=1\times a^0\times f(a)$，公式成立
2. 假设当 $n=k$ 时，$f(a^k)=ka^{k-1}f(a)$ 成立

那么当 $n=k+1$ 时

$f(a^{k-1})=a^kf(a)+af(a^k)=a^kf(a)+ka^kf(a)=(k+1)a^kf(a)$，公式仍成立

由上两步可知，对任意 $n\in N$，$f(a^n)=na^{n-1}f(a)$ 成立

所以 $u_n=\dfrac{f(2^{-n})}{n}=(\dfrac{1}{2})^{n-1}\times f(\dfrac{1}{2})$

因为 $f(2)=2$，$f(1)=f(2\cdot\dfrac{1}{2})=2f(\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{2}f(2)=0$

所以 $f(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{4}f(2)=-\dfrac{1}{2}$

$u_n=(-\dfrac{1}{2})\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}$ （$n\in N$）

因此 $S_n=\dfrac{-\dfrac{1}{2}[1-(\dfrac{1}{2})^n]}{1-\dfrac{1}{2}}=(\dfrac{1}{2})^n-1$ （$n\in N$）

解法二：当 $ab\neq 0$ 时，$\dfrac{f(a\cdot b)}{ab}=\dfrac{f(b)}{b}+\dfrac{f(a)}{a}$

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $g(a\cdot b)=g(a)+g(b)$

故 $g(a^n)=ng(a)$

所以 $f(a^n)=a^n\cdot g(a^n)=na^ng(a)=na^{n-1}f(a)$

所以 $u_n=\dfrac{f(2^{-n})}{n}=(\dfrac{1}{2})^{n-1}\cdot f(\dfrac{1}{2})$

（以下同解法一）