

2008年陕西省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）（2008•陕西） $\sin 330^\circ$ 等于（ ）

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【考点】运用诱导公式化简求值.

【分析】根据 $330^\circ=360^\circ-30^\circ$ ，由诱导公式一可得答案.

【解答】解： $\because \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

故选B.

【点评】本题主要考查根据三角函数的诱导公式进行化简求值的问题. 属基础题. 对于三角函数的诱导公式一定要强化记忆.

2. （5分）（2008•四川）已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A=\{1, 3\}$ ， $B=\{3, 4, 5\}$ ，则集合 $C_U(A \cap B)$ = （ ）

- A. $\{3\}$ B. $\{4, 5\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 4, 5\}$

【考点】交、并、补集的混合运算.

【分析】根据交集的含义求 $A \cap B$ ，再根据补集的含义求解.

【解答】解： $A=\{1, 3\}$ ， $B=\{3, 4, 5\} \Rightarrow A \cap B=\{3\}$;

所以 $C_U(A \cap B)=\{1, 2, 4, 5\}$,

故选D

【点评】本题考查集合的基本运算，较简单.

3. （5分）（2008•陕西）某林场有树苗30000棵，其中松树苗4000棵. 为调查树苗的生长情况，采用分层抽样的方法抽取一个容量为150的样本，则样本中松树苗的数量为（ ）

- A. 30 B. 25 C. 20 D. 15

【考点】分层抽样方法.

【分析】先计算抽取比例，再计算松树苗抽取的棵数即可.

【解答】解：设样本中松树苗的数量为 x ，则 $\frac{150}{30000} = \frac{x}{4000} \Rightarrow x=20$

故选C

【点评】本题考查分层抽样，属基本题.

4. （5分）（2008•陕西）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1+a_2=4$ ， $a_7+a_8=28$ ，则该数列前10项和 S_{10} 等于（ ）

- A. 64 B. 100 C. 110 D. 120

【考点】等差数列的前 n 项和.

【专题】计算题.

【分析】利用等差数列的通项公式，结合已知条件列出关于 a_1 ， d 的方程组，求出 a_1 和 d ，代入等差数列的前 n 项和公式求解即可.

【解答】解：设公差为 d ,

则由已知得
$$\begin{cases} 2a_1+d=4 \\ 2a_1+13d=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow S_{10}=10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2 = 100,$$

故选B.

【点评】本题考查了等差数列的通项公式和前 n 项和公式，熟记公式是解题的关键，同时注意方程思想的应用.

5. (5分) (2008•陕西) 直线 $\sqrt{3}x - y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ 相切, 则实数 m 等于 ()

- A. $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$ C. $-3\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ D. $-3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

【考点】直线与圆的位置关系.

【分析】圆心到直线的距离等于半径, 求解即可.

【解答】解: 圆的方程 $(x - 1)^2 + y^2 = 3$, 圆心 $(1, 0)$ 到直线的距离等于半径

$$\Rightarrow \frac{|\sqrt{3} + m|}{\sqrt{3 + 1}} = \sqrt{3} \Rightarrow |\sqrt{3} + m| = 2\sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3} \text{ 或者 } m = -3\sqrt{3}$$

故选C.

【点评】本题考查直线和圆的位置关系, 是基础题.

6. (5分) (2008•陕西) “ $a=1$ ”是“对任意的正数 x , $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断.

【分析】把 $a=1$ 代入 $2x + \frac{a}{x} \geq 1$, 不等式成立, 当 $a=2$ 时 $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ 也成立, 可推出其关系.

【解答】解: $a=1 \Rightarrow 2x + \frac{a}{x} = 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \times \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2} > 1$, 显然 $a=2$ 也能推出, 所以“ $a=1$ ”是“对任意的正数 x , $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ”的充分不必要条件.

故选A.

【点评】充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件; 二者有明显区别, 对任意的正数 x , $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ 成立, 可得 $a \geq \frac{1}{2}$, 而不仅仅是 $a=1$

7. (5分) (2008•陕西) 已知函数 $f(x) = 2^{x+3}$, $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 若 $mn=16$ ($m, n \in \mathbb{R}^+$), 则 $f^{-1}(m) + f^{-1}(n)$ 的值为 ()

- A. 10 B. 4 C. 1 D. -2

【考点】反函数.

【专题】计算题.

【分析】求出函数 $f(x) = 2^{x+3}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$, 化简 $f^{-1}(m) + f^{-1}(n)$ 的表达式, 代入 $mn=16$ 即可求值.

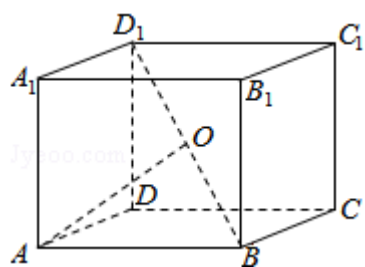
【解答】解: $f(x) = 2^{x+3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x - 3$;

于是 $f^{-1}(m) + f^{-1}(n) = \log_2 m - 3 + \log_2 n - 3 = \log_2 mn - 6 = \log_2 16 - 6 = 4 - 6 = -2$

故选D.

【点评】本题考查反函数的求法, 函数值的求解, 是基础题.

8. (5分) (2008•陕西) 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的各顶点都在半径为1的球面上, 其中 $AB: AD: AA_1 = 1: \sqrt{3}: 2$, 则两A, B点的球面距离为 ()



- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

【考点】球面距离及相关计算.

【专题】计算题.

【分析】设出AD, 然后通过球的直径求出AD, 解出 $\angle AOB$, 可求A, B两点的球面距离.

【解答】解: 设 $AD=a$, 则 $AB=2a$, $AA_1=\sqrt{3}a \Rightarrow$ 球的直径 $2R=\sqrt{a^2+4a^2+3a^2}=2\sqrt{2}a$

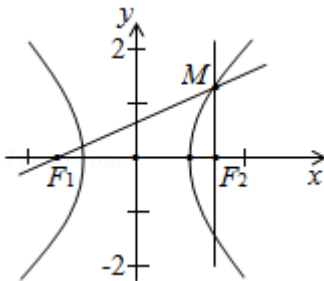
即 $R=\sqrt{2}a$, 在 $\triangle AOB$ 中, $OA=OB=R=\sqrt{2}a$, $AB=2a$,

$\Rightarrow OA^2+OB^2=AB^2 \Rightarrow \angle AOB=90^\circ$ 从而A, B点的球面距离为 $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

故选C.

【点评】本题考查球面距离及其他计算, 实际上是球的内接长方体问题, 考查学生发现问题解决问题的能力, 是基础题.

9. (5分) (2008•陕西) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 过 F_1 作倾斜角为 30° 的直线交双曲线右支于M点, 若 MF_2 垂直于x轴, 则双曲线的离心率为 ()



- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】双曲线的简单性质.

【专题】计算题.

【分析】先在 $Rt\triangle MF_1F_2$ 中, 利用 $\angle MF_1F_2$ 和 F_1F_2 求得 MF_1 和 MF_2 , 进而根据双曲线的定义求得a, 最后根据a和c求得离心率.

【解答】解: 如图在 $Rt\triangle MF_1F_2$ 中, $\angle MF_1F_2=30^\circ$, $F_1F_2=2c$

$$\therefore MF_1 = \frac{2c}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{3}\sqrt{3}c, \quad MF_2 = 2c \cdot \tan 30^\circ = \frac{2}{3}\sqrt{3}c$$

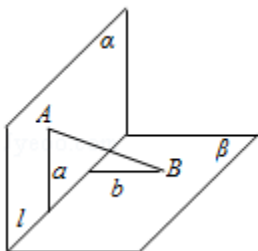
$$\therefore 2a = MF_1 - MF_2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}c - \frac{2}{3}\sqrt{3}c = \frac{2}{3}\sqrt{3}c$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$$

故选B.

【点评】本题主要考查了双曲线的简单性质, 属基础题.

10. (5分) (2008•陕西) 如图, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, A、B到l的距离分别是a和b. AB与 α 、 β 所成的角分别是 θ 和 ϕ , AB在 α 、 β 内的射影分别是m和n. 若 $a>b$, 则 ()



- A. $\theta > \phi, m > n$ B. $\theta > \phi, m < n$ C. $\theta < \phi, m < n$ D. $\theta < \phi, m > n$

【考点】平面与平面垂直的性质；三垂线定理.

【专题】计算题.

【分析】在图象中作出射影，在直角三角形中利用勾股定理与三角函数的定义建立相关等式，运算即可.

【解答】解：由题意可得

$$\begin{cases} AB^2 = a^2 + n^2 = b^2 + m^2 \\ a > b \\ \tan \phi = \frac{a}{n} \\ \tan \theta = \frac{b}{m} \end{cases},$$

即有 $\begin{cases} m > n \\ \theta < \phi \end{cases}$,

故选D.

【点评】本题考查对直二面角的认识程度，以及正确识图的能力、借且图象进行推理的能力.

11. (5分) (2008•陕西) 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $f(1) = 2$, 则 $f(-3)$ 等于

()

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

【考点】函数的值.

【专题】压轴题.

【分析】根据关系式 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, 令 $x=y=0$ 求出 $f(0)$, 再令 $x=y=1$, 求出 $f(2)$, 同样的道理求出 $f(3)$, 最终求出 $f(-3)$ 的值.

【解答】解：令 $x=y=0 \Rightarrow f(0) = 0$, 令 $x=y=1 \Rightarrow f(2) = 2f(1) + 2 = 6$;

令 $x=2, y=1 \Rightarrow f(3) = f(2) + f(1) + 4 = 12$,

再令 $x=3, y=-3$ 得 $0 = f(3-3) = f(3) + f(-3) - 18 \Rightarrow f(-3) = 18 - f(3) = 6$

故选C.

【点评】本题主要考查已知函数的关系式求函数值的问题. 这里经常取一些特殊点代入, 要注意特殊点的选取技巧.

12. (5分) (2008•陕西) 为提高信息在传输中的抗干扰能力, 通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息. 设定原信息为 $a_0a_1a_2$, $a_i \in \{0, 1\}$ ($i=0, 1, 2$), 传输信息为 $h_0a_0a_1a_2h_1$, 其中 $h_0 = a_0 \oplus a_1$, $h_1 = h_0 \oplus a_2$, \oplus 运算规则为: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$, 例如原信息为111, 则传输信息为01111. 传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错, 则下列接收信息一定有错误的是 ()

- A. 11010 B. 01100 C. 10111 D. 00011

【考点】抽象函数及其应用.

【专题】压轴题.

【分析】首先理解 \oplus 的运算规则, 然后各选项依次分析即可.

【解答】解：A选项原信息为101, 则 $h_0 = a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus 0 = 1$, $h_1 = h_0 \oplus a_2 = 1 \oplus 1 = 0$, 所以传输信息为11010, A选项正确;

B选项原信息为110, 则 $h_0=a_0\oplus a_1=1\oplus 1=0$, $h_1=h_0\oplus a_2=0\oplus 0=0$, 所以传输信息为01100, B选项正确;
 C选项原信息为011, 则 $h_0=a_0\oplus a_1=0\oplus 1=1$, $h_1=h_0\oplus a_2=1\oplus 1=0$, 所以传输信息为10110, C选项错误;
 D选项原信息为001, 则 $h_0=a_0\oplus a_1=0\oplus 0=0$, $h_1=h_0\oplus a_2=0\oplus 1=1$, 所以传输信息为00011, D选项正确;
 故选C.

【点评】 本题考查对新规则的阅读理解能力.

二、填空题 (共4小题, 每小题4分, 满分16分)

13. (4分) (2008•陕西) $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c, 若 $c=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $B=120^\circ$, 则 $a=\sqrt{2}$.

【考点】 正弦定理.

【专题】 计算题.

【分析】 由正弦定理求得 $\sin C$ 的值, 进而求得C, 进而求得A推断 $a=c$, 答案可得.

【解答】 解: 由正弦定理 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2}$,
 $\therefore C=30^\circ \Rightarrow A=30^\circ \Rightarrow a=c=\sqrt{2}$

故答案为 $\sqrt{2}$

【点评】 本题主要考查了正弦定理得应用. 属基础题.

14. (4分) (2008•陕西) $(1 - \frac{2}{x})^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为

84. (用数字作答)

【考点】 二项式系数的性质.

【专题】 计算题.

【分析】 利用二项展开式的通项个数求出第 $r+1$ 项, 令 x 的指数为 -2 , 求出系数.

【解答】 解: $T_{r+1} = C_7^r (-\frac{2}{x})^{7-r} = (-2)^{7-r} C_7^r \frac{1}{x^{7-r}}$,

令 $7-r=2 \Rightarrow r=5$,

因此展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为 $(-2)^{7-5} C_7^5 = 84$,

故答案为84.

【点评】 本题考查利用二项展开式的通项个数解决展开式的特定项问题.

15. (4分) (2008•陕西) 关于平面向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , 有下列三个命题:

① 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$.

② 若 $\vec{a} = (1, k)$, $\vec{b} = (-2, 6)$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $k = -3$.

③ 非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 \vec{a} 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 60° .

其中真命题的序号为②. (写出所有真命题的序号)

【考点】 命题的真假判断与应用.

【专题】 压轴题; 数形结合.

【分析】 ① 向量不满足约分运算, 但满足分配律, 由此我们利用向量的运算性质, 可判断平面向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 的关系;

②中，由 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，我们根据两个向量平行，坐标交叉相乘差为0的原则，可以构造一个关于k的方程，解方程即可求出k值；

③中，若 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，我们利用向量加减法的平行四边形法则，可以画出满足条件图象，利用图象易得到两个向量的夹角；

【解答】解：①若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，则 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ ，此时 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$ ，而不一定 $\vec{b} = \vec{c}$ ，①为假。

②由两向量 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要条件，知 $1 \times 6 - k \cdot (-2) = 0$ ，解得 $k = -3$ ，②为真。

③如图，在 $\triangle ABC$ 中，设 $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{AC} = \vec{b}$ ， $\vec{CB} = \vec{a} - \vec{b}$ ，

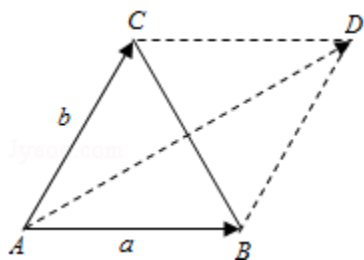
由 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，可知 $\triangle ABC$ 为等边三角形。

由平行四边形法则作出向量 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AD}$ ，

此时 \vec{a} 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 成的角为 30° 。③为假。

综上，只有②是真命题。

答案：②



【点评】 本题考查的知识点是向量的运算性质及命题的真假判断与应用，处理的关键是熟练掌握向量的运算性质，如两个向量垂直，则数量积为0，两个向量相等，坐标交叉相乘差为0等。

16. (4分) (2008•陕西) 某地奥运火炬接力传递路线共分6段，传递活动分别由6名火炬手完成。如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生，最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生，则不同的传递方案共有 96 种。(用数字作答)。

【考点】 排列、组合的实际应用。

【专题】 计算题；压轴题。

【分析】 根据题意，如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生，最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生；按第一棒是丙或甲、乙中一人，分为两类，分别计算其情况数目，结合分类计数原理，计算可得答案。

【解答】 解：分两类：第一棒是丙有 $C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot A_4^4 = 48$ ，

第一棒是甲、乙中一人有 $C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot A_4^4 = 48$

因此共有方案 $48 + 48 = 96$ 种；

故答案为96。

【点评】 本题考查排列、组合的综合应用，注意优先分析有特殊要求的元素，对于本题，注意分类的标准前后统一，要做到不重不漏。

三、解答题 (共6小题，满分70分)

17. (12分) (2008•陕西) 已知函数 $f(x) = 2\sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{4} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及最值；

(2) 令 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 判断函数 $g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

【考点】 三角函数的周期性及其求法; 正弦函数的奇偶性; 三角函数的最值.

【专题】 计算题.

【分析】 利用二倍角公式、两角和的正弦函数化简函数 $f(x) = 2\sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{4} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$, 为 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

(1) 直接利用周期公式求出周期, 求出最值.

(2) 求出 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的表达式, $g(x) = 2\cos\frac{x}{2}$. 然后判断出奇偶性即可.

【解答】 解: (1) $\because f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

当 $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -2 ;

当 $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2 .

(2) $g(x)$ 是偶函数. 理由如下:

由 (1) 知 $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$,

又 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\therefore g(x) = 2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{x}{2}.$$

$$\therefore g(-x) = 2\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\cos\frac{x}{2} = g(x),$$

\therefore 函数 $g(x)$ 是偶函数.

【点评】 本题是基础题, 考查三角函数的化简与求值, 考查三角函数的基本性质, 常考题型.

18. (12分) (2008·陕西) 一个口袋中装有大小相同的2个红球, 3个黑球和4个白球, 从口袋中一次摸出一个球, 摸出的球不再放回.

(I) 连续摸球2次, 求第一次摸出黑球, 第二次摸出白球的概率;

(II) 如果摸出红球, 则停止摸球, 求摸球次数不超过3次的概率.

【考点】 相互独立事件的概率乘法公式; 互斥事件的概率加法公式; 古典概型及其概率计算公式.

【专题】 计算题.

【分析】 (I) 本题是一个古典概型, 试验发生包含的事件是从袋中依次摸出2个球共有 A_9^2 种结果, 满足条件的事件是第一次摸出黑球、第二次摸出白球有 $A_3^1 A_4^1$ 种结果, 或者是题目按照相互独立事件同时发生的概率来理解.

(II) 摸球不超过三次, 包括第一次摸到红球, 第二次摸到红球, 第三次摸到红球, 这三个事件是互斥的, 分别写出三个事件的概率, 根据互斥事件的概率得到结果.

【解答】 解: (I) 由题意知, 本题是一个古典概型, 试验发生包含的事件是从袋中依次摸出2个球共有 A_9^2 种结果, 满足条件的事件是第一次摸出黑球、第二次摸出白球有 $A_3^1 A_4^1$ 种结果,

$$\therefore \text{所求概率 } P_1 = \frac{A_3^1 A_4^1}{A_9^2} = \frac{1}{6} \quad (\text{或 } P_1 = \frac{3}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6})$$

(II) 摸球不超过三次, 包括第一次摸到红球, 第二次摸到红球, 第三次摸到红球, 这三个事件是互斥的

$$\text{第一次摸出红球的概率为 } \frac{A_2^1}{A_9^1},$$

$$\text{第二次摸出红球的概率为 } \frac{A_7^1 A_2^1}{A_9^2},$$

$$\text{第三次摸出红球的概率为 } \frac{A_7^2 A_2^1}{A_9^3},$$

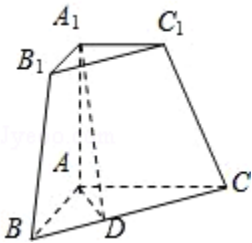
$$\text{则摸球次数不超过3次的概率为 } P_2 = \frac{A_2^1}{A_9^1} + \frac{A_7^1 A_2^1}{A_9^2} + \frac{A_7^2 A_2^1}{A_9^3} = \frac{7}{12}.$$

【点评】 本题考查互斥事件的概率, 考查相互独立事件同时发生的概率, 考查古典概型, 是一个综合题, 解题时关键在于理解题意, 同一个题目可以有不同的解法.

19. (12分) (2008·陕西) 三棱锥被平行于底面ABC的平面所截得的几何体如图所示, 截面为 $A_1B_1C_1$, $\angle BAC=90^\circ$, $A_1A \perp$ 平面ABC, $A_1A = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $A_1C_1 = 1$, $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$.

(I) 证明: 平面 $A_1AD \perp$ 平面 BCC_1B_1 ;

(II) 求二面角 $A - CC_1 - B$ 的大小.



【考点】 平面与平面垂直的判定; 二面角的平面角及求法.

【专题】 计算题; 证明题.

【分析】 (I) 欲证平面 $A_1AD \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 根据面面垂直的判定定理可知在平面 BCC_1B_1 内一直线与平面 A_1AD 垂直, 根据线面垂直的性质可知 $A_1A \perp BC$, $AD \perp BC$, 又 $A_1A \cap AD = A$, 根据线面垂直的判定定理可知 $BC \perp$ 平面 A_1AD , 而 $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 满足定理所需条件;

(II) 作 $AE \perp C_1C$ 交 C_1C 于E点, 连接BE, 由三垂线定理知 $BE \perp CC_1$, 从而 $\angle AEB$ 为二面角 $A - CC_1 - B$ 的平面角, 过 C_1 作 $C_1F \perp AC$ 交 AC 于F点, 在 $Rt\triangle BAE$ 中, 求出二面角 $A - CC_1 - B$ 的平面角即可.

【解答】 证明: (I) $\because A_1A \perp$ 平面ABC, $BC \subset$ 平面ABC,

$$\therefore A_1A \perp BC. \text{ 在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AB = \sqrt{2}, AC = 2, \therefore BC = \sqrt{6},$$

$$\because BD: DC = 1: 2, \therefore BD = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 又 } \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore \triangle DBA \sim \triangle ABC, \therefore \angle ADB = \angle BAC = 90^\circ, \text{ 即 } AD \perp BC.$$

$$\text{又 } A_1A \cap AD = A, \therefore BC \perp \text{ 平面 } A_1AD, \therefore BC \subset \text{ 平面 } BCC_1B_1, \therefore \text{ 平面 } A_1AD \perp \text{ 平面 } BCC_1B_1.$$

(II) 如图, 作 $AE \perp C_1C$ 交 C_1C 于E点, 连接BE,

由已知得 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 . $\therefore AE$ 是BE在面 ACC_1A_1 内的射影.

由三垂线定理知 $BE \perp CC_1$, $\therefore \angle AEB$ 为二面角 $A - CC_1 - B$ 的平面角.

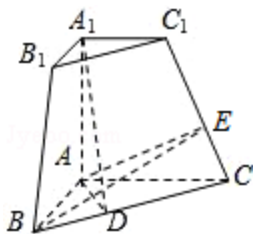
过 C_1 作 $C_1F \perp AC$ 交 AC 于 F 点,

则 $CF=AC - AF=1$, $C_1F=A_1A=\sqrt{3}$, $\therefore \angle C_1CF=60^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $AE=AC\sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle BAE$ 中, $\tan \angle AEB = \frac{AB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. $\therefore \angle AEB = \arctan \frac{\sqrt{6}}{3}$,

即二面角 $A - CC_1 - B$ 为 $\arctan \frac{\sqrt{6}}{3}$.



【点评】 本题主要考查平面与平面垂直的判定, 以及二面角的平面角的度量, 同时考查了空间想象能力, 计算能力和推理能力, 以及转化与划归的思想, 属于中档题.

20. (12分) (2008·陕西) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$, $n=1, 2, \dots$

(I) 证明: 数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 是等比数列;

(II) 求数列 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 的前 n 项和.

【考点】 数列递推式; 等比关系的确定; 数列的求和.

【专题】 计算题; 压轴题.

【分析】 (1) 化简 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$ 构造新的数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$, 进而证明数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 是等比数列.

(2) 根据(1) 求出数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 的递推公式, 得出 a_n , 进而构造数列 $\{\frac{n}{a_n}\}$, 求出数列 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 的通项公式, 进而求出前 n 项和 S_n .

【解答】 解: (I) 由已知: $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$,

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n}, \quad (2\text{分})$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right),$$

$$\text{又 } a_1 = \frac{2}{3}, \therefore \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{2}, \quad (4\text{分})$$

\therefore 数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. (6分)

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } \frac{1}{a_n} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2^n},$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n} + 1, \therefore \frac{n}{a_n} = \frac{n}{2^n} + n. \quad (8\text{分})$$

$$\text{设 } T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}, \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得: } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}, \quad (10\text{分})$$

$$\therefore T_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}. \quad \text{又 } 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (12\text{分})$$

$$\therefore \text{数列 } \left\{ \frac{n}{a_n} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和: } S_n = 2 - \frac{2+n}{2^n} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+4}{2} - \frac{2+n}{2^n}. \quad (14\text{分})$$

【点评】 此题主要考查通过构造新数列达到求解数列的通项公式和前n项和的方法.

21. (12分) (2008·陕西) 已知抛物线C: $y=2x^2$, 直线 $y=kx+2$ 交C于A, B两点, M是线段AB的中点, 过M作x轴的垂线交C于点N.

(I) 证明: 抛物线C在点N处的切线与AB平行;

(II) 是否存在实数k使 $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = 0$, 若存在, 求k的值; 若不存在, 说明理由.

【考点】 直线与圆锥曲线的综合问题; 平面向量数量积的运算.

【专题】 计算题; 压轴题.

【分析】 (1) 设A $(x_1, 2x_1^2)$, B $(x_2, 2x_2^2)$, 把直线方程代入抛物线方程消去y, 根据韦达定理求得 x_1+x_2 和 x_1x_2 的值, 进而求得N和M的横坐标, 表示点M的坐标, 设抛物线在点N处的切线l的方程将 $y=2x^2$ 代入进而求得m和k的关系, 进而可知 $l \parallel AB$.

(2) 假设存在实数k, 使 $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = 0$ 成立, 则可知 $NA \perp NB$, 又依据M是AB的中点进而可知 $|\vec{MN}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}|$.

根据(1)中的条件, 分别表示出 $|\vec{MN}|$ 和 $|\vec{AB}|$ 代入 $|\vec{MN}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}|$ 求得k.

【解答】 解: (I) 如图, 设A $(x_1, 2x_1^2)$, B $(x_2, 2x_2^2)$, 把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得 $2x^2 - kx - 2 = 0$,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$, $x_1x_2 = -1$,

$\therefore x_N = x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{4}$, \therefore N点的坐标为 $(\frac{k}{4}, \frac{k^2}{8})$.

设抛物线在点N处的切线l的方程为 $y - \frac{k^2}{8} = m(x - \frac{k}{4})$,

将 $y=2x^2$ 代入上式得 $2x^2 - mx + \frac{mk}{4} - \frac{k^2}{8} = 0$,

\therefore 直线l与抛物线C相切,

$\therefore \Delta = m^2 - 8(\frac{mk}{4} - \frac{k^2}{8}) = m^2 - 2mk + k^2 = (m - k)^2 = 0$,

$\therefore m = k$, 即 $l \parallel AB$.

(II) 假设存在实数k, 使 $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = 0$, 则 $NA \perp NB$,

又∵M是AB的中点, ∴ $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$.

$$\text{由 (I) 知 } y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(kx_1 + 2 + kx_2 + 2) = \frac{1}{2}[k(x_1 + x_2) + 4] = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2} + 4\right) = \frac{k^2}{4} + 2.$$

∵MN⊥x轴,

$$\therefore |\overline{MN}| = |y_M - y_N| = \frac{k^2}{4} + 2 - \frac{k^2}{8} = \frac{k^2 + 16}{8}.$$

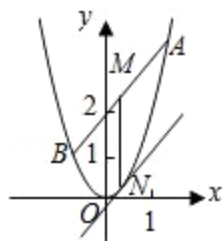
$$\text{又 } |\overline{AB}| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} =$$

$$\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 4 \times (-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{k^2+16}.$$

$$\therefore \frac{k^2+16}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{k^2+16},$$

解得 $k = \pm 2$.

即存在 $k = \pm 2$, 使 $\overline{NA} \cdot \overline{NB} = 0$.



【点评】 本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题. 考查了学生综合把握所学知识和基本的运算能力.

22. (14分) (2008·陕西) 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 1$, $g(x) = ax^2 - 2x + 1$, 其中实数 $a \neq 0$.

(I) 若 $a > 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象只有一个公共点且 $g(x)$ 存在最小值时, 记 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求 $h(a)$ 的值域;

(III) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(a, a+2)$ 内均为增函数, 求 a 的取值范围.

【考点】 利用导数研究函数的单调性.

【专题】 压轴题.

【分析】 (1) 先对函数 $f(x)$ 进行求导, 令导函数大于0可求函数的增区间, 令导函数小于0可求函数的减区间.

(2) 令 $f(x) = g(x)$ 整理可得 $x[x^2 - (a^2 - 2)] = 0$, 故 $a^2 - 2 \leq 0$ 求出 a 的范围, 再根据 $g(x)$ 存在最小值必有 $a > 0$, 最后求出 $h(a)$ 的值域即可.

(3) 分别求出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调区间, 然后令 $(a, a+2)$ 为二者单调增区间的子集即可.

【解答】 解: (I) ∵ $f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 = 3\left(x - \frac{a}{3}\right)(x + a)$, 又 $a > 0$,

∴当 $x < -a$ 或 $x > \frac{a}{3}$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $-a < x < \frac{a}{3}$ 时, $f'(x) < 0$,

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ 和 $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 内是增函数, 在 $(-a, \frac{a}{3})$ 内是减函数.

(II) 由题意知 $x^3 + ax^2 - a^2x + 1 = ax^2 - 2x + 1$,

即 $x[x^2 - (a^2 - 2)] = 0$ 恰有一根(含重根). ∴ $a^2 - 2 \leq 0$, 即 $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$,

又 $a \neq 0$, ∴ $a \in [-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$.

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 才存在最小值, ∴ $a \in (0, \sqrt{2}]$.

$$g(x) = a(x - \frac{1}{a})^{2+1} - \frac{1}{a},$$

$$\therefore h(a) = 1 - \frac{1}{a}, \quad a \in (0, \sqrt{2}].$$

$$h(a) \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\therefore h(a) \text{ 的值域为 } (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}].$$

(III) 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ 和 $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 内是增函数, $g(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 内是增函数

$$\text{由题意得} \begin{cases} a > 0 \\ a \geq \frac{a}{3} \\ a \geq \frac{1}{a} \end{cases}, \text{ 解得 } a \geq 1;$$

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a}{3})$ 和 $(-a, +\infty)$ 内是增函数, $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{a})$ 内是增函数.

$$\text{由题意得} \begin{cases} a < 0 \\ a+2 \leq \frac{a}{3} \\ a+2 \leq \frac{1}{a} \end{cases}, \text{ 解得 } a \leq -3;$$

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

【点评】 本题主要考查函数的单调性与其导函数的正负情况之间的关系, 即当导函数小于 0 时原函数单调递减, 当导函数大于 0 时原函数单调递增.