

## 2004 年陕西高考理科数学真题及答案

### 一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 设集合  $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$ ,  $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R, y \in R\}$ , 则集合  $M \cap N$  中元素的个数为( )
- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4
2. (5 分) 函数  $y = |\sin \frac{x}{2}|$  的最小正周期是( )
- A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\pi$                       C.  $2\pi$                       D.  $4\pi$
3. (5 分) 设数列  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_2 = -6$ ,  $a_8 = 6$ ,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则( )
- A.  $S_4 < S_5$               B.  $S_4 = S_5$               C.  $S_6 < S_5$               D.  $S_6 = S_5$
4. (5 分) 圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  在点  $P(1, \sqrt{3})$  处的切线方程为( )
- A.  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$     B.  $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$     C.  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$     D.  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$
5. (5 分) 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$  的定义域是( )
- A.  $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$     B.  $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$   
C.  $[-2, -1) \cup (1, 2]$               D.  $(-2, -1) \cup (1, 2)$
6. (5 分) 设复数  $z$  的幅角的主值为  $\frac{2\pi}{3}$ , 虚部为  $\sqrt{3}$ , 则  $z^2 =$ ( )
- A.  $-2 - 2\sqrt{3}i$               B.  $-2\sqrt{3} - 2i$               C.  $2 + 2\sqrt{3}i$               D.  $2\sqrt{3} + 2i$
7. (5 分) 设双曲线的焦点在  $x$  轴上, 两条渐近线为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 则双曲线的离心率  $e =$ ( )
- A. 5                      B.  $\sqrt{5}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                       D.  $\frac{5}{4}$
8. (5 分) 不等式  $1 < |x+1| < 3$  的解集为( )
- A. (0,2)                      B.  $(-2, 0) \cup (2, 4)$   
C.  $(-4, 0)$                       D.  $(-4, -2) \cup (0, 2)$
9. (5 分) 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为( )

- A.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$                       D.  $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

10. (5分) 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=3, BC=\sqrt{13}, AC=4$ , 则边  $AC$  上的高为( )

- A.  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$                       B.  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$                       C.  $\frac{3}{2}$                       D.  $3\sqrt{3}$

11. (5分) 设函数  $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & x < 1 \\ 4-\sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$  则使得  $f(x) \geq 1$  的自变量  $x$  的取值范围为( )

- A.  $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$                       B.  $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$   
 C.  $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$                       D.  $[-2, 0] \cup [1, 10]$

12. (5分) 将 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名教师, 则不同的分配方案共有( )

- A. 12 种                      B. 24 种                      C. 36 种                      D. 48 种

**二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)**

13. (4分) 用平面  $\alpha$  截半径为  $R$  的球, 如果球心到截面的距离为  $\frac{R}{2}$ , 那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为\_\_\_\_\_.

14. (4分) 函数  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. (4分) 已知函数  $y = f(x)$  是奇函数, 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 3^x - 1$ , 设  $f(x)$  的反函数是  $y = g(x)$ , 则  $g(-8) =$

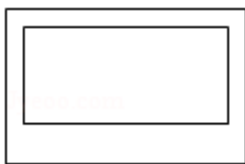
16. (4分) 设  $P$  是曲线  $y^2 = 4(x-1)$  上的一个动点, 则点  $P$  到点  $(0,1)$  的距离与点  $P$  到  $y$  轴的距离之和的最小值是 \_\_\_\_\_.

**三、解答题 (共 6 小题, 满分 74 分)**

17. (12分) 已知  $\alpha$  为锐角, 且  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 求  $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$  的值.

18. (12分) 解方程  $4^x + |1 - 2^x| = 11$ .

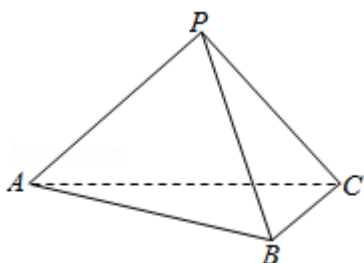
19. (12分) 某村计划建造一个室内面积为  $800m^2$  的矩形蔬菜温室. 在温室内, 沿左、右两侧与后侧内墙各保留  $1m$  宽的通道, 沿前侧内墙保留  $3m$  宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时, 蔬菜的种植面积最大? 最大种植面积是多少?



20. (12分) 三棱锥  $P-ABC$  中, 侧面  $PAC$  与底面  $ABC$  垂直,  $PA=PB=PC=3$ .

(1) 求证  $AB \perp BC$ ;

(2) 如果  $AB=BC=2\sqrt{3}$ , 求  $AC$  与侧面  $PBC$  所成角的大小.



21. (12分) 设椭圆  $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$  的两个焦点是  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$  ( $c > 0$ ), 且椭圆上存在点  $P$ , 使得直线  $PF_1$  与直线  $PF_2$  垂直.

(I) 求实数  $m$  的取值范围.

(II) 设  $l$  是相应于焦点  $F_2$  的准线, 直线  $PF_2$  与  $l$  相交于点  $Q$ . 若  $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$ , 求直线  $PF_2$  的方程.

22. (14分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足:  $S_n = 2a_n + (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ .

(1) 写出求数列  $\{a_n\}$  的前 3 项  $a_1, a_2, a_3$ ;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(3) 证明: 对任意的整数  $m > 4$ , 有  $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$ .

2004 年高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 设集合  $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\}$ ,  $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R, y \in R\}$ , 则集合

$M \cap N$  中元素的个数为( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

【解答】解：根据题意， $M \cap N = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, y \in R\} \cap \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in R,$

$$y \in R\} = \{(x, y) | \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}\}$$

将  $x^2 - y = 0$  代入  $x^2 + y^2 = 1$ ,

得  $y^2 + y - 1 = 0$ ,  $\Delta = 5 > 0$ ,

所以方程组有两组解,

因此集合  $M \cap N$  中元素的个数为 2 个,

故选: B.

2. (5 分) 函数  $y = |\sin \frac{x}{2}|$  的最小正周期是( )

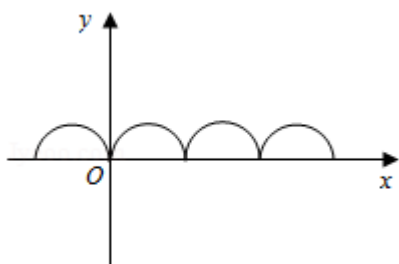
- A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\pi$                       C.  $2\pi$                       D.  $4\pi$

【解答】解：对于  $y = \sin \frac{x}{2}$ ,  $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ ,

函数  $y = |\sin \frac{x}{2}|$  是函数  $y = \sin \frac{x}{2}$  轴上方的图象不动将  $x$  轴下方的图象向上对折得到的, 如图示, 故

$$T' = \frac{1}{2}T = 2\pi,$$

故选: C.



3. (5分) 设数列  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_2 = -6$ ,  $a_8 = 6$ ,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则( )

- A.  $S_4 < S_5$                   B.  $S_4 = S_5$                   C.  $S_6 < S_5$                   D.  $S_6 = S_5$

【解答】解:  $\because a_2 = -6, a_8 = 6$

$$\therefore a_1 + d = -6, a_1 + 7d = 6$$

$$\text{得 } a_1 = -8, d = 2$$

$$\therefore S_4 = S_5$$

故选: B.

4. (5分) 圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  在点  $P(1, \sqrt{3})$  处的切线方程为( )

- A.  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$     B.  $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$     C.  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$     D.  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

【解答】解: 法一:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$y = kx - k + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 4x + (kx - k + \sqrt{3})^2 = 0.$$

该二次方程应有两相等实根, 即  $\Delta = 0$ , 解得  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$\therefore y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1),$$

$$\text{即 } x - \sqrt{3}y + 2 = 0.$$

法二:

$\because$  点  $(1, \sqrt{3})$  在圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  上,

$\therefore$  点  $P$  为切点, 从而圆心与  $P$  的连线应与切线垂直.

又  $\because$  圆心为  $(2, 0)$ ,  $\therefore \frac{0 - \sqrt{3}}{2 - 1} \cdot k = -1$ .

$$\text{解得 } k = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$  切线方程为  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ .

故选: D.

5. (5分) 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$  的定义域是( )

A.  $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$

B.  $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

C.  $[-2, -1) \cup (1, 2]$

D.  $(-2, -1) \cup (1, 2)$

**【解答】**解:  $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \dots 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 - 1, 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ 或 } x < -1 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$-\sqrt{2} \leq x < -1 \text{ 或 } 1 < x \leq \sqrt{2}.$

$\therefore y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$  的定义域为  $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$ .

故选: A.

6. (5分) 设复数  $z$  的幅角的主值为  $\frac{2\pi}{3}$ , 虚部为  $\sqrt{3}$ , 则  $z^2 = ( \quad )$

A.  $-2 - 2\sqrt{3}i$

B.  $-2\sqrt{3} - 2i$

C.  $2 + 2\sqrt{3}i$

D.  $2\sqrt{3} + 2i$

**【解答】**解:  $\because$  复数  $z$  的幅角的主值为  $\frac{2\pi}{3}$

设复数  $z = r(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}r$

$\therefore$  虚部为  $\sqrt{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}$

$\therefore r = 2$

$\therefore z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

$\therefore z^2 = 4(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -2 - 2\sqrt{3}i$

故选: A.

7. (5分) 设双曲线的焦点在  $x$  轴上, 两条渐近线为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 则双曲线的离心率  $e = ( \quad )$

A. 5

B.  $\sqrt{5}$

C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D.  $\frac{5}{4}$

**【解答】**解: 依题意可知  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ , 求得  $a = 2b$

$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}b$

$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

故选: C.

8. (5分) 不等式  $1 < |x+1| < 3$  的解集为 ( )

A. (0,2)

B.  $(-2, 0) \cup (2, 4)$

C.  $(-4, 0)$

D.  $(-4, -2) \cup (0, 2)$

**【解答】**解：  $1 < |x+1| < 3 \Leftrightarrow 1 < |x+1|^2 < 9$

$$\text{即 } \begin{cases} (x+1)^2 > 1 \\ (x+1)^2 < 9 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x < -2 \text{ 或 } x > 0 \\ -4 < x < 2 \end{cases}, \text{ 即 } x \in (-4, -2) \cup (0, 2)$$

$$\text{解法二： } 1 < |x+1| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| > 1 \\ |x+1| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < -1 \text{ 或 } x+1 > 1 \\ -3 < x+1 < 3 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x \in (-4, -2) \cup (0, 2)$$

故选：D.

9. (5分) 正三棱锥的底面边长为2，侧面均为直角三角形，则此三棱锥的体积为( )

A.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D.  $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

**【解答】**解：由题意正三棱锥的底面边长为2，侧面均为直角三角形，

可知：侧棱长为 $\sqrt{2}$ ，三条侧棱两两垂直，

$$\text{所以此三棱锥的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

故选：C.

10. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3, BC=\sqrt{13}, AC=4$ ，则边AC上的高为( )

A.  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

B.  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $3\sqrt{3}$

**【解答】**解：由点B向AC作垂线，交点为D.

设 $AD=x$ ，则 $CD=4-x$ ，

$$\therefore BD = \sqrt{9-x^2} = \sqrt{13-(4-x)^2}, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore BD = \sqrt{9-x^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

故选：B.

11. (5分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < 1 \\ 4 - \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$  则使得  $f(x) \leq 1$  的自变量  $x$  的取值范围为( )

- A.  $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$                       B.  $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$     C.  $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$   
D.  $[-2, 0] \cup [1, 10]$

**【解答】**解：  $f(x) \dots 1$  等价于  $\begin{cases} x < 1 \\ (x+1)^2 \dots 1 \end{cases}$  解得：  $x, -2$  或  $0, x < 1$ .

或  $\begin{cases} x \dots 1 \\ 4 - \sqrt{x-1} \dots 1 \end{cases}$  解得：  $1, x, 10$

综上所述，  $x, -2$  或  $0, x, 10$ .

故选： A .

12. (5分) 将4名教师分配到3所中学任教，每所中学至少1名教师，则不同的分配方案共有( )

- A. 12种                      B. 24种                      C. 36种                      D. 48种

**【解答】**解：将4名教师分配到3所中学任教，每所中学至少1名教师，

只有一种结果1, 1, 2,

首先从4个人中选2个作为一个元素，

使它与其他两个元素在一起进行排列，

共有  $C_4^2 A_3^3 = 36$  种结果，

故选： C .

**二、填空题（共4小题，每小题4分，满分16分）**

13. (4分) 用平面  $\alpha$  截半径为  $R$  的球，如果球心到截面的距离为  $\frac{R}{2}$ ，那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为 3:16 .

**【解答】**解：小圆半径是：  $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ，小圆的面积是：  $\frac{3\pi}{4}R^2$ ，

球的表面积是：  $4\pi R^2$

截得小圆的面积与球的表面积的比值为：  $\frac{3\pi}{4}R^2 : 4\pi R^2 = 3:16$

故答案为： 3:16

14. (4分) 函数  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的最小值为 1 .

**【解答】**解：  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

$$= 2(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x)$$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\therefore 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in [1, 2],$$

$\therefore$  最小值为 1,

故答案为: 1.

15. (4分) 已知函数  $y = f(x)$  是奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 3^x - 1$ , 设  $f(x)$  的反函数是  $y = g(x)$ , 则  $g(-8) =$

-2

**【解答】**解: 法一: 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 由已知  $f(-x) = 3^{-x} - 1$ .

又  $\because f(x)$  是奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \text{ 即 } -f(x) = 3^{-x} - 1.$$

$$\therefore f(x) = 1 - 3^{-x}.$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3^x - 1 & x \geq 0 \\ 1 - 3^{-x} & x < 0. \end{cases}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & x \geq 0 \\ -\log_3(1-x) & x < 0. \end{cases}$$

$$\therefore f^{-1}(-8) = g(-8) = -\log_3(1+8) = -\log_3 3^2 = -2.$$

法二: 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 由已知  $f(-x) = 3^{-x} - 1$ .

又  $\because f(x)$  是奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \text{ 即 } -f(x) = 3^{-x} - 1.$$

$$\therefore f(x) = 1 - 3^{-x}. \text{ 根据反函数定义}$$

$$\text{令 } 1 - 3^{-x} = -8 \text{ 得 } x = -2, \text{ 即: } g(-8) = -2$$

答案为: -2

16. (4分) 设  $P$  是曲线  $y^2 = 4(x-1)$  上的一个动点, 则点  $P$  到点  $(0,1)$  的距离与点  $P$  到  $y$  轴的距离之和的最

小值是  $\sqrt{5}$ .

**【解答】**解： $y^2 = 4(x-1)$ 的图象是以  $y$  轴为准线， $(2,0)$  为焦点的抛物线， $\therefore$  当点  $P$  为  $(0,1)$  点与  $(2,0)$  点的连线与抛物线的交点时，距离和最小，

最小值为： $\sqrt{(2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$ .

故答案为： $\sqrt{5}$ .

### 三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17. (12 分) 已知  $\alpha$  为锐角，且  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，求  $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$  的值.

**【解答】**解： $\because \tan \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\alpha$  为锐角  $\therefore \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ .

18. (12 分) 解方程  $4^x + |1 - 2^x| = 11$ .

**【解答】**解：当  $x \leq 0$  时，有： $4^x + 1 - 2^x = 11$ ,

化简得： $(2^x)^2 - 2^x - 10 = 0$ ,

解之得： $2^x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$  或  $2^x = \frac{1 - \sqrt{41}}{2}$  (舍去).

又  $\because x \leq 0$  得  $2^x \leq 1$ ，故  $2^x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$  不可能舍去.

当  $x > 0$  时，有： $4^x - 1 + 2^x = 11$ ,

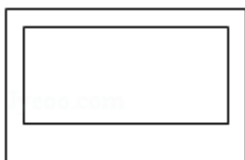
化简得： $(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$ ,

解之得： $2^x = 3$  或  $2^x = -4$  (舍去)

$\therefore 2^x = 3$ ， $\therefore x = \log_2 3$ ,

综上所述，原方程的解为  $x = \log_2 3$ .

19. (12 分) 某村计划建造一个室内面积为  $800m^2$  的矩形蔬菜温室. 在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留  $1m$  宽的通道，沿前侧内墙保留  $3m$  宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？



【解答】解：设矩形温室的左侧边长为  $am$ ，后侧边长为  $bm$ ，则  $ab = 800$ 。

蔬菜的种植面积

$$S = (a - 4)(b - 2)$$

$$= ab - 4b - 2a + 8$$

$$= 808 - 2(a + 2b)。$$

所以  $S_{\text{max}} = 808 - 4\sqrt{2ab} = 648(m^2)$

当且仅当  $a = 2b$ ，即  $a = 40(m)$ ， $b = 20(m)$  时，

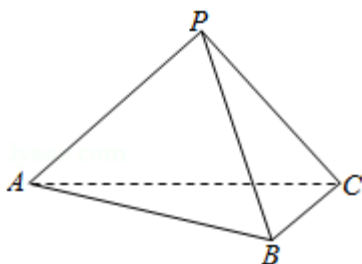
$$S_{\text{最大值}} = 648(m^2)。$$

答：当矩形温室的左侧边长为  $40m$ ，后侧边长为  $20m$  时，蔬菜的种植面积最大，最大种植面积为  $648m^2$ 。

20. (12分) 三棱锥  $P-ABC$  中，侧面  $PAC$  与底面  $ABC$  垂直， $PA = PB = PC = 3$ 。

(1) 求证  $AB \perp BC$ ；

(2) 如果  $AB = BC = 2\sqrt{3}$ ，求  $AC$  与侧面  $PBC$  所成角的大小。



【解答】解：(1) 证明：取  $AC$  中点  $O$ ，连接  $PO$ 、 $BO$ 。

$$\because PA = PC \therefore PO \perp AC$$

又  $\because$  侧面  $PAC \perp$  底面  $ABC$

$$\therefore PO \perp \text{底面 } ABC$$

又  $PA = PB = PC \therefore AO = BO = CO$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形 } \therefore AB \perp BC$$

(2) 解：取  $BC$  的中点为  $M$ ，连接  $OM$ ， $PM$ ，所以有  $OM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$ ， $AO = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

$$\therefore PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{3}$$

由 (1) 有  $PO \perp$  平面  $ABC$ ， $OM \perp BC$ ，由三垂线定理得  $PM \perp BC$

$$\therefore \text{平面 } POM \perp \text{平面 } PBC，\text{又 } \because PO = OM = \sqrt{3}。$$

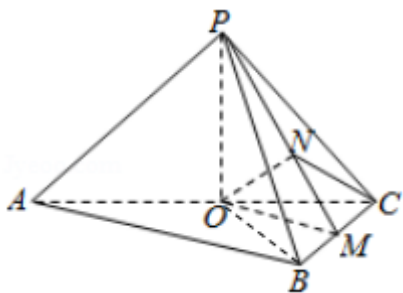
$\therefore \triangle POM$  是等腰直角三角形，取  $PM$  的中点  $N$ ，连接  $ON$ ， $NC$

则  $ON \perp PM$ ，又  $\because$  平面  $POM \perp$  平面  $PBC$ ，且交线是  $PM$ ， $\therefore ON \perp$  平面  $PBC$

$\therefore \angle OCN$  即为  $AC$  与平面  $PBC$  所成的角  $ON = \frac{1}{2}PM = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $OC = \sqrt{6}$

$\therefore \sin \angle OCN = \frac{ON}{OC} = \frac{1}{2} \therefore \angle OCN = \frac{\pi}{6}$ .

故  $AC$  与平面  $PBC$  所成的角为  $\frac{\pi}{6}$ .



21. (12分) 设椭圆  $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$  的两个焦点是  $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$  ( $c > 0$ )，且椭圆上存在点  $P$ ，使得直线  $PF_1$  与直线  $PF_2$  垂直.

(I) 求实数  $m$  的取值范围.

(II) 设  $l$  是相应于焦点  $F_2$  的准线，直线  $PF_2$  与  $l$  相交于点  $Q$ . 若  $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2 - \sqrt{3}$ ，求直线  $PF_2$  的方程.

**【解答】** 解：(1)  $\because$  直线  $PF_1 \perp$  直线  $PF_2$

$\therefore$  以  $O$  为圆心以  $c$  为半径的圆：  $x^2 + y^2 = c^2$  与椭圆：  $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$  有交点. 即 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ \frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 有解}$$

又  $\because c^2 = a^2 - b^2 = m+1 - 1 = m > 0$

$\therefore 0, x^2 = \frac{m^2 - 1}{m} < a^2 = m+1$

$\therefore m > 0$

(2) 设  $P(x_0, y_0)$ ，直线  $PF_2$  方程为：  $y = k(x - c)$ ，

$\therefore$  直线  $l$  的方程为：  $x = \frac{a^2}{c} = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ ，

准线  $L$  的方程为  $x = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ ，

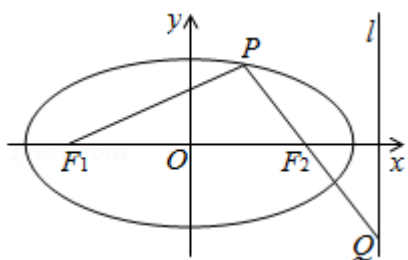
设点  $Q$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ ，则  $x_1 = \frac{m+1}{\sqrt{m}}$ ，

$$\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = \frac{x_1 - c}{c - x_0} = m + \sqrt{m^2 - 1} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{②}$$

解可得  $m = 2$ ，从而  $x_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $c = \sqrt{2}$ ，

则  $k_{PF_2} = \pm(2 + \sqrt{3})$  或  $k_{PF_2} = \pm(\sqrt{3} - 2)$ ，

得到  $PF_2$  的方程  $y = \pm(\sqrt{3} - 2)(x - \sqrt{2})$  或  $y = \pm(\sqrt{3} + 2)(x - \sqrt{2})$ 。



22. (14分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足:  $S_n = 2a_n + (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ .

(1) 写出求数列  $\{a_n\}$  的前 3 项  $a_1, a_2, a_3$ ;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(3) 证明: 对任意的整数  $m > 4$ , 有  $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$ .

**【解答】** 解: (1) 当  $n = 1$  时, 有:  $S_1 = a_1 = 2a_1 + (-1) \Rightarrow a_1 = 1$ ;

当  $n = 2$  时, 有:  $S_2 = a_1 + a_2 = 2a_2 + (-1)^2 \Rightarrow a_2 = 0$ ;

当  $n = 3$  时, 有:  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3 + (-1)^3 \Rightarrow a_3 = 2$ ;

综上所述  $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 2$ ;

(2) 由已知得:  $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n + (-1)^n - 2a_{n-1} - (-1)^{n-1}$

化简得:  $a_n = 2a_{n-1} + 2(-1)^{n-1}$

上式可化为:  $a_n + \frac{2}{3}(-1)^n = 2[a_{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1}]$

故数列  $\{a_n + \frac{2}{3}(-1)^n\}$  是以  $a_1 + \frac{2}{3}(-1)^1$  为首项, 公比为 2 的等比数列.

故  $a_n + \frac{2}{3}(-1)^n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} \therefore a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{2}{3}(-1)^n = \frac{2}{3}[2^{n-2} - (-1)^n]$

数列  $\{a_n\}$  的通项公式为:  $a_n = \frac{2^{n-1}}{3} - \frac{2}{3}(-1)^n$ .

(3) 由已知得:  $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} = 3[\frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{2^4 + 2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1} - (-1)^m}]$

$$= 3\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}\right] < 3\left(\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{7}{8}$$

$$\text{故 } \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8} (m > 4).$$