2003年黑龙江高考理科数学真题及答案

注意事项：

1. 答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上．

2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上．

3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回．

参考公式：

三角函数的积化和差公式：

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$ 其中 c'、c 分别表示上、下底面周长，l 表示斜高或母线长.

球体的体积公式：$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中R表示球的半径.

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。

第Ⅰ卷（选择题共60分）

一. 选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

1．已知 $x\in(-\frac{\pi}{2}$，0），$\cos x=\frac{4}{5}$，则 $tg2x=$ （　　）

（A）$\frac{7}{24}$　　（B）$-\frac{7}{24}$　　（C）$\frac{24}{7}$　　（D）$-\frac{24}{7}$

2．圆锥曲线 $\rho=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是 （　　）

（A）$\rho\cos\theta=-2$　（B）$\rho\cos\theta=2$　（C）$\rho\sin\theta=2$　（D）$\rho\sin\theta=-2$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1 & x\le 0\\ x^{\frac{1}{2}} & x>0\end{cases}$，若 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是 （　　）

（A）（-1，1）　　（B）（-1，$+\infty$）

（C）（$-\infty$，-2）∪（0，$+\infty$）　　（D）（$-\infty$，-1）∪（1，$+\infty$）

4．函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$ 的最大值为　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

（A）$1+\sqrt{2}$　　　（B）$\sqrt{2}-1$　　　（C）$\sqrt{2}$　　　（D）2

5．已知圆 C：$(x-a)^2+(y-2)^2=4$（$a>0$）及直线 l：$x-y+3=0$，当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时，则 a　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　　（B）$2-\sqrt{2}$　　　（C）$\sqrt{2}-1$　　　（D）$\sqrt{2}+1$

6．已知圆锥的底面半径为 R，高为 3R，在它的所有内接圆柱中，全面积的最大值是（　　）

（A）$2\pi R^2$　　　（B）$\frac{9}{4}\pi R^2$　　　（C）$\frac{8}{3}\pi R^2$　　　（D）$\frac{3}{2}\pi R^2$

7．已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的的等差数列，则 $|m-n|=$　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

（A）1　　　（B）$\frac{3}{4}$　　　（C）$\frac{1}{2}$　　　（D）$\frac{3}{8}$

8．已知双曲线中心在原点且一个焦点为 F（$\sqrt{7}$，0），直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点，MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$，则此双曲线的方程是　　　　　　　　（　　）

（A）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　　（C）$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　　（D）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

9．函数 $f(x)=\sin x$，$x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$　　　　　　　　　　（　　）

（A）$-\arcsin x\quad x\in[-1，1]$　　　（B）$-\pi-\arcsin x\quad x\in[-1，1]$

（C）$\pi+\arcsin x\quad x\in[-1，1]$　　　（D）$\pi-\arcsin x\quad x\in[-1，1]$

10．已知长方形的四个顶点 A（0，0），B（2，0），C（2，1）和 D（0，1），一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后，依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4（入射角等于反射角），设 P_4 的坐标为（x_4，0），若 $1<x_4<2$，则 tgθ 的取值范围是　　　　　　　　　　　　（　　）

（A）（$\frac{1}{3}$，1）　　（B）（$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$）　　（C）（$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$）　　（D）（$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{3}$）

11．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2}{n(C_2^1+C_3^1+C_4^1+\cdots+C_n^1)}=$ （　　）

（A）3　　　（B）$\frac{1}{3}$　　　（C）$\frac{1}{6}$　　　（D）6

12．一个四面体的所有棱长都为$\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则些球的表面积为（　　）

（A）3π　　（B）4π　　（C）$3\sqrt{3}\pi$　　（D）6π

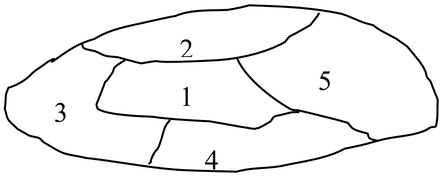
第Ⅱ卷（非选择题共 90 分）

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.把答案填在题中横线上.

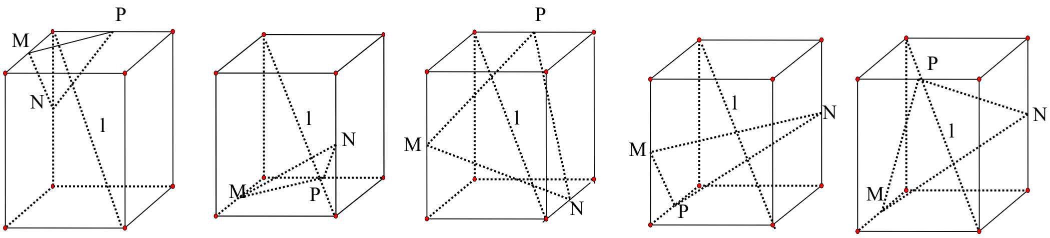
13．$(x^2-\frac{1}{2x})^9$的展开式中x^9系数是____________

14．使$\log_2(-x)<x+1$成立的x的取值范围是__________________

15．如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻地区不得使用同一颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有　　　种.（以数字作答）



16．下列 5 个正方体图形中，l是正方体的一条对角线，点 M、N、P 分别为其所在棱的中点，能得出$l\perp$面 MNP 的图形的序号是　　　（写出所有符合要求的图形序号）

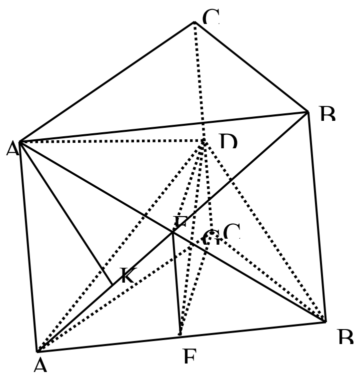


①　　　②　　　③　　　④　　　⑤

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或或演算步骤

17．（本小题满分 12 分）

已知复数z的辐角为$60°$，且$|z-1|$是$|z|$和$|z-2|$的等比中项，求$|z|$



18.（本小题满分 12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，侧棱 $AA_1=2$，D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是△ABD 的重心 G

（I）求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）

（II）求点 A_1 到平面 AED 的距离

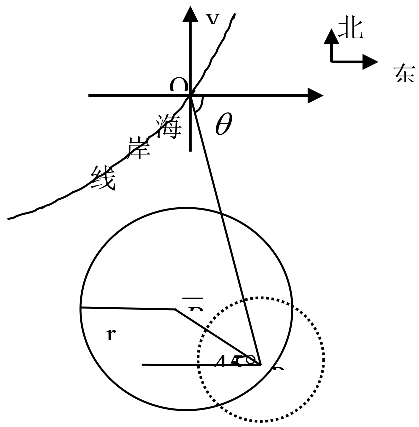
19.（本小题满分 12 分）　　已知 $c>0$，设

P：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减　　Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围

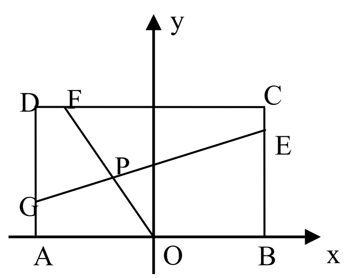
20.（本小题满分 12 分）

在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市 O（如图）的东偏南 $\theta(\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10})$ 方向 300km 的海面 P 处，并以 20km/h 的速度向西偏北 $45°$ 方向移动,台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为 60km，并以 10km/h 的速度不断增大,问几小时后该城市开始受到台风的侵袭？



21.（本小题满分 14 分）

已知常数 $a>0$，在矩形 ABCD 中，$AB=4$，$BC=4a$，O 为 AB 的中点，点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动，且 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$，P 为 GE 与 OF 的交点（如图），问是否存在两个定点，使 P 到这两点的距离的和为定值？若存在，求出这两点的坐



标及此定值；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分，附加题 4 分）

（I）设$\{a_n\}$是集合$\{2^s+2^t \mid 0 \le s < t$ 且 $s,t \in Z\}$中所有的数从小到大排列成的数列，

即$a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=6$，$a_4=9$，$a_5=10$，$a_6=12$，…

将数列$\{a_n\}$各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & & \\
 & 5 \quad 6 & & \\
 & 9 \quad 10 \quad 12 & & \\
— & — & — & —
\end{array}
$$

…………

⑴写出这个三角形数表的第四行、第五行各数；

⑵求a_{100}

（II）（本小题为附加题，如果解答正确，加 4 分，但全卷总分不超过 150 分）

设$\{b_n\}$是集合$\{2^r+2^s+2^t \mid 0 \le r < s < t$，且$r,s,t \in Z\}$中所有的数从小到大排列成的数列，已知$b_k=1160$，求$k$.

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分，满分 60 分.

1．D 2．C 3．D 4．A 5．C 6．B 7．C 8．D 9．D 10．C 11．B 12．A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 16 分.

13．$-\dfrac{21}{2}$ 14．(-1，0) 15．72 16．①④⑤

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17． 解：设$z=r\cos 60^\circ+r\sin 60^\circ)$，则复数$z$的实部为$\dfrac{r}{2}$. $z-\bar{z}=r, z\bar{z}=r^2$ 由题设

$|z-1|^2=|z|\cdot|z-2|$ 即: $(z-1)(\bar{z}-1)=|z|\sqrt{(z-2)(\bar{z}-2)}$, $\therefore r^2-r+1=r\sqrt{r^2-2r+4}$,

整理得 $r^2+2r-1=0$. 解得: $r=\sqrt{2}-1$, $r=-\sqrt{2}-1$(舍去). 即 $|z|=\sqrt{2}-1$.

18.（Ⅰ）解：连结 BG，则 BG 是 BE 在 ABD 的射影，即∠EBG 是 A_1B 与平面 ABD 所成的角.

设 F 为 AB 中点，连结 EF、FC，

$\because D,E$ 分别是 CC_1, A_1B 的中点, 又 $DC\perp$ 平面 ABC, $\therefore CDEF$ 为矩形

连结 DE, G 是 ΔADB 的重心, $\therefore G\in DF$. 在直角三角形 EFD 中

$EF^2=FG\cdot FD=\dfrac{1}{3}FD^2$, $\because EF=1$, $\therefore FD=\sqrt{3}$.……(4分)

于是 $ED=\sqrt{2}$, $EG=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$\because FC=CD=\sqrt{2}$, $\therefore AB=2\sqrt{2}$, $A_1B=2\sqrt{3}$, $EB=\sqrt{3}$.

$\therefore \sin\angle EBG=\dfrac{EG}{EB}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore A_1B$ 与平面 ABD 所成的角是 $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

（Ⅱ）解：$\because ED\perp AB$, $ED\perp EF$, 又 $EF\cap AB=F$,

$\therefore ED\perp$ 面 A_1AB, 又 $ED\subset$ 面 AED. $\therefore$ 平面 $AED\perp$ 平面 A_1AB, 且面 $AED\cap$ 面 $A_1AB=AE$.

作 $A_1K\perp AE$, 垂足为 K. $\therefore A_1K\perp$ 平面 AED, 即 A_1K 是 A_1 到平面 AED 的距离.

在 ΔA_1AB_1 中, $A_1K=\dfrac{A_1A\cdot A_1B_1}{AB_1}=\dfrac{2\times2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $\therefore A_1$ 到平面 AED 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

19．解：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上恒大于1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\ge 2c,\\ 2c, & x<2c,\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 不等式 $|x+x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\dfrac{1}{2}$.

如果 P 正确, 且 Q 不正确, 则 $0<c\le\dfrac{1}{2}$.

如果 P 不正确, 且 Q 正确, 则 $c\ge 1$. 所以 c 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

（以上方法在新疆考区无一人使用，大都是用解不等式的方法，个别使用的图象法）

20．解：如图建立坐标系以 0 为原点，正东方向为 x 轴正向.

在时刻：（1）台风中心 P（$\bar{x}$，$\bar{y}$）的坐标为$\begin{cases}\bar{x}=300\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}-20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ \bar{y}=-300\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}+20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$

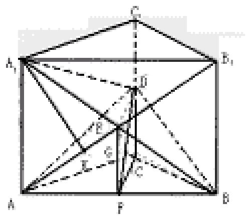
此时台风侵袭的区域是$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})\le[r(t)]^2$,

其中$r(t)=10t+60$,若在 t 时刻城市 0 受到台风的侵袭，则有

$(0-\bar{x})^2+(0-\bar{y})^2\le(10t+60)^2$. 即$(300\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}-20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(-300\times\dfrac{7\sqrt{2}}{10}+20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)^2$

$\le(10t+60)^2$,即$t^2-36t+288\le0$,解得$12\le t\le24$

答：12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.



21．根据题设条件，首先求出点 P 坐标满足的方程，据此再判断是否存在的两定点，使得点 P 到两点距离的和为定值.

按题意有 A（－2，0），B（2，0），C（2，4a），D（－2，4a）设

$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}=k(0\le k\le1)$

由此有 E（2，4ak），F（2－4k，4a），G（－2，4a－4ak）

直线 OF 的方程为：$2ax+(2k-1)y=0$①

直线 GE 的方程为：$-a(2k-1)x+y-2a=0$②

从①，②消去参数 k，得点 P（x, y）坐标满足方程$2a^2x^2+y^2-2ay=0$

整理得$\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{(y-a)^2}{a^2}=1$ 当$a^2=\dfrac{1}{2}$时，点 P 的轨迹为圆弧，所以不存在符合题意的两点.

当$a^2\ne\dfrac{1}{2}$时，点 P 轨迹为椭圆的一部分，点 P 到该椭圆焦点的距离的和为定长.

当$a^2<\dfrac{1}{2}$时，点 P 到椭圆两个焦点（$-\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2},a),(\sqrt{\dfrac{1}{2}-a^2},a)$的距离之和为定值$\sqrt{2}$.

当$a^2>\dfrac{1}{2}$时，点 P到椭圆两个焦点（0，$a-\sqrt{a^2-\dfrac{1}{2}}),(0,a+\sqrt{a^2-\dfrac{1}{2}})$的距离之和为定值

$2a$.

22．（本小题满分 12 分，附加题 4 分）

（Ⅰ）解：用(t, s)表示2^t+2^s，下表的规律为

3（(0, 1)=2^0+2^1）

5(0, 2)　6(1, 2)

9(0, 3)　10(1, 3)　12(2, 3)

—　—　—　—

…………

（i）第四行 17(0, 4)　18(1, 4)　20(2, 4)　24(3, 4)

第五行 33(0, 5)　34(1, 5)　36(2, 5)　40(3, 5)　48(4, 5)

（i i）解法一：因为 100＝（1+2+3+4+……+13）+9，所以 $a_{100}=(8,14)=2^8+2^{14}=16640$

解法二：设 $a_{100}=2^{s_0}+2^{t_0}$，只须确定正整数 s_0,t_0.

数列 $\{a_n\}$ 中小于 2^{t_0} 的项构成的子集为 $\{2^t+2^s\mid 0\le s<t<t_0\}$,

其元素个数为 $C_{t_0}^2=\frac{t_0(t_0-1)}{2}$,依题意 $\frac{t_0(t_0-1)}{2}<100$.

满足等式的最大整数 t_0 为 14，所以取 $t_0=14$.

因为 100－$C_{14}^2=s_0+1$,由此解得$s_0=8$,$\therefore a_{100}=2^{14}+2^8=16640$.

（Ⅱ）解：$b_k=1160=2^{10}+2^7+2^3$,

令 $M=\{c\in B\mid C<1160\}$　$(其中,B=\{2^r+2^s+2^t\mid 0\le r<s<t\}$

因 $M=\{c\in B\mid c<2^{10}\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}$.

现在求 M 的元素个数：$\{c\in B\mid c<2^{10}\}=\{2^r+2^s+2^t\mid 0\le r<s<t<10\}$,

其元素个数为 C_{10}^3：　$\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\}=\{2^{10}+2^s+2^r\mid 0\le r<s<7\}$.

某元素个数为 $C_7^2:\{c\in B\mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}=\{2^{10}+2^7+2^r\mid 0\le r<3\}$

某元素个数为 $C_{10}^7:k=C_{10}^3+C_7^2+C_3^2+1=145$.

另法：规定 $2^r+2^t+2^s=$（r, t, s），$b_k=1160=2^{10}+2^7+2^3=$（3, 7, 10）

则 $b_1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 =$ （0, 1, 2） C_2^2

依次为 （0, 1, 3） （0, 2, 3） （1, 2, 3） C_3^2

（0, 1, 4） （0, 2, 4）（1, 2, 4）（0, 3, 4） （1, 3, 4）（2, 3, 4） C_4^2

…………

（0, 1, 9） （0, 2, 9）………… （ 6, 8, 9 ）（7, 8, 9） C_9^2

（0, 1, 10）（0, 2, 10）………（0, 7, 10）（ 1, 7, 10）（2, 7, 10）（3, 7, 10）…… C_7^2 +4

$k = (C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_9^2) + C_7^2 + 4 = 145.$