绝密★启用前

2002年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.

4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题满分为48分）本大题共有12题，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1．若z∈C，且 (3+z)i=1 (i是虚数单位)，则z =______.

2．已知向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为120°，且|$\vec{a}$|=2，|$\vec{b}$|=5，则（2$\vec{a}$—$\vec{b}$）· $\vec{a}$=_____._

3．方程$\log_3(1-2\cdot 3^x)=2x+1$的解x=______.

4．若正四棱锥的底面边长为$2\sqrt{3}$ cm，体积为4cm^3，则它的侧面与底面所成的二面角的大小是_____.

5．在二项式$(1+3x)^n$和$(2x+5)^n$的展开式中，各项系数之和分别记为a_n、b_n，n是正整数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2b_n}{3a_n-4b_n}$=______.

6．已知圆 $(x+1)^2+y^2=1$和圆外一点P（0，2)，过点P作圆的切线，则两条切线夹角的正切是.

7．在某次花样滑冰比赛中，发生裁判受贿事件.竞赛委员会决定将裁判由原来的9名增至14名，但只任取其中7名裁判的评分作为有效分.若14名裁判中有2个受贿，则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是_______.（结果用数值表示）

8．曲线$\begin{cases}x=t^2-1\\ y=2t+1\end{cases}$（t为参数）的焦点坐标是______.

9．若A、B两点的极坐标为A（4，$\dfrac{\pi}{3}$）、B（6，0），则AB中点的极坐标是___.（极角用反三角函数表示）

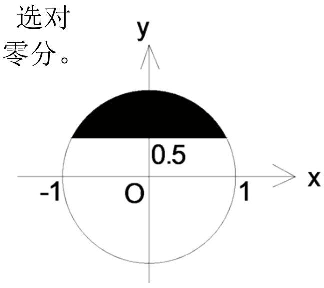
10．设函数f (x)=sin2x.若f (x+t)是偶函数，则t的一个可能值是______.

11．若数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，且$a_{n+1}=a_n^2$（n是正整数），则数列的通项公式a_n=_____.

12．已知函数y=f (x)（定义域为D，值域为A）有反函数$y=f^{-1}(x)$，则方程f (x)=0有解x=a，且f (x)＞x（x∈D）的充要条件是$y=f^{-1}(x)$满足_______.

二、选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分。

13．如图，与复平面中的阴影部分（含边界）对应的复数集合是（ ）



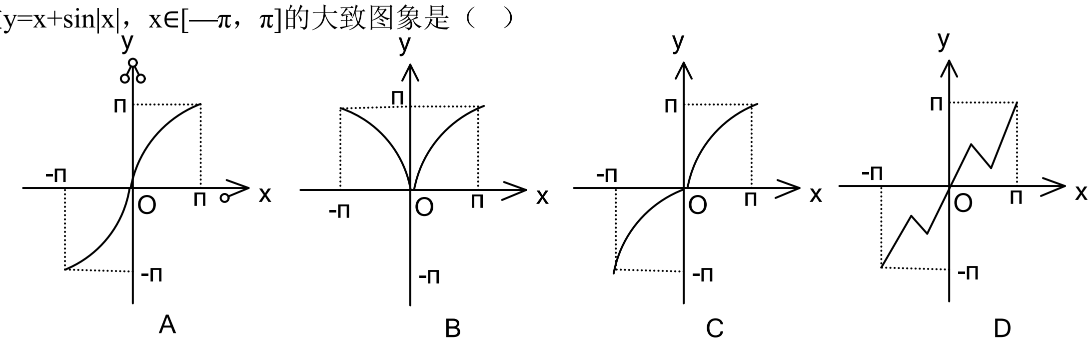
（A）{z||z|=1, $\dfrac{\pi}{6}$≤argz≤$\dfrac{5\pi}{6}$,z∈C}；（B）{z||z|≤1, $\dfrac{\pi}{6}$≤argz≤$\dfrac{5\pi}{6}$,z∈C}

（C）$\{z||z|=1, \text{Im}z\geq\frac{1}{2}, z\in C\}$；　　（D）$\{z||z|\leq1, \text{Im}z\geq\frac{1}{2}, z\in C\}$

14．已知直线 l 、m，平面α、β，且 l ⊥α，m⊂β.给出下列四个命题：（1）若α∥β，则 l ⊥m；（2）若 l ⊥m，则α∥β；（3）若α⊥β，则 l ⊥m；（4）若 l ∥α，则α⊥β，其中正确命题的个数是（　）

（A）1个　（B）2个　（C）3个　（D）4个

15．函数y=x+sin|x|，x∈[—π，π]的大致图象是（　）

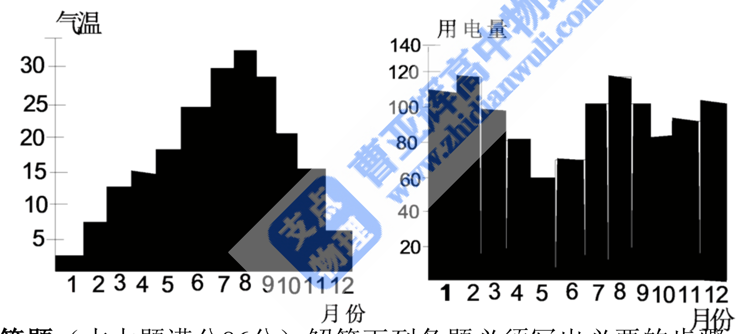


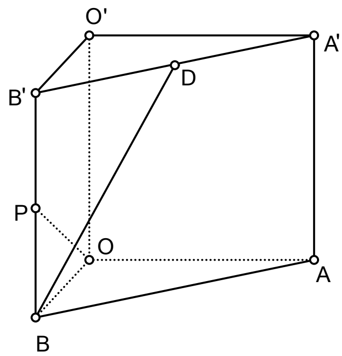
16．一般地，家庭用电量（千瓦时）与气温（℃）有一定的关系.如图（1）表示某年12个月中每月的平均气温，图（2）表示某家庭在12个月中每月的用电量.根据这些信息，以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中，正确的是（　）

（A）气温最高时，用电量最多　　（B）气温最低时，用电量最少

（C）当气温大于某一值时，用电量随气温增高而增加；

（D）当气温小于某一值时，用电量随气温降低而增加





三、解答题（本大题满分86分）解答下列各题必须写出必要的步骤。

17．（本题满分12分）如右上图，在直三棱柱ABO—A′B′O′中，OO′=4，OA=4，OB=3，∠AOB=90°，D是线段A′B′的中点，P是侧棱BB′上的一点.若OP⊥BD，求OP与底面AOB所成角的大小.（结果用反三角函数值表示）

18．（本题满分12分）已知点A（—$\sqrt{3}$，0）和B（$\sqrt{3}$，0），动点C到A、B两点的距离之差的绝对值为2，点C的轨迹与直线y=x—2交于D、E两点.求线段DE的长.

19．（本题满分14分）本题共有2个小题，第（1）小题满分6分，第（2）小题满分8分。

已知函数$f(x)=x^2+2x\cdot\tan\theta-1$，$x\in[-1,\sqrt{3}]$，其中$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$．

（1）当$\theta=-\frac{\pi}{6}$时，求函数$y=f(x)$的最大值与最小值；

（2）求θ的取值范围，使$y=f(x)$在区间$[-1,\sqrt{3}]$上是单调函数.

20．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分4分，第2小题满分10分。

某商场在促销期间规定：商场内所有商品按标价的80%出售；同时，当顾客在该商场内消费满一定金额后，按如下方案获得相应金额的奖券：

消费金额（元）的范围	[200，400）	[400，500）	[500，700）	[700，900）	…
获得奖券的金额（元）	30	60	100	130	…

根据上述促销方法，顾客在该商场购物可以获得双重优惠.例如，购买标价为400元的商品，则消费金额为320元，获得的优惠额为：400×0.2+30=110（元）.设购买商品得到的优惠率=$\frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$，试问：

（1）购买一件标价为1000元的商品，顾客得到的优惠率是多少？

（2）对于标价在[500，800]（元）内的商品，顾客购买标价为多少元的商品，可获得不小于$\frac{1}{3}$的优惠率？

21．（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分。

已知函数$f(x)=a\cdot b^x$的图象过点A（4，$\frac{1}{4}$）和B（5，1）.

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）记$a_n=\log_2 f(n)$，n是正整数，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，解关于n的不等式$a_nS_n\le 0$；

（3）对于（2）中的a_n与S_n，整数10^4是否为数列{ a_nS_n }中的项？若是，则求出相应的项数；若不是，则说明理由.

22．（本小题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分8分，第3小题满分6分。

规定$C_x^m=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$，其中x∈R，m是正整数，且$C_x^0=1$，这是组合数$C_n^m$（n、m是正整数，且m≤n）的一种推广.

（1）求C_{-15}^5的值；

（2）组合数的两个性质：①$C_n^m=C_n^{n-m}$；②$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

是否都能推广到C_x^m（x∈R，m是正整数）的情况？若能推广，则写出推广的形式并给出证明；若不能，则说明理由；

（3）已知组合数C_n^m是正整数，证明：当x∈Z，m是正整数时，C_x^m∈Z.

2002年全国普通高等学校招生统一考试

理科数学参考答案（上海卷）

一、1.—3—i;　2.13;　3.—1;　4.30°;　5. $\frac{1}{2}$；　6. $\frac{4}{3}$；　7. $\frac{3}{13}$；

8.（0，1）；　9.（$\sqrt{19}$，$\arctan\frac{\sqrt{3}}{4}$）；　10. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ …　11. $3^{2^{n-1}}$

12. $f^{-1}(0)=a$,且 $f^{-1}(x)<x$ $(x\in A)$ 或 $y=f^{-1}(x)$ 的图象在直线 $y=x$ 的下方，且与y轴的交点为(0，a).

二、DBCC

三、17. [解法一]

如图,以　点为原点建立空间直角坐标系

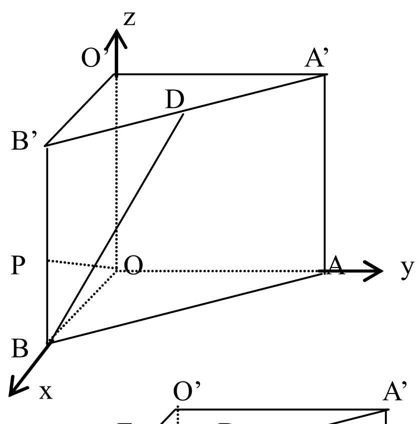
由题意，有

设　　，则 $\overrightarrow{BD}=\{-\frac{3}{2},2,4\},\overrightarrow{OP}=\{3,0,z\}$

因为　$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OP}=-\frac{9}{2}+4z=0$

因为　平面AOB

是OP与底面AOB所成的角　$tg\angle POB=\frac{3}{8}$　$\therefore\angle POB=arctg\frac{3}{8}$



[解法二]取　中点E，连结DE、BE，则

平面

是BD在平面　内的射影。

又因为

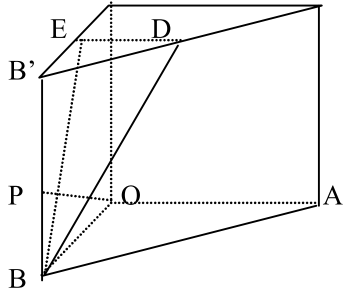
由三垂线定理的逆定理，得

在矩形　中，易得

得

（以下同解法一）

∠POB=arctan $\frac{3}{8}$.



18. [解] 设点C（x,y），则

根据双曲线的定义，可知点C的轨迹是双曲线

由

故点C的轨迹方程是

由　　　　　　，得

因为　　　，所以直线与双曲线有两个交点。

设　　　　　、　　　　　，则

故　　　　　　　　　　　　　$=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{5}$

19. [解]（1）当$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$时$f(x)=x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-1=(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2-\dfrac{4}{3}$, $x\in[-1,\sqrt{3}]$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(x)$的值最小为$-\dfrac{4}{3}$；　当x＝－1时，$f(x)$的值最大为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

（2）函数$f(x)=(x+\tan\theta)^2-1-\tan^2\theta$图像的对称轴为$x=-\tan\theta$。

$\because$ $y=f(x)$在区间$[-1,\sqrt{3}]$上是单调递增函数，

$\therefore -\tan\theta\le -1$或$-\tan\theta\ge\sqrt{3}$，即 $\tan\theta\ge 1$或$\tan\theta\le-\sqrt{3}$

因此，θ的取值范围是$(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3})\cup[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$

20. [解]（1）

（2）设商品的标价为x元

则　　　　　　，消费额：

由已知得（I）　　　　　　　　　或（II）

不等式组（I）无解，不等式组（II）的解为

因此，当顾客购买标价在[625，750]元内的商品时，可得到不小于　的优惠率。

21. [解]（1）由　　　　　　　　，得　　　　　　故

（2）由题意

由　　　　得　　　　　　　　，即　　　　　　故

（3）　　　　，　　　　　，　　　　　，

当　　　　　时，

当　　　　时，

因此，96不是数列　　　　中的项。

22. [解]（1）

（2）性质①不能推广。例如取x=$\sqrt{2}$；$C_{\sqrt{2}}^{1}$有意义，但$C_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1}$无意义；性质②能推广，它的推广形式是$C_x^m+C_x^{m-1}=C_{x+1}^m$，$x\in R$，m是正整数，事实上，当m = 1时，有$C_x^m+C_x^{m-1}=x+1=C_{x+1}^1$

当　$m>2$时，

$$C_x^m+C_x^{m-1}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{m!}+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+2)}{(m-1)!}$$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+2)}{(m-1)!}\left(\frac{x-m+1}{m}+1\right)=\frac{x(x-1)\cdots(x-m+2)(x+1)}{m!}=C_{x+1}^m$$

（3）当$x\geq m$时，组合数$C_x^m\in Z$。当$0\leq x<m$时，$C_x^m=0\in Z$。

当$x<0$时，$\because -x+m-1>0$,

$$\therefore C_x^m=\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}=(-1)^m\frac{(-x+m-1)\cdots(-x+1)(-x)}{m!}=(-1)^m C_{-x+m-1}^m\in Z$$