

【分析】求出圆心坐标，再利用点到直线距离公式即可.

【详解】由题意得 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ ，即 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$ ，

则其圆心坐标为 $(1, -3)$ ，则圆心到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|1+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$ ，

故选：C.

4. $(x - \sqrt{x})^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 ()

A. 15

B. 6

C. -4

D. -13

【答案】B

【解析】

【分析】写出二项展开式，令 $4 - \frac{r}{2} = 3$ ，解出 r 然后代入二项展开式系数即可得解.

【详解】 $(x - \sqrt{x})^4$ 的二项展开式为 $T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} (-\sqrt{x})^r = C_4^r (-1)^r x^{4-\frac{r}{2}}$, ($r = 0, 1, 2, 3, 4$),

令 $4 - \frac{r}{2} = 3$ ，解得 $r = 2$ ，

故所求即为 $C_4^2 (-1)^2 = 6$.

故选：B.

5. 已知向量 \vec{a} ， \vec{b} ，则“ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ”是“ $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ”的 () 条件.

A. 必要而不充分条件

B. 充分而不必要条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量数量积分析可知 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ 等价于 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$ ，可得 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ ，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

可知 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ 等价于 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

若 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，可得 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，即 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，可知必要性成立；

若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，无法得出 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，

例如 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 1)$ ，满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，但 $\vec{a} \neq \vec{b}$ 且 $\vec{a} \neq -\vec{b}$ ，可知充分性不成立；

综上所述，“ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ”是“ $\vec{a} = \vec{b}$ 且 $\vec{a} = -\vec{b}$ ”的必要不充分条件.

故选：A.

6. 已知 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$, $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\omega =$ ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角函数最值分析周期性，结合三角函数最小正周期公式运算求解.

【详解】由题意可知： x_1 为 $f(x)$ 的最小值点， x_2 为 $f(x)$ 的最大值点，

$$\text{则 } |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } T = \pi,$$

$$\text{且 } \omega > 0, \text{ 所以 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2.$$

故选：B.

7. 记水的质量为 $d = \frac{S-1}{\ln n}$, 并且 d 越大, 水质量越好. 若 S 不变, 且 $d_1 = 2.1$, $d_2 = 2.2$, 则 n_1 与 n_2 的关系为 ()

A. $n_1 < n_2$

B. $n_1 > n_2$

C. 若 $S < 1$, 则 $n_1 < n_2$; 若 $S > 1$, 则 $n_1 > n_2$;

D. 若 $S < 1$, 则 $n_1 > n_2$; 若 $S > 1$, 则 $n_1 < n_2$;

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意分析可得 $\begin{cases} n_1 = e^{\frac{S-1}{2.1}} \\ n_2 = e^{\frac{S-1}{2.2}} \end{cases}$, 讨论 S 与 1 的大小关系, 结合指数函数单调性分析判断.

【详解】由题意可得 $\begin{cases} d_1 = \frac{S-1}{\ln n_1} = 2.1 \\ d_2 = \frac{S-1}{\ln n_2} = 2.2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} n_1 = e^{\frac{S-1}{2.1}} \\ n_2 = e^{\frac{S-1}{2.2}} \end{cases}$,

若 $S > 1$, 则 $\frac{S-1}{2.1} > \frac{S-1}{2.2}$, 可得 $e^{\frac{S-1}{2.1}} > e^{\frac{S-1}{2.2}}$, 即 $n_1 > n_2$;

若 $S = 1$, 则 $\frac{S-1}{2.1} = \frac{S-1}{2.2} = 0$, 可得 $n_1 = n_2 = 1$;

若 $S < 1$, 则 $\frac{S-1}{2.1} < \frac{S-1}{2.2}$, 可得 $e^{\frac{S-1}{2.1}} < e^{\frac{S-1}{2.2}}$, 即 $n_1 < n_2$;

结合选项可知 C 正确, ABD 错误;

故选: C.

8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥, 四条侧棱分别为 4, 4, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 则该四棱锥的高为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

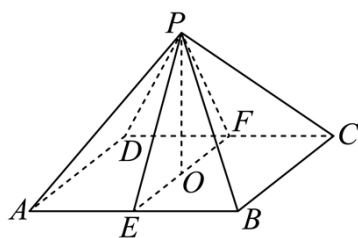
【答案】 D

【解析】

【分析】 取点作辅助线, 根据题意分析可知平面 $PEF \perp$ 平面 $ABCD$, 可知 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 利用等体积法求点到面的距离.

【详解】 如图, 底面 $ABCD$ 为正方形,

当相邻的棱长相等时, 不妨设 $PA = PB = AB = 4, PC = PD = 2\sqrt{2}$,



分别取 AB, CD 的中点 E, F , 连接 PE, PF, EF ,

则 $PE \perp AB, EF \perp AB$, 且 $PE \cap EF = E$, $PE, EF \subset$ 平面 PEF ,

可知 $AB \perp$ 平面 PEF , 且 $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

所以平面 $PEF \perp$ 平面 $ABCD$,

过 P 作 EF 的垂线, 垂足为 O , 即 $PO \perp EF$,

由平面 $PEF \cap$ 平面 $ABCD = EF$, $PO \subset$ 平面 PEF ,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

由题意可得: $PE = 2\sqrt{3}, PF = 2, EF = 4$, 则 $PE^2 + PF^2 = EF^2$, 即 $PE \perp PF$,

则 $\frac{1}{2} PE \cdot PF = \frac{1}{2} PO \cdot EF$, 可得 $PO = \frac{PE \cdot PF}{EF} = \sqrt{3}$,

所以四棱锥的高为 $\sqrt{3}$.

当相对的棱长相等时, 不妨设 $PA = PC = 4, PB = PD = 2\sqrt{2}$,

因为 $BD = 4\sqrt{2} = PB + PD$ ，此时不能形成三角形 PBD ，与题意不符，这种情况不存在。

故选：D.

9. 已知 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) 是函数 $y = 2^x$ 图象上不同的两点，则下列正确的是 ()

A. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \frac{x_1 + x_2}{2}$

B. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$

C. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > x_1 + x_2$

D. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < x_1 + x_2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断 AB；举例判断 CD 即可。

【详解】由题意不妨设 $x_1 < x_2$ ，因为函数 $y = 2^x$ 是增函数，所以 $0 < 2^{x_1} < 2^{x_2}$ ，即 $0 < y_1 < y_2$ ，

对于选项 AB：可得 $\frac{2^{x_1} + 2^{x_2}}{2} > \sqrt{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} = 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$ ，即 $\frac{y_1 + y_2}{2} > 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}} > 0$ ，

根据函数 $y = \log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \log_2 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，故 A 正确，B 错误；

对于选项 C：例如 $x_1 = 0, x_2 = 1$ ，则 $y_1 = 1, y_2 = 2$ ，

可得 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} = \log_2 \frac{3}{2} \in (0, 1)$ ，即 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < 1 = x_1 + x_2$ ，故 C 错误；

对于选项 D：例如 $x_1 = -1, x_2 = -2$ ，则 $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{4}$ ，

可得 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} = \log_2 \frac{3}{8} = \log_2 3 - 3 \in (-2, -1)$ ，即 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > -3 = x_1 + x_2$ ，故 D 错误，

故选：A.

10. 若集合 $\{(x, y) \mid y = x + t(x^2 - x), 0 \leq t \leq 1, 1 \leq x \leq 2\}$ 表示的图形中，两点间最大距离为 d 、面积为 S ，

则 ()

A. $d = 3, S < 1$

B. $d = 3, S > 1$

C. $d = \sqrt{10}, S < 1$

D. $d = \sqrt{10}, S > 1$

【答案】C

【解析】

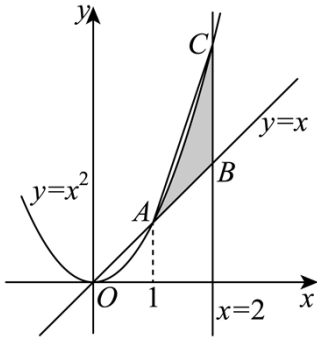
【分析】先以 t 为变量，分析可知所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \geq x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ，结合图形分析求解即可。

【详解】对任意给定 $x \in [1, 2]$ ，则 $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ ，且 $t \in [0, 1]$ ，

可知 $x \leq x + t(x^2 - x) \leq x + x^2 - x = x^2$ ，即 $x \leq y \leq x^2$ ，

再结合 x 的任意性，所以所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \geq x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ，

如图阴影部分所示，其中 $A(1,1), B(2,2), C(2,4)$ ，



可知任意两点间距离最大值 $d = |AC| = \sqrt{10}$ ；

阴影部分面积 $S < S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ 。

故选：C。

【点睛】方法点睛：数形结合的重点是“以形助数”，在解题时要注意培养这种思想意识，做到心中有图，见数想图，以开拓自己的思维。使用数形结合法的前提是题目中的条件有明确的几何意义，解题时要准确把握条件、结论与几何图形的对应关系，准确利用几何图形中的相关结论求解。

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知抛物线 $y^2 = 16x$ ，则焦点坐标为_____。

【答案】(4,0)

【解析】

【分析】形如 $y^2 = 2px, (p \neq 0)$ 的抛物线的焦点坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ，由此即可得解。

【详解】由题意抛物线的标准方程为 $y^2 = 16x$ ，所以其焦点坐标为(4,0)。

故答案为：(4,0)。

12. 已知 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 且 α 与 β 的终边关于原点对称, 则 $\cos \beta$ 的最大值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 首先得出 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 结合三角函数单调性即可求解最值.

【详解】 由题意 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 从而 $\cos \beta = \cos(\alpha + \pi + 2k\pi) = -\cos \alpha$,

因为 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 所以 $\cos \alpha$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $\cos \beta$ 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$,

当且仅当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 即 $\beta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $\cos \beta$ 取得最大值, 且最大值为 $-\frac{1}{2}$.

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 则过 $(3, 0)$ 且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为_____.

【答案】 $\pm \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 首先说明直线斜率存在, 然后设出方程, 联立双曲线方程, 根据交点个数与方程根的情况列式即可求解.

【详解】 联立 $x = 3$ 与 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 解得 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, 这表明满足题意的直线斜率一定存在,

设所求直线斜率为 k , 则过点 $(3, 0)$ 且斜率为 k 的直线方程为 $y = k(x - 3)$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ y = k(x - 3) \end{cases}$, 化简并整理得: $(1 - 4k^2)x^2 + 24k^2x - 36k^2 - 4 = 0$,

由题意得 $1 - 4k^2 = 0$ 或 $\Delta = (24k^2)^2 + 4(36k^2 + 4)(1 - 4k^2) = 0$,

解得 $k = \pm \frac{1}{2}$ 或无解, 即 $k = \pm \frac{1}{2}$, 经检验, 符合题意.

故答案为: $\pm \frac{1}{2}$.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列. 第一个圆柱的直径为 65mm, 第二、三个圆柱的直径为 325mm, 第三个圆柱的高为 230mm, 求前两个圆柱的高度分别为_____.

【答案】 $\frac{115}{2}$ mm, 23 mm

【解析】

【分析】 根据体积为公比为 10 的等比数列可得关于高度的方程组， 求出其解后可得前两个圆柱的高度.

【详解】 设第一个圆柱的高为 h_1 ， 第二个圆柱的高为 h_2 ， 则 $\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}{\pi\left(\frac{65}{2}\right)^2 h_1} = \frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230}{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2} = 10$ ，

故 $h_2 = 23$ mm， $h_1 = \frac{115}{2}$ mm，

故答案为： $\frac{115}{2}$ mm, 23 mm.

15. 已知 $M = \{k \mid a_k = b_k\}$ ， a_n ， b_n 不为常数数列且各项均不相同， 下列正确的是_____.

- ① a_n ， b_n 均为等差数列， 则 M 中最多一个元素；
- ② a_n ， b_n 均为等比数列， 则 M 中最多三个元素；
- ③ a_n 为等差数列， b_n 为等比数列， 则 M 中最多三个元素；
- ④ a_n 单调递增， b_n 单调递减， 则 M 中最多一个元素.

【答案】 ①③④

【解析】

【分析】 利用两类数列的散点图的特征可判断①④的正误， 利用反例可判断②的正误， 结合通项公式的特征及反证法可判断③的正误.

【详解】 对于①， 因为 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 均为等差数列， 故它们的散点图分布在直线上， 而两条直线至多有一个公共点， 故 M 中至多一个元素， 故①正确.

对于②， 取 $a_n = 2^{n-1}$ ， $b_n = -(-2)^{n-1}$ ， 则 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 均为等比数列，

但当 n 为偶数时， 有 $a_n = 2^{n-1} = b_n = -(-2)^{n-1}$ ， 此时 M 中有无穷多个元素，

故②错误.

对于③， 设 $b_n = Aq^n$ ($Aq \neq 0, q \neq \pm 1$)， $a_n = kn + b$ ($k \neq 0$)，

若 M 中至少四个元素， 则关于 n 的方程 $Aq^n = kn + b$ 至少有 4 个不同的正数解，

若 $q > 0, q \neq 1$ ， 则由 $y = Aq^n$ 和 $y = kn + b$ 的散点图可得关于 n 的方程 $Aq^n = kn + b$ 至多有两个不同的解， 矛盾；

若 $q < 0, q \neq \pm 1$, 考虑关于 n 的方程 $Aq^n = kn + b$ 奇数解的个数和偶数解的个数,

当 $Aq^n = kn + b$ 有偶数解, 此方程即为 $A|q|^n = kn + b$,

方程至多有两个偶数解, 且有两个偶数解时 $Ak \ln|q| > 0$,

否则 $Ak \ln|q| < 0$, 因 $y = A|q|^n, y = kn + b$ 单调性相反,

方程 $A|q|^n = kn + b$ 至多一个偶数解,

当 $Aq^n = kn + b$ 有奇数解, 此方程即为 $-A|q|^n = kn + b$,

方程至多有两个奇数解, 且有两个奇数解时 $-Ak \ln|q| > 0$ 即 $Ak \ln|q| < 0$

否则 $Ak \ln|q| > 0$, 因 $y = -A|q|^n, y = kn + b$ 单调性相反,

方程 $A|q|^n = kn + b$ 至多一个奇数解,

因为 $Ak \ln|q| > 0, Ak \ln|q| < 0$ 不可能同时成立,

故 $Aq^n = kn + b$ 不可能有 4 个不同的正数解, 故③正确.

对于④, 因为 $\{a_n\}$ 为单调递增, $\{b_n\}$ 为递减数列, 前者散点图呈上升趋势,

后者的散点图呈下降趋势, 两者至多一个交点, 故④正确.

故答案为: ①③④

【点睛】思路点睛: 对于等差数列和等比数列的性质的讨论, 可以利用两者散点图的特征来分析, 注意讨论两者性质关系时, 等比数列的公比可能为负, 此时要注意合理转化.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 7$, A 为钝角, $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B$.

(1) 求 $\angle A$;

(2) 从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

① $b = 7$; ② $\cos B = \frac{13}{14}$; ③ $c \sin A = \frac{5}{2} \sqrt{3}$.

注: 如果选择条件①、条件②和条件③分别解答, 按第一个解答计分.

【答案】(1) $A = \frac{2\pi}{3}$;

(2) 选择①无解; 选择②和③ $\triangle ABC$ 面积均为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【解析】

【分析】(1) 利用正弦定理即可求出答案；

(2) 选择①，利用正弦定理得 $B = \frac{\pi}{3}$ ，结合 (1) 问答案即可排除；选择②，首先求出 $\sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ，再代入式子得 $b = 3$ ，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin C$ ，最后利用三角形面积公式即可；选择③，首先得到 $c = 5$ ，再利用正弦定理得到 $\sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin B$ ，最后利用三角形面积公式即可；

【小问 1 详解】

由题意得 $2\sin B \cos B = \frac{\sqrt{3}}{7}b \cos B$ ，因为 A 为钝角，

则 $\cos B \neq 0$ ，则 $2\sin B = \frac{\sqrt{3}}{7}b$ ，则 $\frac{b}{\sin B} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{7}} = \frac{a}{\sin A} = \frac{7}{\sin A}$ ，解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

因为 A 为钝角，则 $A = \frac{2\pi}{3}$ 。

【小问 2 详解】

选择① $b = 7$ ，则 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{14}b = \frac{\sqrt{3}}{14} \times 7 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，因为 $A = \frac{2\pi}{3}$ ，则 B 为锐角，则 $B = \frac{\pi}{3}$ ，

此时 $A + B = \pi$ ，不合题意，舍弃；

选择② $\cos B = \frac{13}{14}$ ，因为 B 为三角形内角，则 $\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ，

则代入 $2\sin B = \frac{\sqrt{3}}{7}b$ 得 $2 \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{7}b$ ，解得 $b = 3$ ，

$\sin C = \sin(A + B) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + B\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos B + \cos\frac{2\pi}{3}\sin B$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{13}{14} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ，

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ 。

选择③ $c \sin A = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ ，则有 $c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ ，解得 $c = 5$ ，

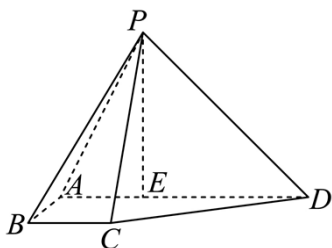
则由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sin C}$, 解得 $\sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$,

因为 C 为三角形内角, 则 $\cos C = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2} = \frac{11}{14}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \sin B &= \sin(A+C) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + C\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos C + \cos\frac{2\pi}{3}\sin C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

17. 已知四棱锥 $P-ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = BC = 1$, $AD = 3$, $DE = PE = 2$, E 是 AD 上一点, $PE \perp AD$.



(1) 若 F 是 PE 中点, 证明: $BF \parallel$ 平面 PCD .

(2) 若 $AB \perp$ 平面 PED , 求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{30}}{30}$

【解析】

【分析】 (1) 取 PD 的中点为 S , 接 SF, SC , 可证四边形 $SFBC$ 为平行四边形, 由线面平行的判定定理可得 $BF \parallel$ 平面 PCD .

(2) 建立如图所示的空间直角坐标系, 求出平面 APB 和平面 PCD 的法向量后可求夹角的余弦值.

【小问 1 详解】

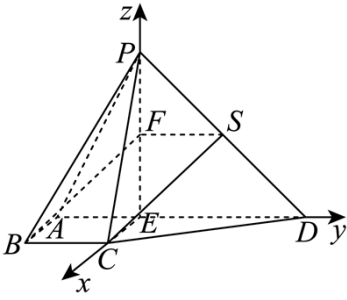
取 PD 的中点为 S , 接 SF, SC , 则 $SF \parallel ED, SF = \frac{1}{2}ED = 1$,

而 $ED \parallel BC, ED = 2BC$, 故 $SF \parallel BC, SF = BC$, 故四边形 $SFBC$ 为平行四边形,

故 $BF \parallel SC$, 而 $BF \not\subset$ 平面 PCD , $SC \subset$ 平面 PCD ,

所以 $BF \parallel$ 平面 PCD .

【小问 2 详解】



因为 $ED=2$ ，故 $AE=1$ ，故 $AE\parallel BC, AE=BC$ ，

故四边形 $AECB$ 为平行四边形，故 $CE\parallel AB$ ，所以 $CE\perp$ 平面 PAD ，

而 $PE, ED\subset$ 平面 PAD ，故 $CE\perp PE, CE\perp ED$ ，而 $PE\perp ED$ ，

故建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0), B(1,-1,0), C(1,0,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$ ，

则 $\overrightarrow{PA}=(0,-1,-2), \overrightarrow{PB}=(1,-1,-2), \overrightarrow{PC}=(1,0,-2), \overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$ ，

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$ ，

$$\text{则由 } \begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} -y-2z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{m}=(0,-2,1),$$

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$ ，

$$\text{则由 } \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} a-2b=0 \\ 2b-2c=0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}=(2,1,1),$$

$$\text{故 } \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{30}}{30},$$

故平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{30}$

18. 已知某险种的保费为 0.4 万元，前 3 次出险每次赔付 0.8 万元，第 4 次赔付 0.6 万元

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

在总体中抽样 100 单，以频率估计概率：

(1) 求随机抽取一单，赔偿不少于 2 次的概率；

(2) (i) 毛利润是保费与赔偿金额之差。设毛利润为 X ，估计 X 的数学期望；

(ii) 若未赔偿过的保单下一保险期的保费下降4%，已赔偿过的增加20%。估计保单下一保险期毛利润的数学期望。

【答案】 (1) $\frac{1}{10}$

(2) (i) 0.122 万元 (ii) 0.1252 万元

【解析】

【分析】 (1) 根据题设中的数据可求赔偿次数不少 2 的概率；

(2) (i) 设 ξ 为赔付金额，则 ξ 可取 0, 0.8, 1.6, 2.4, 3，用频率估计概率后可求 ξ 的分布列及数学期望，从而可求 $E(X)$ 。

(ii) 先算出下一期保费的变化情况，结合 (1) 的结果可求 $E(Y)$ 。

【小问 1 详解】

设 A 为“随机抽取一单，赔偿不少于 2 次”，

由题设中的统计数据可得 $P(A) = \frac{60+30+10}{800+100+60+30+10} = \frac{1}{10}$ 。

【小问 2 详解】

(i) 设 ξ 为赔付金额，则 ξ 可取 0, 0.8, 1.6, 2.4, 3，

由题设中的统计数据可得 $P(\xi = 0) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$, $P(\xi = 0.8) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$,

$P(\xi = 1.6) = \frac{60}{1000} = \frac{3}{50}$, $P(\xi = 2.4) = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$,

$P(\xi = 3) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$,

故 $E(\xi) = 0 \times \frac{4}{5} + 0.8 \times \frac{1}{10} + 1.6 \times \frac{3}{50} + 2.4 \times \frac{3}{100} + 3 \times \frac{1}{100} = 0.278$

故 $E(X) = 0.4 - 0.278 = 0.122$ (万元)。

(ii) 由题设保费的变化为 $0.4 \times \frac{4}{5} \times 96\% + 0.4 \times \frac{1}{5} \times 1.2 = 0.4032$,

故 $E(Y) = 0.122 + 0.4032 - 0.4 = 0.1252$ (万元)

19. 已知椭圆方程 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形，过 $(0, t) (t > \sqrt{2})$

的直线 l 与椭圆交于 $A, B, C(0, 1)$ ，连接 AC 交椭圆于 D 。

(1) 求椭圆方程和离心率；

(2) 若直线 BD 的斜率为 0，求 t 。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $t = 2$

【解析】

【分析】(1) 由题意得 $b = c = \sqrt{2}$ ，进一步得 a ，由此即可得解；

(2) 说明直线 AB 斜率存在，设 $AB: y = kx + t, (t > \sqrt{2})$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，联立椭圆方程，由韦达定理有 $x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2t^2-4}{2k^2+1}$ ，而 $AD: y = \frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}(x-x_1) + y_1$ ，令 $x = 0$ ，即可得解。

【小问 1 详解】

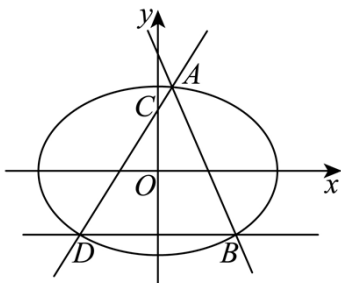
由题意 $b = c = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，从而 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$ ，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，离心率为 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

【小问 2 详解】

显然直线 AB 斜率存在，否则 B, D 重合，直线 BD 斜率不存在与题意不符，

同样直线 AB 斜率不为 0，否则直线 AB 与椭圆无交点，矛盾，



从而设 $AB: y = kx + t, (t > \sqrt{2})$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + t \end{cases}, \text{化简并整理得 } (1+2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 4 = 0,$$

由题意 $\Delta = 16k^2t^2 - 8(2k^2+1)(t^2-2) = 8(4k^2+2-t^2) > 0$ ，即 k, t 应满足 $4k^2+2-t^2 > 0$ ，

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2t^2-4}{2k^2+1},$$

若直线 BD 斜率为 0，由椭圆的对称性可设 $D(-x_2, y_2)$ ，

所以 $AD: y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}(x - x_1) + y_1$, 在直线 AD 方程中令 $x = 0$,

$$\text{得 } y_C = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} = \frac{x_1(kx_2 + t) + x_2(kx_1 + t)}{x_1 + x_2} = \frac{2kx_1 x_2 + t(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{4k(t^2 - 2)}{-4kt} + t = \frac{2}{t} = 1,$$

所以 $t = 2$,

$$\text{此时 } k \text{ 应满足 } \begin{cases} 4k^2 + 2 - t^2 = 4k^2 - 2 > 0 \\ k \neq 0 \end{cases}, \text{ 即 } k \text{ 应满足 } k < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } k > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

综上所述, $t = 2$ 满足题意, 此时 $k < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 已知 $f(x) = x + k \ln(1+x)$ 在 $(t, f(t)) (t > 0)$ 处切线为 l .

(1) 若切线 l 的斜率 $k = -1$, 求 $f(x)$ 单调区间;

(2) 证明: 切线 l 不经过 $(0, 0)$;

(3) 已知 $k = 1$, $A(t, f(t))$, $C(0, f(t))$, $O(0, 0)$, 其中 $t > 0$, 切线 l 与 y 轴交于点 B 时. 当

$2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$, 符合条件的 A 的个数为?

(参考数据: $1.09 < \ln 3 < 1.10$, $1.60 < \ln 5 < 1.61$, $1.94 < \ln 7 < 1.95$)

【答案】 (1) 单调递减区间为 $(-1, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 证明见解析 (3) 2

【解析】

【分析】 (1) 直接代入 $k = -1$, 再利用导数研究其单调性即可;

(2) 写出切线方程 $y - f(t) = \left(1 + \frac{k}{1+t}\right)(x - t) (t > 0)$, 将 $(0, 0)$ 代入再设新函数 $F(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$,

利用导数研究其零点即可;

(3) 分别写出面积表达式, 代入 $2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$ 得到 $13\ln(1+t) - 2t - 15\frac{t}{1+t} = 0$, 再设新函数

$h(t) = 13\ln(1+t) - 2t - \frac{15t}{1+t} (t > 0)$ 研究其零点即可.

【小问 1 详解】

$$f(x) = x - \ln(1+x), f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} (x > -1),$$

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) > 0$;

$\therefore f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

【小问 2 详解】

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{1+x}, \text{ 切线 } l \text{ 的斜率为 } 1 + \frac{k}{1+t},$$

$$\text{则切线方程为 } y - f(t) = \left(1 + \frac{k}{1+t}\right)(x - t) (t > 0),$$

$$\text{将 } (0, 0) \text{ 代入则 } -f(t) = -t \left(1 + \frac{k}{1+t}\right), f(t) = t \left(1 + \frac{k}{1+t}\right),$$

$$\text{即 } t + k \ln(1+t) = t + t \frac{k}{1+t}, \text{ 则 } \ln(1+t) = \frac{t}{1+t}, \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} = 0,$$

$$\text{令 } F(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t},$$

假设 l 过 $(0, 0)$, 则 $F(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 存在零点.

$$F'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} > 0, \therefore F(t) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, } F(t) > F(0) = 0,$$

$\therefore F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 无零点, \therefore 与假设矛盾, 故直线 l 不过 $(0, 0)$.

【小问 3 详解】

$$k=1 \text{ 时, } f(x) = x + \ln(1+x), f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x+2}{1+x} > 0.$$

$$S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} t f(t), \text{ 设 } l \text{ 与 } y \text{ 轴交点 } B \text{ 为 } (0, q),$$

$t > 0$ 时, 若 $q < 0$, 则此时 l 与 $f(x)$ 必有交点, 与切线定义矛盾.

由 (2) 知 $q \neq 0$. 所以 $q > 0$,

$$\text{则切线 } l \text{ 的方程为 } y - t - \ln(t+1) = \left(1 + \frac{1}{1+t}\right)(x - t),$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 则 } y=q = y = \ln(1+t) - \frac{t}{t+1}.$$

$$\therefore 2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}, \text{ 则 } 2t f(t) = 15t \left[\ln(1+t) - \frac{t}{t+1} \right],$$

$$\therefore 13 \ln(1+t) - 2t - 15 \frac{t}{1+t} = 0, \text{ 记 } h(t) = 13 \ln(1+t) - 2t - \frac{15t}{1+t} (t > 0),$$

\therefore 满足条件的 A 有几个即 $h(t)$ 有几个零点.

$$h'(t) = \frac{13}{1+t} - 2 - \frac{15}{(t+1)^2} = \frac{13t+13-2(t^2+2t+1)-15}{(t+1)^2} = \frac{2t^2+9t-4}{(t+1)^2} = \frac{(-2t+1)(t-4)}{(t+1)^2},$$

当 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $h'(t) < 0$, 此时 $h(t)$ 单调递减;

当 $t \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 时, $h'(t) > 0$, 此时 $h(t)$ 单调递增;

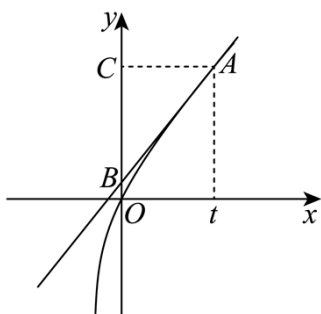
当 $t \in (4, +\infty)$ 时, $h'(t) < 0$, 此时 $h(t)$ 单调递减;

因为 $h(0) = 0, h\left(\frac{1}{2}\right) < 0, h(4) = 13 \ln 5 - 20 \approx 13 \times 1.6 - 20 = 0.8 > 0$,

$$h(24) = 13 \ln 25 - 48 - \frac{15 \times 24}{25} = 26 \ln 5 - 48 - \frac{72}{5} < 26 \times 1.61 - 48 - \frac{72}{5} = -20.54 < 0,$$

所以由零点存在性定理及 $h(t)$ 的单调性, $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 上必有一个零点, 在 $(4, 24)$ 上必有一个零点,

综上所述, $h(t)$ 有两个零点, 即满足 $2S_{ACO} = 15S_{ABO}$ 的 A 有两个.



【点睛】 关键点点睛: 本题第二问的关键是采用的是反证法, 转化为研究函数零点问题.

21. 设集合 $M = \{(i, j, s, t) | i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}, s \in \{5, 6\}, t \in \{7, 8\}, 2 | (i + j + s + t)\}$. 对于给定有穷数列

$A: \{a_n\} (1 \leq n \leq 8)$, 及序列 $\Omega: \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s, \omega_k = (i_k, j_k, s_k, t_k) \in M$, 定义变换 T : 将数列 A 的第

i_1, j_1, s_1, t_1 项加 1, 得到数列 $T_1(A)$; 将数列 $T_1(A)$ 的第 i_2, j_2, s_2, t_2 项加 1, 得到数列 $T_2 T_1(A) \dots$; 重复上述

操作, 得到数列 $T_s \dots T_2 T_1(A)$, 记为 $\Omega(A)$.

(1) 给定数列 $A: 1, 3, 2, 4, 6, 3, 1, 9$ 和序列 $\Omega: (1, 3, 5, 7), (2, 4, 6, 8), (1, 3, 5, 7)$, 写出 $\Omega(A)$;

(2) 是否存在序列 Ω , 使得 $\Omega(A)$ 为 $a_1 + 2, a_2 + 6, a_3 + 4, a_4 + 2, a_5 + 8, a_6 + 2, a_7 + 4, a_8 + 4$, 若存在, 写出一个符合条件的 Ω ; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若数列 A 的各项均为正整数, 且 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 为偶数, 证明: “存在序列 Ω , 使得 $\Omega(A)$ 为常数

列”的充要条件为“ $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$ ”.

【答案】 (1) $\Omega(A): 3, 4, 4, 5, 8, 4, 3, 10$

(2) 不存在符合条件的 Ω , 理由见解析

(3) 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 直接按照 $\Omega(A)$ 的定义写出 $\Omega(A)$ 即可;

(2) 利用反证法, 假设存在符合条件的 Ω , 由此列出方程组, 进一步说明方程组无解即可;

(3) 分充分性和必要性两方面论证.

【小问 1 详解】

由题意得 $\Omega(A): 3, 4, 4, 5, 8, 4, 3, 10$;

【小问 2 详解】

假设存在符合条件的 Ω , 可知 $\Omega(A)$ 的第 1, 2 项之和为 $a_1 + a_2 + s$, 第 3, 4 项之和为 $a_3 + a_4 + s$,

$$\text{则} \begin{cases} (a_1 + 2) + (a_2 + 6) = a_1 + a_2 + s \\ (a_3 + 4) + (a_4 + 2) = a_3 + a_4 + s \end{cases}, \text{ 而该方程组无解, 故假设不成立,}$$

故不存在符合条件的 Ω ;

【小问 3 详解】

我们设序列 $T_k \dots T_2 T_1(A)$ 为 $\{a_{k,n}\} (1 \leq n \leq 8)$, 特别规定 $a_{0,n} = a_n (1 \leq n \leq 8)$.

必要性:

若存在序列 $\Omega: \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$, 使得 $\Omega(A)$ 为常数列.

则 $a_{s,1} = a_{s,2} = a_{s,3} = a_{s,4} = a_{s,5} = a_{s,6} = a_{s,7} = a_{s,8}$, 所以 $a_{s,1} + a_{s,2} = a_{s,3} + a_{s,4} = a_{s,5} + a_{s,6} = a_{s,7} + a_{s,8}$.

根据 $T_k \dots T_2 T_1(A)$ 的定义, 显然有 $a_{k,2j-1} + a_{k,2j} = a_{k-1,2j-1} + a_{k-1,2j}$, 这里 $j = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, \dots$.

所以不断使用该式就得到, $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$, 必要性得证.

充分性:

若 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$.

由已知, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 为偶数, 而 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$, 所以

$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 4(a_1 + a_2) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$ 也是偶数.

我们设 $T_s \dots T_2 T_1(A)$ 是通过合法的序列 Ω 的变换能得到的所有可能的数列 $\Omega(A)$ 中, 使得

$$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| \text{ 最小的一个.}$$

上面已经证明 $a_{k,2j-1} + a_{k,2j} = a_{k-1,2j-1} + a_{k-1,2j}$, 这里 $j=1,2,3,4$, $k=1,2,\dots$.

从而由 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$ 可得 $a_{s,1} + a_{s,2} = a_{s,3} + a_{s,4} = a_{s,5} + a_{s,6} = a_{s,7} + a_{s,8}$.

同时, 由于 $i_k + j_k + s_k + t_k$ 总是偶数, 所以 $a_{k,1} + a_{k,3} + a_{k,5} + a_{k,7}$ 和 $a_{k,2} + a_{k,4} + a_{k,6} + a_{k,8}$ 的奇偶性保持不变, 从而 $a_{s,1} + a_{s,3} + a_{s,5} + a_{s,7}$ 和 $a_{s,2} + a_{s,4} + a_{s,6} + a_{s,8}$ 都是偶数.

下面证明不存在 $j=1,2,3,4$ 使得 $|a_{s,2j-1} - a_{s,2j}| \geq 2$.

假设存在, 根据对称性, 不妨设 $j=1$, $a_{s,2j-1} - a_{s,2j} \geq 2$, 即 $a_{s,1} - a_{s,2} \geq 2$.

情况 1: 若 $|a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| = 0$, 则由 $a_{s,1} + a_{s,3} + a_{s,5} + a_{s,7}$ 和 $a_{s,2} + a_{s,4} + a_{s,6} + a_{s,8}$ 都是偶数, 知 $a_{s,1} - a_{s,2} \geq 4$.

对该数列连续作四次变换 $(2,3,5,8), (2,4,6,8), (2,3,6,7), (2,4,5,7)$ 后, 新的

$$|a_{s+4,1} - a_{s+4,2}| + |a_{s+4,3} - a_{s+4,4}| + |a_{s+4,5} - a_{s+4,6}| + |a_{s+4,7} - a_{s+4,8}| \text{ 相比原来的}$$

$$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| \text{ 减少 } 4, \text{ 这与}$$

$$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| \text{ 的最小性矛盾;}$$

情况 2: 若 $|a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| > 0$, 不妨设 $|a_{s,3} - a_{s,4}| > 0$.

情况 2-1: 如果 $a_{s,3} - a_{s,4} \geq 1$, 则对该数列连续作两次变换 $(2,4,5,7), (2,4,6,8)$ 后, 新的

$$|a_{s+2,1} - a_{s+2,2}| + |a_{s+2,3} - a_{s+2,4}| + |a_{s+2,5} - a_{s+2,6}| + |a_{s+2,7} - a_{s+2,8}| \text{ 相比原来的}$$

$$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| \text{ 至少减少 } 2, \text{ 这与}$$

$$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| \text{ 的最小性矛盾;}$$

情况 2-2: 如果 $a_{s,4} - a_{s,3} \geq 1$, 则对该数列连续作两次变换 $(2,3,5,8), (2,3,6,7)$ 后, 新的

$$|a_{s+2,1} - a_{s+2,2}| + |a_{s+2,3} - a_{s+2,4}| + |a_{s+2,5} - a_{s+2,6}| + |a_{s+2,7} - a_{s+2,8}| \text{ 相比原来的}$$

$$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| \text{ 至少减少 } 2, \text{ 这与}$$

$$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}| \text{ 的最小性矛盾.}$$

这就说明无论如何都会导致矛盾，所以对任意的 $j = 1, 2, 3, 4$ 都有 $|a_{s,2j-1} - a_{s,2j}| \leq 1$.

假设存在 $j = 1, 2, 3, 4$ 使得 $|a_{s,2j-1} - a_{s,2j}| = 1$ ，则 $a_{s,2j-1} + a_{s,2j}$ 是奇数，所以

$a_{s,1} + a_{s,2} = a_{s,3} + a_{s,4} = a_{s,5} + a_{s,6} = a_{s,7} + a_{s,8}$ 都是奇数，设为 $2N + 1$.

则此时对任意 $j = 1, 2, 3, 4$ ，由 $|a_{s,2j-1} - a_{s,2j}| \leq 1$ 可知必有 $\{a_{s,2j-1}, a_{s,2j}\} = \{N, N + 1\}$.

而 $a_{s,1} + a_{s,3} + a_{s,5} + a_{s,7}$ 和 $a_{s,2} + a_{s,4} + a_{s,6} + a_{s,8}$ 都是偶数，故集合 $\{m | a_{s,m} = N\}$ 中的四个元素 i, j, s, t 之和

为偶数，对该数列进行一次变换 (i, j, s, t) ，则该数列成为常数列，新的

$|a_{s+1,1} - a_{s+1,2}| + |a_{s+1,3} - a_{s+1,4}| + |a_{s+1,5} - a_{s+1,6}| + |a_{s+1,7} - a_{s+1,8}|$ 等于零，比原来的

$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}|$ 更小，这与

$|a_{s,1} - a_{s,2}| + |a_{s,3} - a_{s,4}| + |a_{s,5} - a_{s,6}| + |a_{s,7} - a_{s,8}|$ 的最小性矛盾.

综上，只可能 $|a_{s,2j-1} - a_{s,2j}| = 0 (j = 1, 2, 3, 4)$ ，而 $a_{s,1} + a_{s,2} = a_{s,3} + a_{s,4} = a_{s,5} + a_{s,6} = a_{s,7} + a_{s,8}$ ，故

$\{a_{s,n}\} = \Omega(A)$ 是常数列，充分性得证.

【点睛】 关键点点睛：本题第三问的关键在于对新定义的理解，以及对其本质的分析.