1995年北京高考文科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，满分150分，考试时间120分钟.

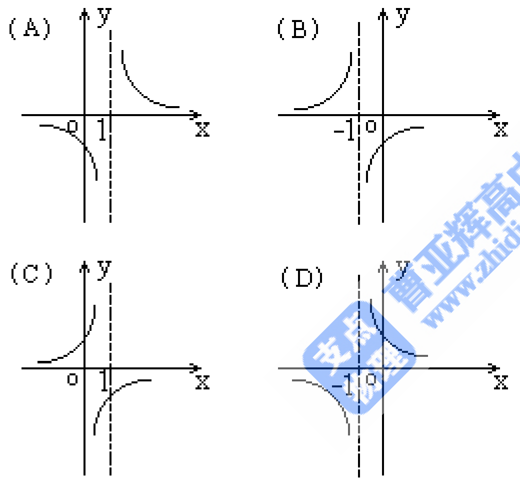
第Ⅰ卷(选择题共65分)

一、选择题(本大题共15小题；第1－10题每小题4分，第11－15题每小题5分，共65分，在每小题给出的四个选项中，只有一项有符合题目要求的）.

1．已知集合 $I=\{0，-1，-2，-3，-4\}$，集合 $M=\{0，-1，-2，\}$，$N=\{0，-3，-4\}$，则 $\bar{M}\cap N=$(　　)

(A) {0}　　(B) {－3，－4}　　(C) {－1，－2}　　(D) ϕ

2．函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的图像是(　　)



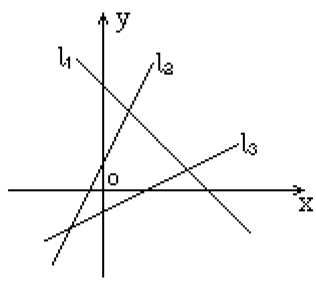
3．函数 $y=4\sin(3x+\dfrac{\pi}{4})+3\cos(3x+\dfrac{\pi}{4})$ 的最小正周期是(　　)

(A) 6π　　(B) 2π　　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

4．正方体的全面积是 a^2，它的顶点都在球面上，这个球的表面积是(　　)

(A) $\dfrac{\pi a^2}{3}$　　(B) $\dfrac{\pi a^2}{2}$　　(C) $2\pi a^2$　　(D) $3\pi a^2$

5．若图中的直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则(　　)



(A) $k_1<k_2<k_3$

(B) $k_3<k_1<k_2$

(C) $k_3 < k_2 < k_1$

(D) $k_1 < k_3 < k_2$

6．双曲线 $3x^2-y^2=3$ 的渐近线方程是(　　)

(A) $y=\pm 3x$　　(B) $\pm\dfrac{x}{3}$　　(C) $y=\pm\sqrt{3}x$　　(D) $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

7．使 $\sin x \leqslant \cos x$ 成立的 x 的一个变化区间是(　　)

(A) $\left[-\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{\pi}{4}\right]$　　(B) $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

(C) $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$　　(D) $[0, \pi]$

8．$x^2+y^2-2x=0$ 和 $x^2+y^2+4y=0$ 的位置关系是(　　)

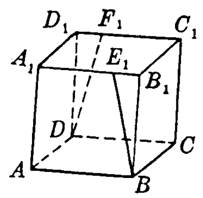
(A) 相离　　(B) 外切　　(C) 相交　　(D) 内切

9．已知 θ 是第三象限角，且 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{5}{9}$，那么 $\sin 2\theta$ 等于(　　)

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　(B) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $-\dfrac{2}{3}$

10．如图 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，$B_1E_1=D_1F_1=\dfrac{A_1B_1}{4}$，则 BE_1 与 DF_1 所成的角的余弦值是(　　)

(A) $\dfrac{15}{17}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{8}{17}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



11．已知 $y=\log_a(2-x)$ 是 x 的增函数，则 a 的取值范围是(　　)

(A) $(0, 2)$　　(B) $(0, 1)$　　(C) $(1, 2)$　　(D) $(2, +\infty)$

12．在 $(1-x^3)(1+x)10$ 的展开式中，x^5 的系数是(　　)

(A) -297　　(B) -252　　(C) 297　　(D) 207

13．已知直线 $l\perp$ 平面 α，直线 $m\subset$ 平面 β，有下面四个命题，

① $\alpha /\!/ \beta \Rightarrow l\perp m$　　② $\alpha\perp\beta\Rightarrow l /\!/ m$　　③ $l /\!/ m\Rightarrow \alpha\perp\beta$　　④ $l\perp m\Rightarrow \alpha /\!/ \beta$

其中正确的两个命题是(　　)

(A) ①与②　　(B) ③与④　　(C) ②与④　　(D) ①与③

14．等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n 与 T_n，若 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 等于(　　)

(A) 1　　　　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　　　(D) $\dfrac{4}{9}$

15．用 1，2，3，4，5 这五个数字，组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有(　　)

(A) 24 个　　　　(B) 30 个　　　　(C) 40 个　　　　(D) 60 个

第Ⅱ卷(非选择题共 85 分)

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在题中的横线上)

16．方程 $\log_2(x+1)^2+\log_4(x+1)=5$ 的解是_____________．

17．已知圆台上、下底面圆周都在球面上，且下底面过球心，母线与底面所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则圆台的体积与球体积之比为____________．

18．函数 $y=\cos x+\cos(x+\dfrac{\pi}{3})$ 的最大值是____________．

19．若直线 l 过抛物线 $y^2=4(x+1)$ 的焦点，并且与 x 轴垂直，则 l 被抛物线截得的线段长为______________．

20．四个不同的小球放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子中，则恰有一个空盒的放法共有____________种(用数字作答)．

三、解答题(本大题共 6 小题，共 65 分：解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

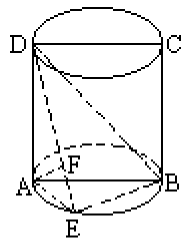
21．(本小题满分 7 分)解方程 $3^{x+2}-3^{2-x}=80$.

22．(本小题满分 12 分)设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in(\pi, 2\pi)$，求复数 z^2+z 的模和辐角．

23．(本小题满分 10 分)设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，S_n 是其前 n 项和，证明：

$$\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}.$$

24．(本小题满分 12 分)如图，$ABCD$ 是圆柱的轴截面，点 E 在底面的圆周上，$AF\perp DE$，F 是垂足.



(1)求证：$AF\perp DB$

(2)如果 $AB=a$，圆柱与三棱锥 $D-ABE$ 的体积比等于 3π，求点 E 到截面 $ABCD$ 的距离.

25．(本小题满分 12 分)某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，

决定对淡水鱼养值提供政府补贴，设淡水鱼的市场价格为 x元/千克，政府补贴为 t元/千克，根据市场调查，当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 p 千克与市场日需求量 Q 近似地满足关系：

$P=1000(x+t-8)$　$(x\geqslant 8,\ t\geqslant 0)$，

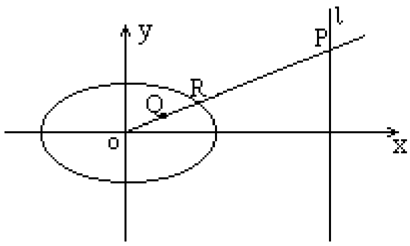
$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}$　$(8\leqslant x\leqslant 14)$，

当 $P=Q$ 时的市场价格为市场平衡价格，

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域：

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少每千克多少元？

26．(本小题满分 12 分)已知椭圆 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=1$，直线 l：$x=12$，P 是 l 上一点，射线 OP 交椭圆于点 R，又点 Q 在 OP 上，且满足 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$，当点 P 在 l 上移动时，求点 Q 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线.



参考答案

一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1．B　2．D　3．C　4．B　5．D　6．C　7．A　8．C　9．A　10．A　11．B　12．D　13．D　14．C　15．A

二、填空题(本题考查基本知识和基本运算)

16．3　　17．$\dfrac{7\sqrt{3}}{32}$　　18．$\sqrt{3}$　　19．4　　20．144

三、解答题

21．本小题主要考查指数方程的解法及运算能力，

解：设 $y=3^x$，则原方程可化为 $9y^2-80y-9=0$，

解得：$y_1=9$，$y_2=-\dfrac{1}{9}$

方程 $3^x=-\dfrac{1}{9}$ 无解，

由 $3^x=9$ 得 $x=2$，所以原方程的解为 $x=2$.

22．本小题主要考查复数的有关概念，三角公式及运算能力，

解：$z^2+z=(\cos\theta+i\sin\theta)^2+(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\cos 2\theta+i\sin 2\theta+\cos\theta+i\sin\theta$

$=2\cos\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+i(2\sin\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2})$

$=2\cos\dfrac{\theta}{2}(\cos\dfrac{3\theta}{2}+i\sin\dfrac{3\theta}{2})$

$=-2\cos\dfrac{\theta}{2}[\cos(-\pi+\dfrac{3\theta}{2})+i\sin(-\pi+\dfrac{3\theta}{2})]$

∵ $\theta\in(\pi,2\pi)$

∴ $\dfrac{\theta}{2}\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$

∴ $-2\cos(\dfrac{\theta}{2})>0$

所以复数 z^2+z 的模为$-2\cos\dfrac{\theta}{2}$，辐角$(2k-1)\pi+\dfrac{3\theta}{2}$ $(k\in z)$.

23．本小题主要考查等比数列、对数、不等式等基础知识以及逻辑推理能力，

证法一：设$\{a_n\}$的公比为 q，由题设知 $a_1>0$，$q>0$，

(1)当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，从而

$S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=na_1(n+2)a_1-(n+1)^2a_1^2=-a_1^2<0$.

(2)当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，从而

$S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=\dfrac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\dfrac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}=-a_1^2q^n<0$.

由(1)和(2)得 $S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$.

根据对数函数的单调性，得 $\log_{0.5}(S_n\cdot S_{n+2})>\log_{0.5}S_{n+1}^2$，

即$\dfrac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$.

证法二：设$\{a_n\}$的公比为 q，由题设知 $a_1>0$，$q>0$，

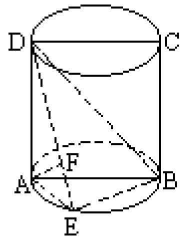
∵ $S_{n+1}=a_1+qS_n$，

$S_{n+2}=a_1+qS_{n+1}$，

∴ $S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=S_n(a_1+qS_{n+1})-(a_1+qS_n)S_{n+1}=a_1(S_n-S_{n+1})=-a_1a_{n+1}<0$.

即 $S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$.　　(以下同证法一)

24．本小题主要考查空间线面关系、圆柱性质、空间想象能力和逻辑推理能力．



(1)证明：根据圆柱性质，$DA\perp$平面ABE，

∵　$EB\subset$平面ABE，

∴　$DA\perp EB$，

∵　AB是圆柱底面的直径，点E在圆周上，

∴　$AE\perp EB$，又$AE\cap AD=A$，故得$EB\perp$平面DAE，

∵　$AF\subset$平面DAE，

∴　$EB\perp AF$，

又$AF\perp DE$，且$EB\cap DE=E$，故得$AF\perp$平面DEB，

∵　$DB\subset$平面DEB，

∴　$AF\perp DB$.

(2)解：设点E到平面$ABCD$的距离为d，记$AD=h$，因圆柱轴截面$ABCD$是矩形，所以$AD\perp AB$.

$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD=\dfrac{ah}{2}$

∴　$V_{D-ABE}=V_{E-ABD}=\dfrac{d}{3}S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{6}dah$

又$V_{圆柱}=\pi\left(\dfrac{AB^2}{2}\right)\cdot AD=\dfrac{\pi}{4}a^2h$

由题设知$\dfrac{\frac{\pi}{4}a^2h}{\frac{1}{6}dah}=3\pi$，即$d=\dfrac{a}{2}$.

25．本小题主要考查运用所学数学知识和方法解决实际问题的能力，以及函数的概念、方程和不等式的解法等基础知识和方法.

解：(1)依题设有$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$

化简得$5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0$，

当判别式$\triangle=800-16t^2\geqslant 0$时，可得：$x=8-\dfrac{4}{5}t\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$.

由$\triangle\geqslant 0$，$t\geqslant 0$，$8\leqslant x\leqslant 14$，得不等式组：

①$\begin{cases}0\le t\le\sqrt{50}\\ 8\le 8-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\le 14\end{cases}$

② $\begin{cases} 0 \le t \le \sqrt{50} \\ 8 \le 8 - \dfrac{4}{5}t - \dfrac{2}{5}\sqrt{50 - t^2} \le 14 \end{cases}$

解不等式组①，得 0≤t≤$\sqrt{10}$，不等式组②无解，故所求的函数关系式为

x=8－$\dfrac{4}{5}$ t+$\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$

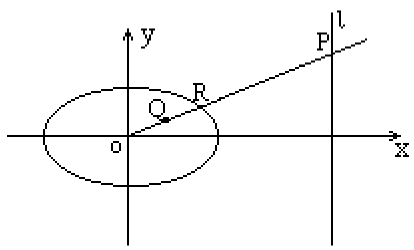
函数的定义域为[0，$\sqrt{10}$]

(2)为使 x≤10，应有 8－$\dfrac{4}{5}$ t+$\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$ ≤10，

化简得：t^2+4t－5≥0，

解得 t≥1 或 t≤－5，由于 t≥0 知 t≥1，从而政府补贴至少为每千克 1 元.

26．本小题主要考查直线、椭圆的方程和性质，曲线与方程的关系，轨迹的概念和求法等解析几何的基本思想综合运用知识的能力.



解：设点 P、Q、R 的坐标分别为(12，y_p)，(x，y)，(x_R，y_R由题设知 x_R>0，x>0，

由点 R 在椭圆上及点 O、Q、R 共线，得方程组

$\begin{cases} \dfrac{x_R^2}{24} + \dfrac{y_R^2}{16} = 1 \\ \dfrac{y_R}{x_R} = \dfrac{y}{x} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_R^2 = \dfrac{48x^2}{2x^2 + 3y^2} & ① \\ y_R^2 = \dfrac{48y^2}{2x^2 + 3y^2} & ② \end{cases}$

由点 O、Q、P 共线，得 $\dfrac{y_p}{12} = \dfrac{y}{x}$，即 $y_p = \dfrac{12y}{x}$. ③

由题设|OQ|·|OP|=|OR|^{2}得

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{12^2 + y_p^2} = \left(\sqrt{x_R^2 + y_R^2}\right)^2$$

将①、②、③式代入上式，整理得点 Q 的轨迹方程

$(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$ (x>0)

所以点 Q 的轨迹是以(1，0)为中心，长、短半轴长分别为 1 和 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，且长轴在 x 轴上的椭圆、去掉坐标圆点.