2011年上海高考数学试题（理科）答案及解析

一、填空题

1、$\dfrac{1}{x}+2$；2、$\{x\mid 0<x<1\}$；3、16；4、$x<0$ 或 $x\geq\dfrac{1}{2}$；5、$\arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；6、$\sqrt{6}$；

7、$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$；

8、$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$；9、2；10、6；11、$\dfrac{15}{2}$；12、0.985；13、$[-15,11]$；14、$\sqrt{3}$。

二、选择题

15、D；16、A；17、B；18、D。

三、解答题

19、解：$(z_1-2)(1+i)=1-i\Rightarrow z_1=2-i$ ………………（4分）

设 $z_2=a+2i, a\in R$，则 $z_1z_2=(2-i)(a+2i)=(2a+2)+(4-a)i$，………………（12分）

$\because z_1z_2\in R$，$\therefore z_2=4+2i$ ………………（12分）

20、解：⑴ 当 $a>0,b>0$ 时，任意 $x_1,x_2\in R, x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=a(2^{x_1}-2^{x_2})+b(3^{x_1}-3^{x_2})$

$\because 2^{x_1}<2^{x_2}, a>0\Rightarrow a(2^{x_1}-2^{x_2})<0$，$3^{x_1}<3^{x_2}, b>0\Rightarrow b(3^{x_1}-3^{x_2})<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数。

当 $a<0,b<0$ 时，同理，函数 $f(x)$ 在 R 上是减函数。

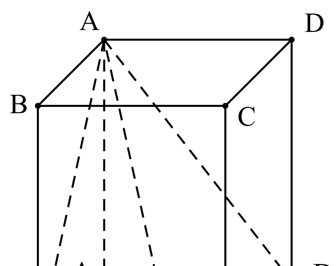
⑵ $f(x+1)-f(x)=a\cdot 2^x+2b\cdot 3^x>0$

当 $a<0,b>0$ 时，$(\dfrac{3}{2})^x>-\dfrac{a}{2b}$，则 $x>\log_{1.5}(-\dfrac{a}{2b})$；

当 $a>0,b<0$ 时，$(\dfrac{3}{2})^x<-\dfrac{a}{2b}$，则 $x<\log_{1.5}(-\dfrac{a}{2b})$。

21、解：设正四棱柱的高为 h。

⑴ 连 AO_1，$AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$ 于 A_1，$\therefore$ AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\angle AB_1A_1$，即



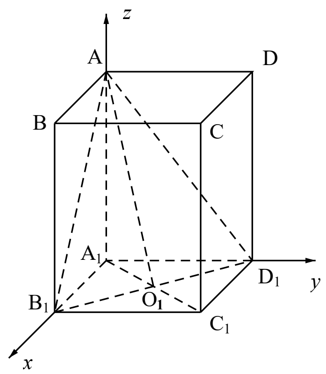
$\angle AB_1A_1=\alpha$

$\because$ $AB_1=AD_1$，O_1 为 B_1D_1 中点，$\therefore AO_1\perp B_1D_1$，又 $A_1O_1\perp B_1D_1$，

$\therefore$ $\angle AO_1A_1$ 是二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的平面角，即 $\angle AO_1A_1=\beta$

$\therefore$ $\tan\alpha=\dfrac{AA_1}{A_1B_1}=h$， $\tan\beta=\dfrac{AA_1}{A_1O_1}=\sqrt{2}h=\sqrt{2}\tan\alpha$。

⑵ 建立如图空间直角坐标系，有 $A(0,0,h),B_1(1,0,0),D_1(0,1,0),C(1,1,h)$



$\overrightarrow{AB}_1=(1,0,-h),\overrightarrow{AD}_1=(0,1,-h),\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

设平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\because$ $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB_1}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AD_1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}$，取 $z=1$ 得 $\vec{n}=(h,h,1)$

$\therefore$ 点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $d=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{h+h+0}{\sqrt{h^2+h^2+1}}=\dfrac{4}{3}$，则 $h=2$。

22、⑴ $c_1=9,c_2=11,c_3=12,c_4=13$；

⑵ ① 任意 $n\in N^*$，设 $a_{2n-1}=3(2n-1)+6=6n+3=b_k=2k+7$，则 $k=3n-2$，即 $a_{2n-1}=b_{3n-2}$

② 假设 $a_{2n}=6n+6=b_k=2k+7\Leftrightarrow k=3n-\dfrac{1}{2}\in N^*$（矛盾），$\therefore$ $a_{2n}\notin\{b_n\}$

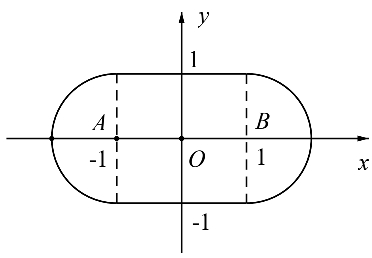
$\therefore$ 在数列 $\{c_n\}$ 中、但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$。

⑶ $b_{3k-2}=2(3k-2)+7=6k+3=a_{2k-1}$，

$b_{3k-1}=6k+5$， $a_{2k}=6k+6$， $b_{3k}=6k+7$

$\because$ $6k+3<6k+5<6k+6<6k+7$

$\therefore$ 当 $k=1$ 时，依次有 $b_1=a_1=c_1,b_2=c_2,a_2=c_3,b_3=c_4$，……



$$\therefore\ c_n=\begin{cases}6k+3 & (n=4k-3)\\ 6k+5 & (n=4k-2)\\ 6k+6 & (n=4k-1)\\ 6k+7 & (n=4k)\end{cases},k\in N^*\text{。}$$

23、解：⑴ 设$Q(x,x-3)$是线段$l:x-y-3=0(3\le x\le 5)$上一点，则

$|PQ|=\sqrt{(x-1)^2+(x-4)^2}=\sqrt{2(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{2}}(3\le x\le 5)$，当$x=3$时，

$d(P,l)=|PQ|_{\min}=\sqrt{5}$。

⑵ 设线段l的端点分别为A,B，以直线AB为x轴，AB的中点为原点建立直角坐标系，

则$A(-1,0),B(1,0)$，点集D由如下曲线围成

$l_1:y=1(|x|\le 1),l_2:y=-1(|x|\le 1)$，

$C_1:(x+1)^2+y^2=1(x\le -1),C_2:(x-1)^2+y^2=1(x\ge 1)$

其面积为$S=4+\pi$。

⑶ ① 选择$A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,0)$，$\Omega=\{(x,y)\,|\,x=0\}$

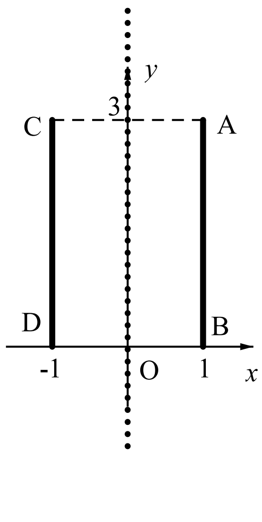
② 选择$A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,-2)$。

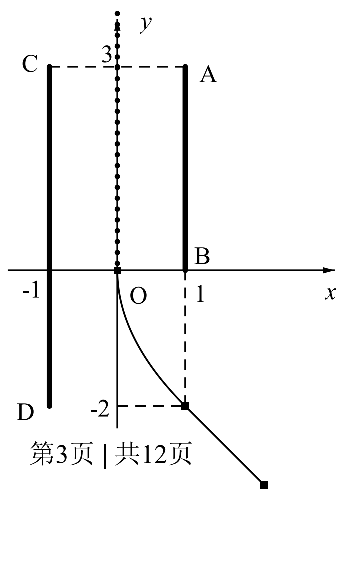
$\Omega=\{(x,y)\,|\,x=0,y\ge 0\}\cup\{(x,y)\,|\,y^2=4x,-2\le y<0\}\cup\{(x,y)\,|\,x+y+1=0,x>1\}$

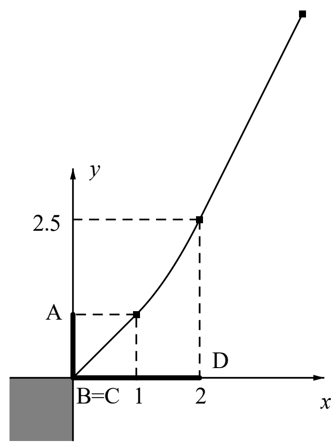
③ 选择$A(0,1),B(0,0),C(0,0),D(2,0)$。

$\Omega=\{(x,y)\,|\,x\le 0,y\le 0\}\cup\{(x,y)\,|\,y=x,0<x\le 1\}$

$\cup\{(x,y)\,|\,x^2=2y-1,1<x\le 2\}\cup\{(x,y)\,|\,4x-2y-3=0,x>2\}$







2011年上海高考数学试卷（理科）

一、填空题（每小题4分，满分56分）

1、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=$______

【解析】$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}+2$

2、若全集 $U=\mathrm{R}$，集合 $A=\{x\mid x\geq 1\}\cup\{x\mid x\leq 0\}$，则 $\complement_U A=$_______

【解析】$\{x\mid 0<x<1\}$

3、设 m 是常数，若点 $F(0,5)$ 是双曲线 $\dfrac{y^2}{m}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 的一个焦点，则 $m=$__________

【解析】根据交点公式：$c^2=a^2+b^2\Rightarrow m=25-9=16$，$m=16$

4、不等式 $\dfrac{x+1}{x}\leq 3$ 的解为 __________

【解析】$\dfrac{x+1}{x}\leq 3\Rightarrow\dfrac{1-2x}{x}\leq 0$ $\{x\mid x<0$ 或 $m\geq\dfrac{1}{2}\}$

5、在极坐标系中，直线 $\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=2$ 与直线 $\rho\cos\theta=1$ 的夹角大小为 __________（结果用反三角函数值表示）

【解析】因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，故直线的一般方程为：$2x+y=2,x=1$，夹角为 $\arctan\dfrac{1}{2}$

6、在相距2千米的 A,B 两点处测量目标点 C，若 $\angle CAB=75^\circ,\angle CBA=60^\circ$，则 A,C 两点之间的距离为 __________ 千米。

【解析】$\angle C=45^\circ$，由正弦定理：$\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}=\dfrac{AB}{\sin 45^\circ}\Rightarrow AC=\sqrt{6}$

7、若圆锥的侧面积为 2π，底面积为 π，则该圆锥的体积为 _______

【解析】设底面半径为 r，母线为 l，则 $\begin{cases}\pi r^2=\pi\\ \dfrac{1}{2}\times 2\pi r\times l=2\pi\end{cases}\Rightarrow r=1,l=2\Rightarrow h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$，即：底面半径为1，母线为2，高为 $\sqrt{3}$，故体积为 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

8、函数 $y=\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)\cos(\dfrac{\pi}{6}-x)$ 的最大值为 ________

【解析】$y=\cos x(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\sin x\cos x$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{1}{4}\sin 2x=\frac{1}{4}(\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+\sqrt{3})=\frac{1}{2}\sin(2x+\phi)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故最大值为 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

9、马老师从课本上抄录一个随机变量 ξ 的概率分布律如下表：

x	1	2	3
$P(\xi=x)$	?	!	?

请小牛同学计算 ξ 的数学期望，尽管“！”处完全无法看清楚，其两个“？”处字迹模糊，但能断定这两个“？”处的数值相同，据此，小牛给出了正确答案 $E\xi=$__________

【解析】$E\xi=1\times ?+2\times !+3\times ?=4\times ?+2\times !=2(2\times ?+!)$

由 ?+!+?=2×?+!=1，故 $E\xi=2$

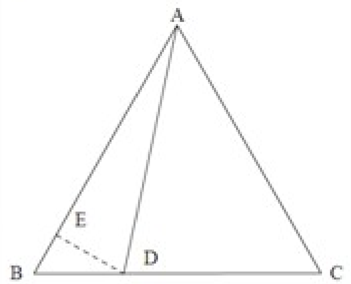
10、行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $(a,b,c,d\in\{-1,1,2\})$ 所有可能的值中，最大的是________

【解析】$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，所以 $a=d=c=2, b=-1$，则最大值为 6

11、在正三角形 ABC 中，D 是 BC 上的点，若 $AB=3, BD=1$，则 $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=$________

【解析】绘图如下：过点 D 作 $DE\perp AB$，则

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AB}\cdot\overline{AE}=3|\overline{AE}|=3(|\overline{AB}|-|\overline{EB}|)=3(3-\frac{1}{2}BD)=3\times(3-\frac{1}{2})=\frac{15}{2}$$



12、随机抽取的 9 位同学中，至少有 2 位同学在一月份出生的概率为________（默认每个月的天数相同，结果精确到 0.001）

【解析】$P=\frac{A_{12}^{9}}{12^{9}}\approx 0.985$

13、设 $g(x)$ 是定义在 R 上，以 1 为周期的函数，若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$，则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为________

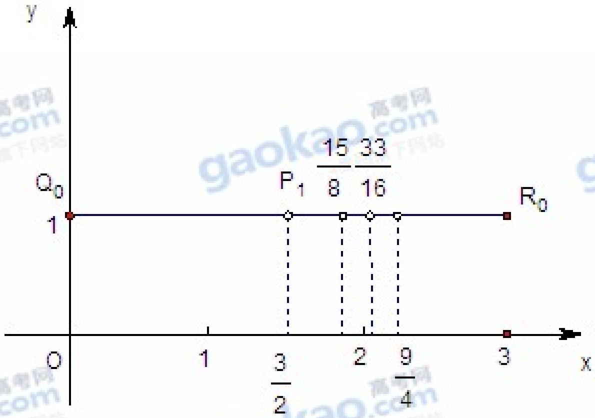
【解析】$[-15,11]$；$\because g(x)$ 是定义在 R 上，以 1 为周期的函数，$\therefore g(x+1)=g(x)$，又$\because$

$f(x)=x+g(x)$，$\therefore f(x+1)=x+1+g(x+1)=x+g(x)+1$，$\because$ 当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=x+g(x)$ 的值域为 $[-2,5]$，且 $x+1\in[4,5]$，$\therefore$ 当 $x\in[4,5]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[-1,6]$。以此类推当 $x\in[5,6]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[0,7]$，……，当 $x\in[9,10]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[4,11]$。同理 $g(x-1)=g(x)$ 也成立，则 $f(x-1)=x-1+g(x-1)=x+g(x)-1$，$\therefore$ 当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[-3,5]$，以此类推当 $x\in[-10,0]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[-15,-8]$。综上，$f(x)$ 在的区间 $[-10,10]$ 上的值域为 $[-15,11]$。

14、已知点 $O(0,0), Q_0(0,1)$ 和点 $R_0(3,1)$，记 Q_0R_0 的中点为 P_1，取 Q_0P_1 和 P_1R_0 中的一条，记其端点为 Q_1, R_1，使之满足 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$，记 Q_1R_1 的中点为 P_2，取 Q_1P_1 和 P_2R_1 中的一条，记其端点为为 Q_2, R_2，使之满足 $(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$，依次下去，得到

$P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n| =$ ________

【解析】$\sqrt{3}$，P_n 的极限点就是以原点为圆心，以 2 为半径与 $y=1$ 的交点



本题就是二分法解方程的延伸，关键条件 $(|OQ_n|-2)(|OR_n|-2)<0$ 的意思是 Q_0R_0 上到原点距离为 2 的点（设为 P'）始终在 Q_nR_n 之间，且 Q_nR_n 的长度不断缩小，直到 0，而 P_n 是 Q_nR 的中点，也始终在 Q_nR_n 之间，故当取极限时 P', P_n 两点就重合了，此时

$$\lim_{n\to\infty}|Q_0P_n| = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{OP_n - OQ_0}) = \sqrt{2^2-1} = \sqrt{3}$$

二、选择题（每小题 5 分，满分 20 分）

15、若 $a,b\in R$，且 $ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是（　　）

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $a+b\ge 2\sqrt{ab}$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　　D. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2$

【解析】D，排除法：A：$a=b$ 时不满足；

B：$a<0, b<0$ 时不满足；

C：$a<0, b<0$ 时不满足；

D：$\frac{b}{a}>0, \frac{a}{b}>0, \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$

16、下列函数中，既是偶函数，又是在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调减函数的是（　　）

A. $y=\ln\frac{1}{|x|}$　　B. $y=x^3$　　C. $y=2^{|x|}$　　D. $y=\cos x$

【解析】A，排除法：B、C 在 $(0,+\infty)$ 上单调增，D 无单调性，故选 A

17、设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是平面上给定的 5 个不同的点，则使 $\overline{MA_1}+\overline{MA_2}+\overline{MA_3}+\overline{MA_4}+\overline{MA_5}=\overline{0}$ 成立的点的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 5　　D. 10

【解析】重心的定义为：

若O为任意一点，M为重心，则：$\overline{OM}=\frac{\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\cdots+\overline{OA_n}}{n}$；

只有重心满足条件，，所有不等于重心的点有$\overline{OP}=\overline{OM}+\overline{MP}$，故只有该点是重心时才能为零向量，而重心只有一个，故满足条件的点只有一个。

18、设$\{a_n\}$是各项为正的无穷数列，A_i是边长为a_i，a_{i+1}的矩形的面积（$i=1,2,\cdots$），则$\{A_n\}$为等比数列的充要条件是（　　）

A. $\{a_n\}$是等比数列

B. $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$或$a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$是等比数列

C. $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$和$a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$均是等比数列

D. $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$和$a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$均是等比数列，且公比相同

【解析】D，$A_n=a_na_{n+1}$，故$\frac{a_2a_3}{a_1a_2}=\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_3a_4}{a_2a_3}=\frac{a_4}{a_2}$，满足该条件只有A、D，而显然D的范围更全面，故选D

三、解答题（本题满分74分）

19、（本题满分12分）

已知复数z_1满足$(z_1-2)(1+i)=1-i$（i为虚数单位），复数z_2的虚部为2，且$z_1\cdot z_2$是实数，求z_2。

【解析】显然$z_1-2=\frac{1-i}{1+i}=-i\Rightarrow z_1=2-i$，因为$z_1\cdot z_2$是实数所以，$z_2=k(2+i)$，因为$\mathrm{Im}(z_2)=2$，所以$k=2$，故$z_2=4+2i$。

20、（本题满分12分，第1小题满分4分，第2小题满分8分）

已知函数$f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$，其中常数$a,b$满足$a\cdot b\neq 0$，

(1)若$a\cdot b>0$，判断函数$f(x)$的单调性；

(2)若$a\cdot b<0$，求$f(x+1)>f(x)$时的x的取值范围

【解析】(1)显然

当$a>0,b>0$时，$f(x)$单调增；

当$a<0,b<0$时，$f(x)$单调减；

(2)因为$ab<0$，讨论如下：

当$a<0,b>0$时，则由$f(x+1)>f(x)$得：

$a\cdot 2^{x+1}+b\cdot 3^{x+1}>a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$，故$2b\cdot 3^x>-a\cdot 2^x\Rightarrow(\frac{3}{2})^x>-\frac{a}{2b}$，故$x>\log_{\frac{3}{2}}(-\frac{a}{2b})$

当$a>0,b<0$时，则则由$f(x+1)>f(x)$得：

$a\cdot 2^{x+1}+b\cdot 3^{x+1}>a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$，故$2b\cdot 3^x>-a\cdot 2^x\Rightarrow(\frac{3}{2})^x<-\frac{a}{2b}$，故$x<\log_{\frac{3}{2}}(-\frac{a}{2b})$

21、（本题满分 14 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分）

已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱，O_1 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点，

(1)设 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的夹角的大小为 α，二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的大小为 β，求证：

$\tan\beta=\sqrt{2}\tan\alpha$；

(2)若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{4}{3}$，求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高。

【解析】(1)根据题意可知：显然 α 就是 $\angle B_1AB$，β 就是 $\angle AO_1A_1$

$$\tan\alpha=\frac{BB_1}{AB},\tan\beta=\frac{AA_1}{A_1O_1}=\frac{\sqrt{2}BB_1}{AB}，所以 \tan\beta=\sqrt{2}\tan\alpha$$

(2)设 l 为高，由 ΔAO_1C，$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot l=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}|AO_1|$，故 $l=\frac{4}{3\sqrt{2}}|AO_1|$，由 ΔAA_1O_1，则：

$(\frac{3\sqrt{2}}{4}l)^2=(AO_1)^2$，$(\frac{3\sqrt{2}}{4}l)^2=l^2=(AO_1)^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$，所以 $l^2=4\Rightarrow l=2$，故高为 2

22、（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=3n+6,b_n=2n+7(n\in N^*)$；将集合 $\{x\mid x=a_n,n\in N^*\}\cup\{x\mid x=b_n,n\in N^*\}$ 中的元素从小到大依次排列，构成数列 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n,\cdots$；

(1)写出 c_1,c_2,c_3,c_4；

(2)求证：在数列 $\{c_n\}$ 中，但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2n},\cdots$；

(3)求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式。

【解析】(1) $c_1=9,c_2=11,c_3=12,c_4=13$；

(2) $a_{2n}=6n+6$ 表示的是从 12 开始的所有的能被 6 整除的数，当然能 2 整除，是偶数，而 b_n 表示的是从 9 开始的所有奇数，故 a_{2n} 均不在 b_n 中

再证明：a_{2n-1} 项均在 b_n 中，$a_{2n-1}=6n+3$，表示的是从 9 开始除以 6 余 3 的数，故都是奇数，而 b_n 表示的是从 9 开始的所有奇数，故 a_{2n-1} 均值 $\{b_n\}$ 中，这就证明了在 $\{b_n\}$ 中的 $\{a_n\}$ 的项恰好是所有的偶数项 a_{2n}

(3)根据上面的讨论可知 6 是数列 $\{c_n\}$ 在自然数中的截取周期，即在从 9 开始连续的 6 项自然数中，第一项一定是 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项，第二项不存在于 $\{c_n\}$ 中，第三项一定是 $\{b_n\}$ 中的

项，第四项一定是$\{a_n\}$项，第五项是$\{b_n\}$中的项，第六项不在$\{c_n\}$，这样的话，$\{c_n\}$是以 4 为截取周期的，故$\{c_n\}$的通项为：

$$c_n=\begin{cases}b_{3k-2}, n=4k-3\\ b_{3k-1}, n=4k-2\\ a_{2k}, n=4k-1\\ b_{3k}, n=4k\end{cases}(k\in N_+)$$

当$n=4k$，$k\in N^*$时，$c_{4k}=6k+7$，则$c_n=6\times\dfrac{n}{4}+7=\dfrac{3}{2}n+7$；

当$n=4k-1$，$k\in N^*$时，$c_{4k-1}=6k+6$，则$c_n=6\times\dfrac{n+1}{4}+6=\dfrac{3}{2}n+\dfrac{15}{2}$；

当$n=4k-2$，$k\in N^*$时，$c_{4k-2}=6k+5=6\times\dfrac{n+2}{4}+5=\dfrac{3}{2}n+8$；

当$n=4k-3$，$k\in N^*$时，$c_{4k-3}=6k+3=6\times\dfrac{n+3}{4}+3=\dfrac{3}{2}n+\dfrac{15}{2}$；

综上，$c_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}n+7, n=4k\\ \dfrac{3}{2}n+\dfrac{15}{2}, n=4k-1或n=4k-3\\ \dfrac{3}{2}n+8, n=4k-2\end{cases}$，$k\in N^*$。

23、（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）
已知平面上的线段l及点P，任取l上一点Q，线段PQ的长度的最小值称为点P到线段l的距离，记作$d(P,l)$，

⑴求点$P(1,1)$到线段$l:x-y-3=0(3\le x\le 5)$的距离$d(P,l)$；

⑵设l是长为 2 的线段，求点的集合$D=\{P\,|\,d(P,l)\le 1\}$所表示的图形的面积；

③写出到两条线段l_1,l_2距离相等的点的集合$\Omega=\{P\,|\,d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$，其中$l_1=AB,l_2=CD$，$A,B,C,D$是下列三组点中的一组；

对于下列三种情形，只需选做一种，满分分别是①2 分，②6 分，③8 分；若选择了多于一种情形，则按照序号较小的解答计分。

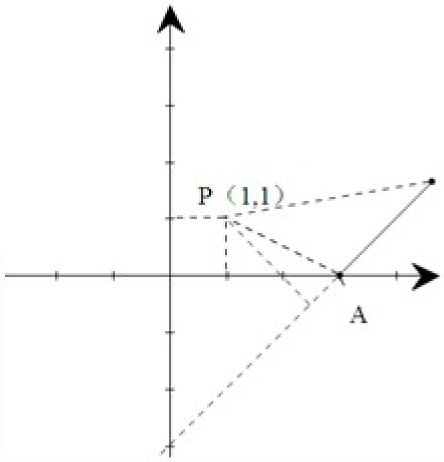
① $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,0)$；

② $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,-2)$；

⑶ $A(0,1),B(0,0),C(0,0),D(2,0)$

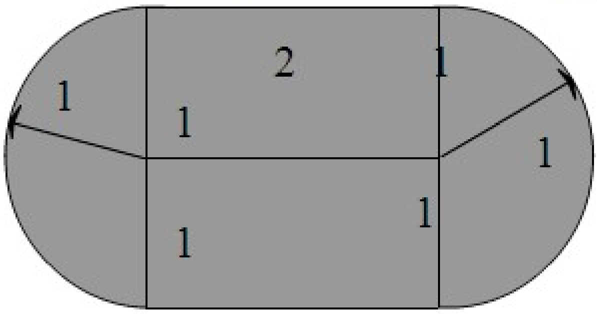
【解析】

⑴如图所示，由图可知显然在线段的$(3,0)$一端取最小值，故最小距离为：

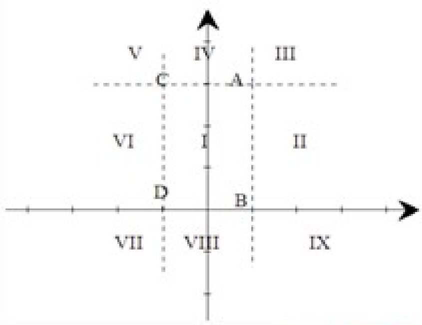


$d(P,l)=d(P,(3,0))=\sqrt{(1-3)^2+1^2}=\sqrt{5}$

⑵如图所示，D 是一边长为 4 和 2 的矩形与两个半径为 2 的半圆构成的图像，故面积为：$S=2\times2+\pi=4+\pi$



⑶①如图所示，$x=-1,x=1,y=0,y=3$ 把坐标平面分成了 9 个部分，



第 I 区：到两直线距离相等的点是两线的对称轴，即：$\{(x,y)|x=0,0\le y\le3\}$；

第 II、IV 区：是到 AB、CD 的垂直距离，显然不相等，无满足的点；

第 III、V、VII、IX 区：到两个定点的距离相等的点，但均不存在

第 IV、VIII 区：到两个定点的距离相等的点，正好是 y 轴上的点 $\{(x,y)|y\ge3或y\le0$

综上所述：满足条件的点是：$\{(x,y)|x=0\}$

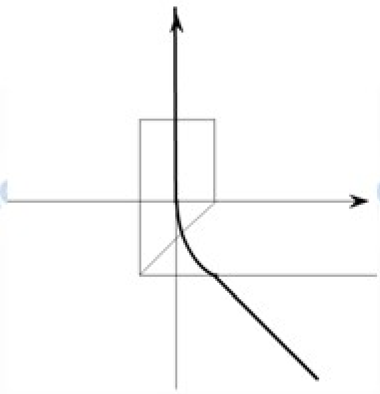
②如图所示，由三段组成：

第一段是 y 轴上，所有满足 $y\ge0$ 的点，即：$\{(x,y)|x=0,y\ge0\}$；

第二段是抛物线，原因是到定点的距离等于到定直线的距离，该抛物线为

$\{(x,y)\mid x=\frac{1}{4}y^2(y\le 0,0\le x\le 1)\}$；

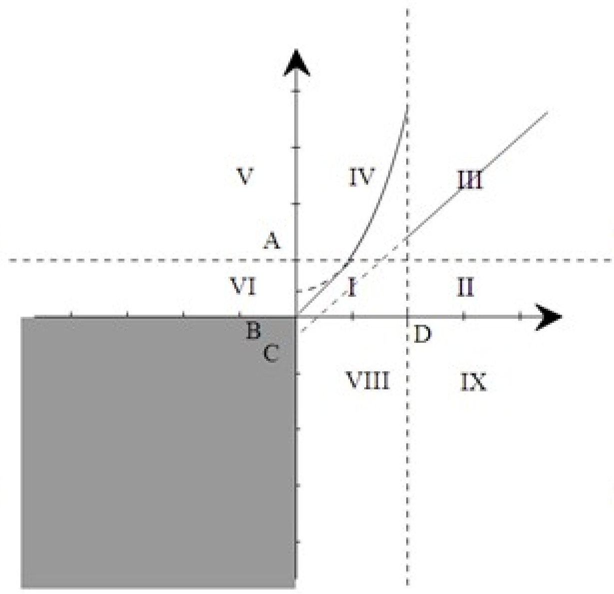
第三段是直线，该直线为：$\{(x,y)\mid y=-x-1(x\ge 1)\}$



综上所述：$\{(x,y)\mid x=0,y\ge 0\}\cup\{(x,y)\mid x=\frac{1}{4}y^2(y\le 0,0\le x\le 1)\}\cup\{(x,y)\mid y=-x-1(x\ge 1)\}$

即：$\Omega=\left\{(x,y)\mid x=\begin{cases}0,y\ge 0\\ \frac{1}{4}y^2,-2<y<0\\ -y-1,y\le -2\end{cases}\right\}$

③如图所示，由若干部分构成：由直线 $x=0,x=2,y=0,y=1$ 四条直线将坐标平面分成 9 个区域，对这 9 个区域分别标号后，依次讨论满足条件的点集：



第 I 区：到两直线距离相等的点是对角线，即：$\{(x,y)\mid y=x(0\le x\le 1)\}$；

第 II 区：到定点 D 的距离等于到定直线 y 轴的距离相等，是抛物线，但该抛物线不在第 II 区，故第 II 区没有满足条件的点；

第 III 区：到两个定点 A、D 的距离相等，是 AD 的中垂线，即 $\{(x,y)\mid y=2x-\frac{3}{2}(x\ge 2)\}$；

第 IV 区：到定点 A 与到定直线 x 轴的距离相等，是抛物线，为：

$$\{(x,y)\mid y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1\le x\le 2)\}$$

第 V 区：到两个 A、D 定点的距离相等，应该是 AD 的中垂线，但该线不经过第 V 区，故第 V 区没有满足条件的点；

第 VI 区：到定直线 y 轴的距离等于到定点 O 距离，y 轴过 O，故满足条件的点只有 x 轴的非正半轴，即 $\{(x,y)\mid x\le 0, y=0\}$

第 VII 区：到同一个点 O 的距离相等的点，是整个第三象限的点，即：$\{(x,y)\mid x<0, y<0\}$

第 VIII 区：到定直线 x 轴，与到定点 O 的距离相等，x 轴过点 O，故满足条件的为 y 轴的非正半轴，即：$\{(x,y)\mid x=0, y\le 0\}$

第 IX 区：到定点 O、D 的距离相等的点，为 OD 的中垂线，该线不经过 IX 区，故不存在。

综上所述：满足条件的点为：

$$\{(x,y)\mid y=x(0\le x\le 1)\}\cup\{(x,y)\mid y=2x-\frac{3}{2}(x\ge 2)\}\cup\{(x,y)\mid y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1\le x\le 2)\}\cup\{(x,y)\mid x\le 0, y\le 0\}$$

即：$$\Omega=\left\{(x,y)\mid y=\begin{cases}2x-\frac{3}{2}, x\ge 2\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}, 1<x<2\\ x, 0<x\le 1\end{cases}\right\}\cup\{(x,y)\mid x\le 0, y\le 0\}$$