

2006年青海高考文科数学真题及答案

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分。第I卷1至2页。第II卷3至4页。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷(选择题)

注意事项:

1. 答题前,考生在答题卡上务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚,并贴好条形码。请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目。

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,在试题卷上作答无效。

3. 本卷共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

参考公式

如果事件A、B互斥,那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件A、B相互独立,那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P,那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率是

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一. 选择题

(1) 已知向量 $\vec{a} = (4, 2)$, 向量 $\vec{b} = (x, 3)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $x =$

- (A) 9 (B) 6 (C) 5 (D) 3

(2) 已知集合 $M = \{x | x < 3\}$, $N = \{x | \log_2 x > 1\}$, 则 $M \cap N =$

- (A) \emptyset (B) $\{x | 0 < x < 3\}$
(C) $\{x | 1 < x < 3\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$

(3) 函数 $y = \sin 2x \cos 2x$ 的最小正周期是

- (A) 2π (B) 4π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(4) 如果函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y' = 3 - 2x$ 的图像关于坐标原点对称, 则 $y = f(x)$ 的表达式为

- (A) $y = 2x - 3$ (B) $y = 2x + 3$

- (C) $y = -2x + 3$ (D) $y = -2x - 3$

(5) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B、C 在椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上，顶点 A 是椭圆的一个焦点，且椭圆的另一个焦点在 BC 边上，则 $\triangle ABC$ 的周长是

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) 6 (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12

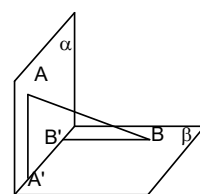
(6) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 7, a_4 = 15$ ，则前 10 项的和 $S_{10} =$

- (A) 100 (B) 210 (C) 380 (D) 400

(7) 如图，平面 $\alpha \perp$ 平面 β ， $A \in \alpha, B \in \beta$ ， AB 与两平面 α 、 β 所成的角分别为 $\frac{\pi}{4}$

和 $\frac{\pi}{6}$ 。过 A、B 分别作两平面交线的垂线，垂足为 A' 、 B' ，若 $AB=12$ ，则 $A'B' =$

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9



(8) 已知函数 $f(x) = \ln x + 1 (x > 0)$ ，则 $f(x)$ 的反函数为

- (A) $y = e^{x+1} (x \in R)$ (B) $y = e^{x-1} (x \in R)$

- (C) $y = e^{x+1} (x > 1)$ (D) $y = e^{x-1} (x > 1)$

(9) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$ ，则双曲线的离心率为

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

(10) 若 $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$ ，则 $f(\cos x) =$

- (A) $3 - \cos 2x$ (B) $3 - \sin 2x$

- (C) $3 + \cos 2x$ (D) $3 + \sin 2x$

(11) 过点 $(-1, 0)$ 作抛物线 $y = x^2 + x + 1$ 的切线，则其中一条切线为

- (A) $2x + y + 2 = 0$ (B) $3x - y + 3 = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y + 1 = 0$

(12) 5 名志愿者分到 3 所学校支教，每个学校至少去一名志愿者，则不同的分派方法共有

- (A) 150 种 (B) 180 种 (C) 200 种 (D) 280 种

第II卷（非选择题，共90分）

注意事项：

本卷共2页，10小题，用黑碳素笔将答案答在答题卡上。答在试卷上的答案无效。

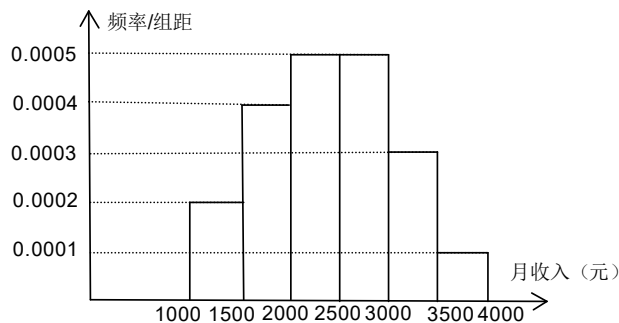
二. 填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在横线上。

(13) 在 $(x^4 + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中常数项是_____。（用数字作答）

(14) 圆 o_1 是以 R 为半径的球 O 的小圆，若圆 o_1 的面积 S_1 和球 O 的表面积 S 的比为 $S_1 : S = 2 : 9$ ，则圆心 o_1 到球心 O 的距离与球半径的比 $OO_1 : R =$ _____。

(15) 过点 $(1, \sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 分成两段弧，当劣弧所对的圆心角最小时，直线 l 的斜率 $k =$ _____。

(16) 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了10000人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如下图）。为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这10000人中再用分层抽样方法抽出100人作进一步调查，则在 $[2500, 3000)$ （元）月收入段应抽出_____人。



三. 解答题：本大题共6小题，共74分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17)（本小题满分12分）

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$, $AC = \sqrt{10}$, $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求

(1) $BC = ?$

(2) 若点 D 是 AB 的中点，求中线 CD 的长度。

(18)（本小题满分12分）

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_4 = 1, S_8 = 17$, 求通项公式 $a_n = ?$

(19)（本小题满分12分）

某批产品成箱包装，每箱5件，一用户在购进该批产品前先取出3箱，再从每箱中任意出

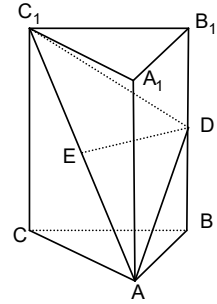
取2件产品进行检验。设取出的第一、二、三箱中分别有0件、1件、2件二等品，其余为一等品。

(I) 求取6件产品中有1件产品是二等品的概率。

(II) 若抽检的6件产品中有2件或2件以上二等品，用户就拒绝购买这批产品，求这批产品被用户拒绝的概率。

(20) (本小题 1 2 分)

如图在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC$, D 、 E 分别为 BB_1 、 AC_1 的中点。



(I) 证明: ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线;

(II) 设 $AA_1 = AC = \sqrt{2}AB$, 求二面角 $A_1 - AD - C_1$ 的大小

(21) (本小题满分为 1 4 分)

设 $a \in R$, 函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$. 若 $f(x) > 0$ 的解集为 A , $B = \{x | 1 < x < 3\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围。

(22) (本小题满分 1 2 分)

已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , A 、 B 是抛物线上的两动点, 且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$. 过 A 、 B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M 。

(I) 证明 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB}$ 为定值;

(II) 设 ΔABM 的面积为 S , 写出 $S = f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值。

2006 年青海高考文科数学真题参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	D	C	B	B	B	A	C	D	A

二、填空题

(13) 45; (14) $\frac{1}{3}$; (15) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (16) 25

一. 选择题

(1) 已知向量 $\vec{a} = (4, 2)$, 向量 $\vec{b} = (x, 3)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $x = (B)$

- (A) 9 (B) 6 (C) 5 (D) 3

解: $\vec{a} // \vec{b} \Rightarrow 4 \times 3 - 2x = 0$, 解得 $x = 6$, 选 B

- (2) 已知集合 $M = \{x | x < 3\}$, $N = \{x | \log_2 x > 1\}$, 则 $M \cap N = (D)$

- (A) \emptyset (B) $\{x | 0 < x < 3\}$ (C) $\{x | 1 < x < 3\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$

解: $N = \{x | \log_2 x > 1\} = \{x | x > 2\}$, 用数轴表示可得答案 D

- (3) 函数 $y = \sin 2x \cos 2x$ 的最小正周期是 (D)

- (A) 2π (B) 4π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

解析: $y = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ 所以最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 故选 D

- (4) 如果函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y' = 3 - 2x$ 的图像关于坐标原点对称, 则 $y = f(x)$ 的表达式为 (D)

- (A) $y = 2x - 3$ (B) $y = 2x + 3$ (C) $y = -2x + 3$ (D) $y = -2x - 3$

解: 以 $-y$, $-x$ 代替函数 $y' = 3 - 2x$ 中的 x , y' , 得 $y = f(x)$ 的表达式为 $y = -2x - 3$, 选 D

- (5) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B、C 在椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 (C)

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) 6 (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12

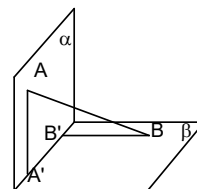
解: (数形结合) 由椭圆的定义椭圆上一点到两焦点的距离之和等于长轴长 $2a$, 可得 $\triangle ABC$ 的周长为 $4a = 4\sqrt{3}$, 所以选 C

- (6) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 7, a_4 = 15$, 则前 10 项的和 $S_{10} = (B)$

- (A) 100 (B) 210 (C) 380 (D) 400

解: $d = \frac{a_4 - a_2}{4 - 2} = \frac{15 - 7}{2} = 4$, $a_1 = 3$, 所以 $S_{10} = 210$, 选 B

- (7) 如图, 平面 $\alpha \perp$ 平面 β , $A \in \alpha, B \in \beta$, AB 与两平面 α 、 β 所成的角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 。过 A、B 分别作两平面交线的垂线, 垂足为 A' 、



B' , 若 $AB=12$, 则 $A'B'=(A)$

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9

解: 连接 AB' 和 $A'B$, 设 $AB=a$, 可得 AB 与平面 α 所成的角为 $\angle BAB' = \frac{\pi}{4}$, 在

$Rt\triangle BAB'$ 中有 $AB' = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 同理可得 AB 与平面 β 所成的角为 $\angle ABA' = \frac{\pi}{6}$, 所以

$A'A = \frac{1}{2}a$, 因此 在 $Rt\triangle AA'B'$ 中 $A'B' = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a$, 所以

$AB:A'B' = a:\frac{1}{2}a = 2:1$, 故选 A

(8) 已知函数 $f(x) = \ln x + 1 (x > 0)$, 则 $f(x)$ 的反函数为 (B)

(A) $y = e^{x+1} (x \in R)$ (B) $y = e^{x-1} (x \in R)$

(C) $y = e^{x+1} (x > 1)$ (D) $y = e^{x-1} (x > 1)$

解: $y = \ln x + 1 (x > 0) \Rightarrow \ln x = y - 1 \Rightarrow x = e^{y-1} (y \in R)$ 所以反函数为 $y = e^{x-1} (x \in R)$ 故选 B

(9) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$, 则双曲线的离心率为 (A)

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

解: 双曲线焦点在 x 轴, 由渐近线方程可得 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{3} = \frac{5}{3}$, 故选 A

(10) 若 $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$, 则 $f(\cos x) = (C)$

(A) $3 - \cos 2x$ (B) $3 - \sin 2x$ (C) $3 + \cos 2x$ (D) $3 + \sin 2x$

解: $f(\sin x) = 3 - \cos 2x = 3 - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + 2$

所以 $f(x) = 2x^2 + 2$, 因此 $f(\cos x) = 2\cos^2 x + 2 = (2\cos^2 x - 1) + 3 = 3 + \cos 2x$ 故选 C

(11) 过点 $(-1, 0)$ 作抛物线 $y = x^2 + x + 1$ 的切线, 则其中一条切线为 (D)

(A) $2x + y + 2 = 0$ (B) $3x - y + 3 = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y + 1 = 0$

解: $y' = 2x + 1$, 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则切线的斜率为 $2x_0 + 1$, 且 $y_0 = x_0^2 + x_0 + 1$

于是切线方程为 $y - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(x - x_0)$, 因为点 $(-1, 0)$ 在切线上, 可解得

$x_0 = 0$ 或 -4 , 代入可验证 D 正确。选 D

(12) 5 名志愿者分到 3 所学校支教, 每个学校至少去一名志愿者, 则不同的分派方法共有 (A)

(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 200 种 (D) 280 种

解: 人数分配上有两种方式即 1, 2, 2 与 1, 1, 3

若是 1, 2, 2, 则有 $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \times A_3^3 = 60$ 种, 若是 1, 1, 3, 则有 $\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \times A_3^3 = 90$ 种

所以共有 150 种, 选 A

第 II 卷

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在横线上。

(13) 在 $(x^4 + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中常数项是 45。(用数字作答)

解: $T_{r+1} = C_{10}^r (x^4)^{10-r} (\frac{1}{x})^r = C_{10}^r x^{40-5r}$ 要求常数项, 即 $40-5r=0$, 可得 $r=8$ 代入通项公式可

得 $T_{r+1} = C_{10}^8 = C_{10}^2 = 45$

(14) 圆 O_1 是以 R 为半径的球 O 的小圆, 若圆 O_1 的面积 S_1 和球 O 的表面积 S 的比为

$S_1 : S = 2 : 9$, 则圆心 O_1 到球心 O 的距离与球半径的比 $OO_1 : R = \underline{1 : 3}$ 。

解: 设圆 O_1 的半径为 r , 则 $S_1 = \pi r^2$, $S = 4\pi R^2$, 由 $S_1 : S = 2 : 9$ 得 $r : R = 2\sqrt{2} : 3$

又 $r^2 + OO_1^2 = R^2$, 可得 $OO_1 : R = 1 : 3$

(15) 过点 $(1, \sqrt{2})$ 的直线 l 将圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时,

直线 l 的斜率 $k = \underline{\quad}$ 。

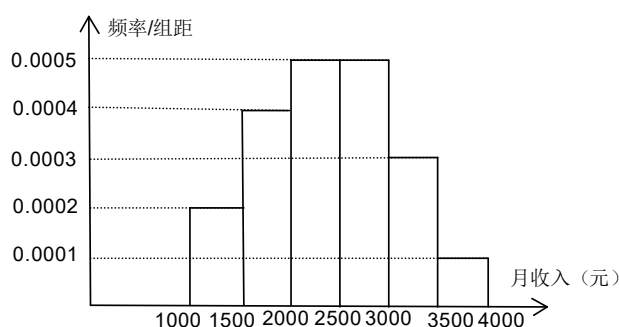
解: (数形结合) 由图形可知点 $A(1, \sqrt{2})$ 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的内部, 圆心为 $O(2, 0)$ 要使得

劣弧所对的圆心角最小, 只能是直线 $l \perp OA$, 所以 $k_l = -\frac{1}{k_{OA}} = -\frac{1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(16) 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如下图)。为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 $[2500, 3000)$ (元) 月收入段应抽出_____人。

解: 由直方图可得 $[2500, 3000)$ (元) 月收入段共有 $10000 \times 0.0005 \times 500 = 2500$ 人

$$\text{按分层抽样应抽出 } 2500 \times \frac{100}{10000} = 25 \text{ 人}$$



三、解答题

17、解: (1) 由 $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 得 $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\sin A = \sin(180^\circ - 45^\circ - C) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos C + \sin C) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

由正弦定理知 $BC = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin A = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3\sqrt{2}$

(2) $AB = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin C = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 2$

$$BD = \frac{1}{2} AB = 1$$

由余弦定理知

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cos B} \\ &= \sqrt{1 + 18 - 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

(18) 解: 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $S_4 = 1, S_8 = 17$ 知 $q \neq 1$, 所以得

$$\frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 1 \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 17 \dots\dots\dots ②$$

由①、②式得

$$\text{整理得 } \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = 17$$

$$\text{解得 } q^4 = 16$$

所以 $q = 2$ 或 $q = -2$

$$\text{将 } q = 2 \text{ 代入①式得 } a_1 = \frac{1}{15},$$

$$\text{所以 } a = \frac{2^{n-1}}{15}$$

$$\text{将 } q = -2 \text{ 代入①式得 } a_1 = -\frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{(-1)^n \times 2^{n-1}}{5}$$

19 解：设 A_i 表示事件“第二箱中取出 i 件二等品”， $i = 0, 1$ ；

B_i 表示事件“第三箱中取出 i 件二等品”， $i = 0, 1, 2$ ；

(1) 依题意所求的概率为

$$P_i = P(A_1 \cdot B_0) + P(A_0 \cdot B_1) = P(A_1)P(B_0) + P(A_0)P(B_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} + \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{12}{25}$$

$$(2) \text{解法一：所求的概率为 } P_2 = 1 - P(A_0 \cdot B_0) - P_1 = 1 - \frac{C_4^2 \cdot C_3^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} - \frac{12}{25} = \frac{7}{50}$$

解法二：所求的概率为

$$\begin{aligned} P_2 &= P(A_1 \cdot B_1) + P(A_0 \cdot B_2) + P(A_1 \cdot B_2) \\ &= P(A_1)P(B_1) + P(A_0)P(B_2) + P(A_1)P(B_2) \\ &= \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_5^2} + \frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} + \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{17}{50} \end{aligned}$$

20. 解法一：

(I) 设 O 为 AC 中点, 连接 EO, BO , 则 $EO \parallel \frac{1}{2}C_1C$, 又 $C_1C \parallel B_1B$, 所以 $EO \parallel DB$, $EOBD$

为平行四边形, $ED \parallel OB$2分

$\because AB=BC, \therefore BO \perp AC$,

又平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $BO \subset$ 面 ABC , 故 $BO \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

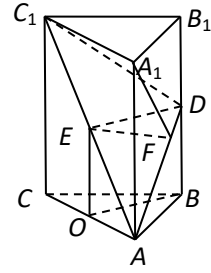
$\therefore ED \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $BD \perp AC_1$, $ED \perp CC_1$,

$\therefore ED \perp BB_1$, ED 为异面直线 AC_1 与 BB_1 的公垂线.6分

(II) 连接 A_1E , 由 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$ 可知, A_1ACC_1 为正方形,

$\therefore A_1E \perp AC_1$, 又由 $ED \perp$ 平面 ACC_1A_1 和 $ED \subset$ 平面 ADC_1 知平面

$ADC_1 \perp$ 平面 A_1ACC_1 , $\therefore A_1E \perp$ 平面 ADC_1 . 作 $EF \perp AD$, 垂足为 F , 连接 A_1F , 则 $A_1F \perp AD$, $\angle A_1FE$ 为二面角 A_1-AD-C_1 的平面角.



不妨设 $AA_1=2$, 则 $AC=2$, $AB=\sqrt{2}ED=OB=1$, $EF=\frac{AE \times ED}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

$\tan \angle A_1FE=\sqrt{3}$, $\therefore \angle A_1FE=60^\circ$.

所以二面角 A_1-AD-C_1 为 60°12分

解法二:

(I) 如图, 建立直角坐标系 $O-xyz$, 其中原点 O 为 AC 的中点.

设 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B_1(0, b, 2c)$.

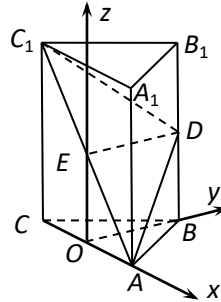
则 $C(-a, 0, 0)$, $C_1(-a, 0, 2c)$, $E(0, 0, c)$, $D(0, b, c)$3分

$ED=(0, b, 0)$, $BB_1=(0, 0, 2c)$.

$ED \cdot BB_1=0$, $\therefore ED \perp BB_1$.

又 $AC_1=(-2a, 0, 2c)$,

$ED \cdot AC_1=0$, $\therefore ED \perp AC_1$,6分



所以 ED 是异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线.

(II) 不妨设 $A(1, 0, 0)$, 则 $B(0, 1, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $A_1(1, 0, 2)$,

$BC=(-1, -1, 0)$, $AB=(-1, 1, 0)$, $AA_1=(0, 0, 2)$,

$BC \cdot AB=0$, $BC \cdot AA_1=0$, 即 $BC \perp AB$, $BC \perp AA_1$, 又 $AB \cap AA_1=A$,

$\therefore BC \perp$ 平面 A_1AD .

又 $E(0, 0, 1)$, $D(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, 1)$,

$EC=(-1, 0, -1)$, $AE=(-1, 0, 1)$, $ED=(0, 1, 0)$,

$EC \cdot AE=0$, $EC \cdot ED=0$, 即 $EC \perp AE$, $EC \perp ED$, 又 $AE \cap ED=E$,

$\therefore EC \perp$ 面 C_1AD10分

$\cos \langle EC, BC \rangle = \frac{EC \cdot BC}{|EC| \cdot |BC|} = \frac{1}{2}$, 即得 EC 和 BC 的夹角为 60° .

所以二面角 A_1-AD-C_1 为 60°12分

(21) 解: 由 $f(x)$ 为二次函数知 $a \neq 0$

$$\text{令 } f(x) = 0 \text{ 解得其两根为 } x_1 = \frac{1}{a} - \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}, x_2 = \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}$$

由此可知 $x_1 < 0, x_2 > 0$

(i) 当 $a > 0$ 时, $A = \{x | x < x_1\} \cup \{x | x > x_2\}$

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ 的充要条件是 } x_2 < 3, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} < 3 \text{ 解得 } a > \frac{6}{7}$$

(ii) 当 $a < 0$ 时, $A = \{x | x_1 < x < x_2\}$

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ 的充要条件是 } x_2 > 1, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} > 1 \text{ 解得 } a < -2$$

综上, 使 $A \cap B = \emptyset$ 成立的 a 的取值范围为 $(-\infty, -2) \cup (\frac{6}{7}, +\infty)$

22. 解: (I) 由已知条件, 得 $F(0, 1), \lambda > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 由 $AF = \lambda FB$,

$$\text{即得 } (-x_1, 1 - y_1) = \lambda(x_2, y_2 - 1),$$

$$\begin{cases} -x_1 = \lambda x_2 & \text{①} \\ 1 - y_1 = \lambda(y_2 - 1) & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{将①式两边平方并把 } y_1 = \frac{1}{4}x_1^2, y_2 = \frac{1}{4}x_2^2 \text{ 代入得 } y_1 = \lambda^2 y_2 \quad \text{③}$$

$$\text{解②、③式得 } y_1 = \lambda, y_2 = \frac{1}{\lambda}, \text{ 且有 } x_1 x_2 = -\lambda x_2^2 = -4\lambda y_2 = -4,$$

$$\text{抛物线方程为 } y = \frac{1}{4}x^2, \text{ 求导得 } y' = \frac{1}{2}x.$$

所以过抛物线上 A, B 两点的切线方程分别是

$$y = \frac{1}{2}x_1(x - x_1) + y_1, y = \frac{1}{2}x_2(x - x_2) + y_2,$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{2}x_1 x - \frac{1}{4}x_1^2, y = \frac{1}{2}x_2 x - \frac{1}{4}x_2^2.$$

$$\text{解出两条切线的交点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 x_2}{4}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, -1\right). \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } FM \cdot AB = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, -2\right) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - 2\left(\frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^2\right) = 0$$

所以 $FM \cdot AB$ 为定值, 其值为 0. $\dots\dots 7$ 分

(II) 由 (I) 知在 $\triangle ABM$ 中, $FM \perp AB$, 因而 $S = \frac{1}{2}|AB| |FM|$.

$$\begin{aligned}
 |FM| &= \sqrt{(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 2) + (-2)} = \sqrt{\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4} \\
 &= \sqrt{y_1 + y_2 + \frac{1}{2} \times (-4) + 4} \\
 &= \sqrt{\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2} = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.
 \end{aligned}$$

因为 $|AF|$ 、 $|BF|$ 分别等于 A 、 B 到抛物线准线 $y = -1$ 的距离，所以

$$|AB| = |AF| + |BF| = y_1 + y_2 + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2.$$

于是 $S = \frac{1}{2} |AB| |FM| = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^3,$

由 $\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \geq 2$ 知 $S \geq 4$ ，且当 $\lambda = 1$ 时， S 取得最小值 4.