

2018年上海市高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1. (4分) (2018•上海) 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为 18.

【考点】OM: 二阶行列式的定义.

【专题】11: 计算题; 49: 综合法; 5R: 矩阵和变换.

【分析】直接利用行列式的定义, 计算求解即可.

【解答】解: 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 5 - 2 \times 1 = 18$.

故答案为: 18.

【点评】本题考查行列式的定义, 运算法则的应用, 是基本知识的考查.

2. (4分) (2018•上海) 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $\pm \frac{1}{2}x$.

【考点】KC: 双曲线的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】先确定双曲线的焦点所在坐标轴, 再确定双曲线的实轴长和虚轴长, 最后确定双曲线的渐近线方程.

【解答】解: \because 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的 $a=2$, $b=1$, 焦点在 x 轴上

而双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$

\therefore 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$

故答案为: $y = \pm \frac{1}{2}x$

【点评】本题考察了双曲线的标准方程, 双曲线的几何意义, 特别是双曲线的渐近线方程, 解题时要注意先定位, 再定量的解题思想

3. (4分) (2018•上海) 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为 21

(结果用数值表示) .

【考点】 DA: 二项式定理.

【专题】 38: 对应思想; 40: 定义法; 5P: 二项式定理.

【分析】 利用二项式展开式的通项公式求得展开式中 x^2 的系数.

【解答】 解: 二项式 $(1+x)^7$ 展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_7^r \cdot x^r,$$

令 $r=2$, 得展开式中 x^2 的系数为 $C_7^2=21$.

故答案为: 21.

【点评】 本题考查了二项展开式的通项公式的应用问题, 是基础题.

4. (4分) (2018•上海) 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(3, 1)$, 则 $a = \underline{7}$.

【考点】 4R: 反函数.

【专题】 11 : 计算题; 33 : 函数思想; 40: 定义法; 51 : 函数的性质及应用.

【分析】 由反函数的性质得函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ 的图象经过点 $(1, 3)$, 由此能求出 a .

【解答】 解: \because 常数 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$.

$f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(3, 1)$,

\therefore 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ 的图象经过点 $(1, 3)$,

$\therefore \log_2(1+a) = 3$,

解得 $a=7$.

故答案为: 7.

【点评】 本题考查实数值的求法, 考查函数的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

5. (4分) (2018•上海) 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 1 - 7i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| = \underline{5}$.

【考点】 A8: 复数的模.

【专题】 38：对应思想；4A：数学模型法；5N：数系的扩充和复数.

【分析】 把已知等式变形，然后利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数求模公式计算得答案.

【解答】 解：由 $(1+i)z=1-7i$,

$$\text{得 } z = \frac{1-7i}{1+i} = \frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i,$$

$$\text{则 } |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

故答案为：5.

【点评】 本题考查了复数代数形式的乘除运算，考查了复数模的求法，是基础题.

6. (4分) (2018•上海) 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_3=0$ ， $a_6+a_7=14$ ，则 $S_7=$ 14 .

【考点】 85：等差数列的前 n 项和.

【专题】 11：计算题；34：方程思想；40：定义法；54：等差数列与等比数列.

【分析】 利用等差数列通项公式列出方程组，求出 $a_1=-4$ ， $d=2$ ，由此能求出 S_7 .

【解答】 解：∵等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_3=0$ ， $a_6+a_7=14$ ，

$$\therefore \begin{cases} a_1+2d=0 \\ a_1+5d+a_1+6d=14 \end{cases},$$

解得 $a_1=-4$ ， $d=2$ ，

$$\therefore S_7=7a_1+\frac{7 \times 6}{2}d = -28+42=14.$$

故答案为：14.

【点评】 本题考查等差数列的前 7 项和的求法，考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

7. (5分) (2018•上海) 已知 $\alpha \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ ，若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上递减，则 $\alpha=$ -1 .

【考点】 4U: 幂函数的概念、解析式、定义域、值域.

【专题】 11 : 计算题; 34 : 方程思想; 40: 定义法; 51 : 函数的性质及应用.

【分析】 由幂函数 $f(x) = x^a$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 得到 a 是奇数, 且 $a < 0$, 由此能求出 a 的值.

【解答】 解: $\because a \in \{-2, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

幂函数 $f(x) = x^a$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减,

$\therefore a$ 是奇数, 且 $a < 0$,

$\therefore a = -1$.

故答案为: -1 .

【点评】 本题考查实数值的求法, 考查幂函数的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

8. (5分) (2018•上海) 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 0)$, E 、 F 是 y 轴上的两个动点, 且 $|\overrightarrow{EF}| = 2$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为 -3.

【考点】 90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 41: 向量法; 5A: 平面向量及应用.

【分析】 据题意可设 $E(0, a)$, $F(0, b)$, 从而得出 $|a - b| = 2$, 即 $a = b + 2$, 或 $b = a + 2$, 并可求得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -2 + ab$, 将 $a = b + 2$ 带入上式即可求出 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值, 同理将 $b = a + 2$ 带入, 也可求出 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值.

【解答】 解: 根据题意, 设 $E(0, a)$, $F(0, b)$;

$$\therefore |\overrightarrow{EF}| = |a - b| = 2;$$

$$\therefore a = b + 2, \text{ 或 } b = a + 2;$$

$$\text{且 } \overrightarrow{AE} = (1, a), \overrightarrow{BF} = (-2, b);$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -2 + ab;$$

$$\text{当 } a = b + 2 \text{ 时, } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -2 + (b + 2) \cdot b = b^2 + 2b - 2;$$

$\therefore b^2+2b-2$ 的最小值为 $\frac{-8-4}{4}=-3$;

$\therefore \vec{AE} \cdot \vec{BF}$ 的最小值为 -3 ，同理求出 $b=a+2$ 时， $\vec{AE} \cdot \vec{BF}$ 的最小值为 -3 。

故答案为： -3 。

【点评】考查根据点的坐标求两点间的距离，根据点的坐标求向量的坐标，以及向量坐标的数量积运算，二次函数求最值的公式。

9. (5分) (2018•上海) 有编号互不相同的五个砝码，其中5克、3克、1克砝码各一个，2克砝码两个，从中随机选取三个，则这三个砝码的总质量为9克的概率是 $\frac{1}{5}$ (结果用最简分数表示)。

【考点】CB: 古典概型及其概率计算公式。

【专题】11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 51: 概率与统计。

【分析】求出所有事件的总数，求出三个砝码的总质量为9克的事件总数，然后求解概率即可。

【解答】解：编号互不相同的五个砝码，其中5克、3克、1克砝码各一个，2克砝码两个，

从中随机选取三个，3个数中含有1个2；2个2，没有2，3种情况，

所有的事件总数为： $C_5^3=10$ ，

这三个砝码的总质量为9克的事件只有：5，3，1或5，2，2两个，

所以：这三个砝码的总质量为9克的概率是： $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ ，

故答案为： $\frac{1}{5}$ 。

【点评】本题考查古典概型的概率的求法，是基本知识的考查。

10. (5分) (2018•上海) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，前n

项和为 S_n 。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$ ，则 $q=3$ 。

【考点】8J: 数列的极限。

【专题】11: 计算题; 34: 方程思想; 35: 转化思想; 49: 综合法; 55

: 点列、递归数列与数学归纳法.

【分析】 利用等比数列的通项公式求出首项, 通过数列的极限, 列出方程, 求解公比即可.

【解答】 解: 等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 可得 $a_1 = 1$,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$, 所以数列的公比不是 1,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad a_{n+1} = q^n.$$

$$\text{可得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-q^n}{1-q}}{q^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{(1-q)q^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{q^n} - 1}{1-q} = \frac{1}{q-1} = \frac{1}{2},$$

可得 $q = 3$.

故答案为: 3.

【点评】 本题考查数列的极限的运算法则的应用, 等比数列求和以及等比数列的简单性质的应用, 是基本知识的考查.

11. (5分) (2018•上海) 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图象经过点 P

$(p, \frac{6}{5})$, $Q(q, \frac{1}{5})$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a = \underline{6}$.

【考点】 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 35: 转化思想; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 直接利用函数的关系式, 利用恒等变换求出相应的 a 值.

【解答】 解: 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图象经过点 P $(p, \frac{6}{5})$, $Q(q, \frac{1}{5})$.

$$\text{则: } \frac{2^p}{2^p + ap} + \frac{2^q}{2^q + aq} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{5} = 1,$$

$$\text{整理得: } \frac{2^{p+q} + 2^p aq + 2^q ap + 2^{p+q}}{2^{p+q} + 2^p aq + 2^q ap + a^2 pq} = 1,$$

解得: $2^{p+q} = a^2 pq$,

由于： $2^{p+q}=36pq$,

所以： $a^2=36$,

由于 $a>0$,

故： $a=6$.

故答案为： 6

【点评】 本题考查的知识要点： 函数的性质的应用， 代数式的变换问题的应用

12. (5分) (2018•上海) 已知实数 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 满足： $x_1^2+y_1^2=1$ ， $x_2^2+y_2^2=1$

， $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$ ， 则 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $\underline{\underline{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$.

【考点】 7F： 基本不等式及其应用； IT： 点到直线的距离公式.

【专题】 35： 转化思想； 48： 分析法； 59： 不等式的解法及应用.

【分析】 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $\vec{OA}=(x_1, y_1)$ ， $\vec{OB}=(x_2, y_2)$ ， 由圆的方程和向量数量积的定义、 坐标表示， 可得三角形 OAB 为等边三角形， $AB=1$ ， $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的几何意义为点 A ， B 两点到直线 $x+y-1=0$ 的距离 d_1

与 d_2 之和， 由两平行线的距离可得所求最大值.

【解答】 解： 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$\vec{OA}=(x_1, y_1)$ ， $\vec{OB}=(x_2, y_2)$ ，

由 $x_1^2+y_1^2=1$ ， $x_2^2+y_2^2=1$ ， $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$ ，

可得 A ， B 两点在圆 $x^2+y^2=1$ 上，

且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times 1 \times \cos \angle AOB = \frac{1}{2}$ ，

即有 $\angle AOB = 60^\circ$ ，

即三角形 OAB 为等边三角形，

$AB=1$ ，

$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的几何意义为点 A ， B 两点

到直线 $x+y-1=0$ 的距离 d_1 与 d_2 之和,

显然A, B在第三象限, AB所在直线与直线 $x+y=1$ 平行,

可设AB: $x+y+t=0$, ($t>0$),

由圆心O到直线AB的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{2}}$,

可得 $2\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}=1$, 解得 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

即有两平行线的距离为 $\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$,

即 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

故答案为: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查向量数量积的坐标表示和定义, 以及圆的方程和运用, 考查点与圆的位置关系, 运用点到直线的距离公式是解题的关键, 属于难题.

二、选择题 (本大题共有4题, 满分20分, 每题5分) 每题有且只有一个正确选项. 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

13. (5分) (2018•上海) 设P是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点, 则P到该椭圆的两个

焦点的距离之和为 ()

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{2}$

【考点】 K4: 椭圆的性质.

【专题】 11: 计算题; 49: 综合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 判断椭圆长轴 (焦点坐标) 所在的轴, 求出a, 接利用椭圆的定义, 转化求解即可.

【解答】 解: 椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标在x轴, $a=\sqrt{5}$,

P是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的动点, 由椭圆的定义可知: 则P到该椭圆的两个焦点的距

离之和为 $2a=2\sqrt{5}$.

故选：C.

【点评】 本题考查椭圆的简单性质的应用，椭圆的定义的应用，是基本知识的考查.

14. (5分) (2018•上海) 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

【考点】 29: 充分条件、必要条件、充要条件.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 40: 定义法; 5L: 简易逻辑.

【分析】 “ $a > 1$ ” \Rightarrow “ $\frac{1}{a} < 1$ ”，“ $\frac{1}{a} < 1$ ” \Rightarrow “ $a > 1$ 或 $a < 0$ ”，由此能求出结果.

【解答】 解： $a \in \mathbb{R}$ ，则“ $a > 1$ ” \Rightarrow “ $\frac{1}{a} < 1$ ”，

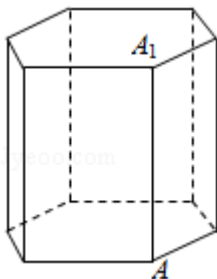
“ $\frac{1}{a} < 1$ ” \Rightarrow “ $a > 1$ 或 $a < 0$ ”，

\therefore “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充分非必要条件.

故选：A.

【点评】 本题考查充分条件、必要条件的判断，考查不等式的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

15. (5分) (2018•上海) 《九章算术》中，称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马，设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱，如图，若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一边，则这样的阳马的个数是 ()



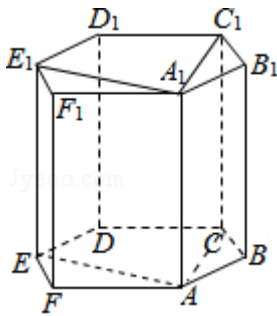
- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

【考点】 D8: 排列、组合的实际应用.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 4R: 转化法; 5O: 排列组合.

【分析】根据新定义和正六边形的性质可得答案.

【解答】解：根据正六边形的性质，则 $D_1 - A_1ABB_1$ ， $D_1 - A_1AFF_1$ 满足题意，而 C_1 ， E_1 ， C ， D ， E ，和 D_1 一样，有 $2 \times 6 = 12$ ，
当 A_1ACC_1 为底面矩形，有2个满足题意，
当 A_1AEE_1 为底面矩形，有2个满足题意，
故有 $12 + 2 + 2 = 16$
故选：D.



【点评】本题考查了新定义，以及排除组合的问题，考查了棱柱的特征，属于中档题.

16. (5分) (2018•上海) 设 D 是含数1的有限实数集， $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图象重合，则在以下各项中， f

(1)的可能取值只能是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 0

【考点】3A：函数的图象与图象的变换.

【专题】35：转化思想；51：函数的性质及应用；56：三角函数的求值.

【分析】直接利用定义函数的应用求出结果.

【解答】解：由题意得到：问题相当于圆上由12个点为一组，每次绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后与下一个点会重合.

我们可以通过代入和赋值的方法当 $f(1) = \sqrt{3}$ ， $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，0时，此时得到的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ ， $\frac{\pi}{6}$ ，0，然而此时 $x=0$ 或者 $x=1$ 时，都有2个 y 与之对应，而我们知道函数的定义就是要求一个 x 只能对应一个 y ，因此只有当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，此时旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，此时满足

一个x只会对应一个y，因此答案就选：B.

故选：B.

【点评】 本题考查的知识要点：定义性函数的应用.

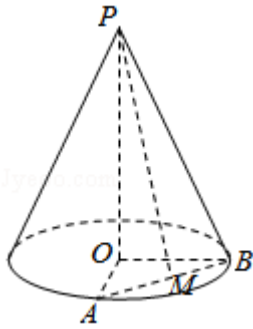
三、解答题（本大题共有5题，满分76分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. （14分）（2018•上海）已知圆锥的顶点为P，底面圆心为O，半径为2.

（1）设圆锥的母线长为4，求圆锥的体积；

（2）设PO=4，OA、OB是底面半径，且 $\angle AOB=90^\circ$ ，M为线段AB的中点，如图.

求异面直线PM与OB所成的角的大小.



【考点】 LM：异面直线及其所成的角；L5：旋转体（圆柱、圆锥、圆台）；LF：棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】 11：计算题；31：数形结合；41：向量法；5F：空间位置关系与距离；5G：空间角.

【分析】（1）由圆锥的顶点为P，底面圆心为O，半径为2，圆锥的母线长为4能求出圆锥的体积.

（2）以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OP为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出异面直线PM与OB所成的角.

【解答】解：（1）∵圆锥的顶点为P，底面圆心为O，半径为2，圆锥的母线长为4，

$$\begin{aligned} \therefore \text{圆锥的体积} V &= \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times \sqrt{4^2 - 2^2} \\ &= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}. \end{aligned}$$

（2）∵PO=4，OA，OB是底面半径，且 $\angle AOB=90^\circ$ ，

M为线段AB的中点，

∴以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OP为z轴，

建立空间直角坐标系，

P(0, 0, 4)，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，

M(1, 1, 0)，O(0, 0, 0)，

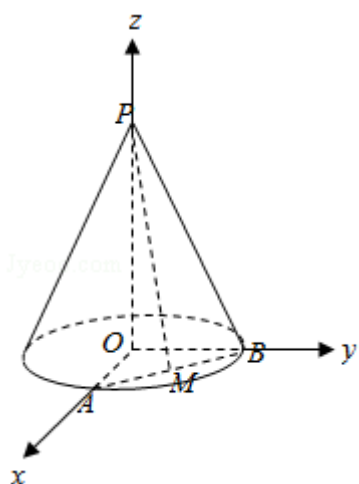
$\overrightarrow{PM} = (1, 1, -4)$ ， $\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$ ，

设异面直线PM与OB所成的角为 θ ，

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{2}{\sqrt{18} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\therefore \theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

∴异面直线PM与OB所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$.



【点评】 本题考查圆锥的体积的求法，考查异面直线所成角的正切值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

18. (14分) (2018•上海) 设常数 $a \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

(2) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$ ，求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

【考点】 GP: 两角和与差的三角函数; GS: 二倍角的三角函数.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 4R: 转化法; 58: 解三角形.

【分析】 (1) 根据函数的奇偶性和三角形的函数的性质即可求出,

(2) 先求出a的值, 再根据三角形函数的性质即可求出.

【解答】 解: (1) $\because f(x) = a\sin 2x + 2\cos^2 x$,

$$\therefore f(-x) = -a\sin 2x + 2\cos^2 x,$$

$\because f(x)$ 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore -a\sin 2x + 2\cos^2 x = a\sin 2x + 2\cos^2 x,$$

$$\therefore 2a\sin 2x = 0,$$

$$\therefore a = 0;$$

$$(2) \because f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore a\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = a + 1 = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$$\therefore f(x) = 1 - \sqrt{2},$$

$$\therefore 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 1 - \sqrt{2},$$

$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ 或 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi, \text{ 或 } x = \frac{13\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore x \in \left[-\pi, \pi\right],$$

$$\therefore x = \frac{13\pi}{24} \text{ 或 } x = \frac{19\pi}{24} \text{ 或 } x = -\frac{5\pi}{24} \text{ 或 } x = -\frac{11\pi}{24}$$

【点评】 本题考查了三角函数的化简和求值, 以及三角函数的性质, 属于基础题.

19. (14分) (2018•上海) 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族S中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当S中x% ($0 < x < 100$) 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30 \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位: 分钟}),$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为40分钟, 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.

【考点】5B: 分段函数的应用.

【专题】12 : 应用题; 33 : 函数思想; 4C : 分类法; 51 : 函数的性质及应用.

【分析】(1) 由题意知求出 $f(x) > 40$ 时 x 的取值范围即可;

(2) 分段求出 $g(x)$ 的解析式, 判断 $g(x)$ 的单调性, 再说明其实际意义.

【解答】解: (1) 由题意知, 当 $30 < x < 100$ 时,

$$f(x) = 2x + \frac{1800}{x} - 90 > 40,$$

$$\text{即 } x^2 - 65x + 900 > 0,$$

$$\text{解得 } x < 20 \text{ 或 } x > 45,$$

$\therefore x \in (45, 100)$ 时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间;

(2) 当 $0 < x \leq 30$ 时,

$$g(x) = 30 \cdot x\% + 40(1 - x\%) = 40 - \frac{x}{10};$$

当 $30 < x < 100$ 时,

$$g(x) = \left(2x + \frac{1800}{x} - 90\right) \cdot x\% + 40(1 - x\%) = \frac{x^2}{50} - \frac{13}{10}x + 58;$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} 40 - \frac{x}{10} \\ \frac{x^2}{50} - \frac{13}{10}x + 58 \end{cases};$$

当 $0 < x < 32.5$ 时, $g(x)$ 单调递减;

当 $32.5 < x < 100$ 时, $g(x)$ 单调递增;

说明该地上班族 S 中有小于32.5%的人自驾时, 人均通勤时间是递减的;

有大于32.5%的人自驾时, 人均通勤时间是递增的;

当自驾人数为32.5%时，人均通勤时间最少.

【点评】 本题考查了分段函数的应用问题，也考查了分类讨论与分析问题、解决问题的能力.

20. (16分) (2018•上海) 设常数 $t > 2$. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F(2, 0)$ ，直线 $l: x=t$ ，曲线 $\Gamma: y^2=8x (0 \leq x \leq t, y \geq 0)$. l 与 x 轴交于点 A 、与 Γ 交于点 B . P 、 Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.

(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t=3$ ， $|FQ|=2$ ，线段 OQ 的中点在直线 FP 上，求 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 $t=8$ ，是否存在以 FP 、 FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$ ，使得点 E 在 Γ 上? 若存在，求点 P 的坐标; 若不存在，说明理由.

【考点】 KN: 直线与抛物线的位置关系.

【专题】 35: 转化思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 (1) 方法一: 设 B 点坐标，根据两点之间的距离公式，即可求得 $|BF|$;

方法二: 根据抛物线的定义，即可求得 $|BF|$;

(2) 根据抛物线的性质，求得 Q 点坐标，即可求得 OD 的中点坐标，即可求得直线 PF 的方程，代入抛物线方程，即可求得 P 点坐标，即可求得 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 P 及 E 点坐标，根据直线 $k_{PF} \cdot k_{FQ} = -1$ ，求得直线 QF 的方程，求得 Q 点坐标，根据 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FE}$ ，求得 E 点坐标，则 $(\frac{48+y^2}{4y})^2 = 8(\frac{y^2}{8} + 6)$ ，即可求得 P 点坐标.

标.

【解答】 解: (1) 方法一: 由题意可知: 设 $B(t, 2\sqrt{2t})$,

$$\text{则 } |BF| = \sqrt{(t-2)^2 + 8t} = t+2,$$

$$\therefore |BF| = t+2;$$

方法二: 由题意可知: 设 $B(t, 2\sqrt{2t})$,

由抛物线的性质可知: $|BF| = t + \frac{p}{2} = t+2$, $\therefore |BF| = t+2$;

(2) $F(2, 0)$, $|FQ|=2$, $t=3$, 则 $|FA|=1$,

$\therefore |AQ| = \sqrt{3}$, $\therefore Q(3, \sqrt{2})$, 设 OQ 的中点 D ,

$$D \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$k_{QF} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{3}{2} - 2} = -\sqrt{3}, \text{ 则直线PF方程: } y = -\sqrt{3}(x-2),$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\sqrt{3}(x-2) \\ y^2 = 8x \end{cases}, \text{ 整理得: } 3x^2 - 20x + 12 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{2}{3}, x = 6 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \triangle AQP \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{6},$$

$$(3) \text{ 存在, 设 } P \left(\frac{y^2}{8}, y \right), E \left(\frac{m^2}{8}, m \right), \text{ 则 } k_{PF} = \frac{y}{\frac{y^2}{8} - 2} = \frac{8y}{y^2 - 16}, k_{FQ} = \frac{16 - y^2}{8y}$$

,

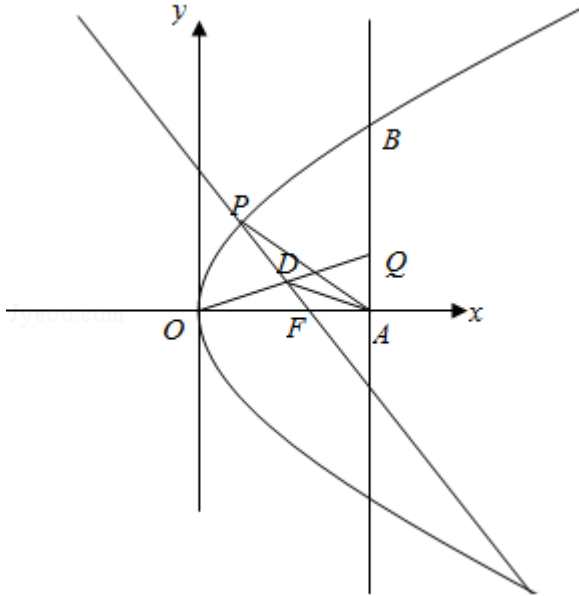
$$\text{直线QF方程为 } y = \frac{16 - y^2}{8y}(x - 2), \therefore y_Q = \frac{16 - y^2}{8y}(8 - 2) = \frac{48 - 3y^2}{4y}, Q \left(8, \right.$$

$$\left. \frac{48 - 3y^2}{4y} \right),$$

$$\text{根据 } \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FE}, \text{ 则 } E \left(\frac{y^2}{8} + 6, \frac{48 + y^2}{4y} \right),$$

$$\therefore \left(\frac{48 + y^2}{4y} \right)^2 = 8 \left(\frac{y^2}{8} + 6 \right), \text{ 解得: } y^2 = \frac{16}{5},$$

$$\therefore \text{存在以FP、FQ为邻边的矩形FPEQ, 使得点E在}\Gamma\text{上, 且 } P \left(\frac{2}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5} \right).$$



【点评】 本题考查抛物线的性质，直线与抛物线的位置关系，考查转化思想，计算能力，属于中档题.

21. (18分) (2018•上海) 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m ;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有100个为正数, 求 d 的取值范围.

【考点】 8M: 等差数列与等比数列的综合.

【专题】 34: 方程思想; 48: 分析法; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】 (1) 运用等比数列的通项公式和新定义“接近”, 即可判断;

(2) 由新定义可得 $a_n - 1 \leq b_n \leq a_n + 1$, 求得 $b_i, i = 1, 2, 3, 4$ 的范围, 即可得到所求个数;

(3) 运用等差数列的通项公式可得 a_n , 讨论公差 $d > 0, d = 0, -2 < d < 0, d \leq -2$, 结合新定义“接近”, 推理和运算, 即可得到所求范围.

【解答】 解: (1) 数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近.

理由： $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

$$\text{可得 } a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, b_n = a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2^n} + 1,$$

$$\text{则 } |b_n - a_n| = \left| \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right| = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1, n \in \mathbb{N}^*,$$

可得数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近；

(2) $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列，

$$\text{可得 } a_n - 1 \leq b_n \leq a_n + 1,$$

数列 $\{a_n\}$ 的前四项为： $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=8,$

$$\text{可得 } b_1 \in [0, 2], b_2 \in [1, 3], b_3 \in [3, 5], b_4 \in [7, 9],$$

可能 b_1 与 b_2 相等， b_2 与 b_3 相等，但 b_1 与 b_3 不相等， b_4 与 b_3 不相等，

$$\text{集合 } M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\},$$

M 中元素的个数 $m=3$ 或 4 ；

(3) $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，若存在数列 $\{b_n\}$ 满足： $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近，

$$\text{可得 } a_n = a_1 + (n-1)d,$$

①若 $d > 0$ ，取 $b_n = a_n$ ，可得 $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n = d > 0$ ，

则 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中有200个正数，符合题意；

②若 $d = 0$ ，取 $b_n = a_1 - \frac{1}{n}$ ，则 $|b_n - a_n| = \left| a_1 - \frac{1}{n} - a_1 \right| = \frac{1}{n} < 1, n \in \mathbb{N}^*$ ，

$$\text{可得 } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0,$$

则 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中有200个正数，符合题意；

③若 $-2 < d < 0$ ，可令 $b_{2n-1} = a_{2n-1} - 1, b_{2n} = a_{2n} + 1$ ，

$$\text{则 } b_{2n} - b_{2n-1} = a_{2n} + 1 - (a_{2n-1} - 1) = 2 + d > 0,$$

则 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中恰有100个正数，符合题意；

④若 $d \leq -2$ ，若存在数列 $\{b_n\}$ 满足： $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近，

$$\text{即为 } a_n - 1 \leq b_n \leq a_n + 1, a_{n+1} - 1 \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} + 1,$$

$$\text{可得 } b_{n+1} - b_n \leq a_{n+1} + 1 - (a_n - 1) = 2 + d \leq 0,$$

$b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中无正数，不符合题意。

综上所述， d 的范围是 $(-2, +\infty)$ 。

【点评】 本题考查新定义“接近”的理解和运用，考查等差数列和等比数列的定义和通项公式的运用，考查分类讨论思想方法，以及运算能力和推理能力，属

于难题.