

2012年浙江省高考数学（理科）试卷（解析版）

数 学（理科）

选择题部分（共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，只有一个项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | 1 < x < 4\}$ ，集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$ ，则 $A \cap (C_R B) =$

- A. (1, 4) B. (3, 4) C. (1, 3) D. (1, 2) \cup (3, 4)

【答案】B

2. 已知 i 是虚数单位，则 $\frac{3+i}{1-i} =$

- A. $1-2i$ B. $2-i$ C. $2+i$ D. $1+2i$

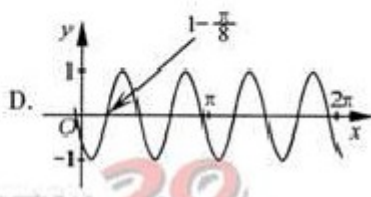
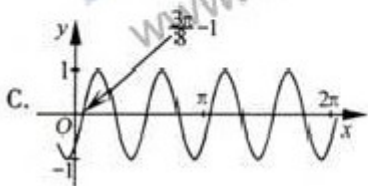
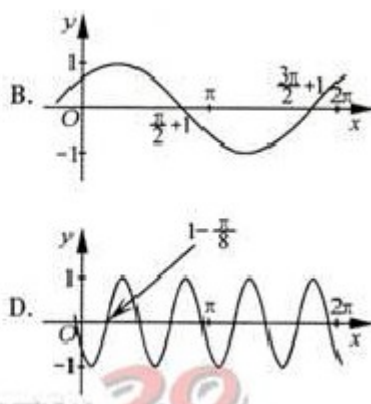
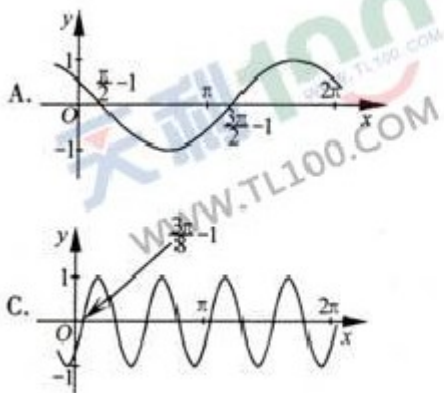
【答案】D

3. 设 $a \in R$ ，则“ $a=1$ ”是“直线 $l_1: ax+2y-1=0$ 与直线 $l_2: x+(a+1)y+4=0$ 平行”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

4. 把函数 $y = \cos 2x + 1$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），然后向左平移1个单位长度，再向下平移1个单位长度，得到的图像是



【答案】A

5. 设 a, b 是两个非零向量

A. 若 $|a+b|=|a|-|b|$, 则 $a \perp b$

B. 若 $a \perp b$, 则 $|a+b|=|a|-|b|$

C. 若 $|a+b|=|a|-|b|$, 则存在实数 λ , 使得 $b = \lambda a$

D. 若存在实数 λ , 使得 $b = \lambda a$, 则 $|a+b|=|a|-|b|$

【答案】C

6. 若从 1, 2, 3, ..., 9 这 9 个整数中同时取 4 个不同的数, 其和为偶数, 则不同的取法共有

A. 60 种

B. 63 种

C. 65 种

D. 66 种

【答案】D

7. 设 S_n 是公差为 d ($d \neq 0$) 的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则下列命题错误的是

A. 若 $d < 0$, 则数列 $\{S_n\}$ 有最大项

B. 若数列 $\{S_n\}$ 有最大项, 则 $d < 0$

C. 若数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $S_n > 0$

D. 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $S_n > 0$, 则数列 $\{S_n\}$ 是递增数列

【答案】C

8. 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的

左、右两焦点, B 是虚轴的端点, 直线 F_1B 与 C 的两条渐近线分别交于 P, Q 两点, 线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点

M . 若 $|MF_1| = |F_1F_2|$, 则 C 的离心率是

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

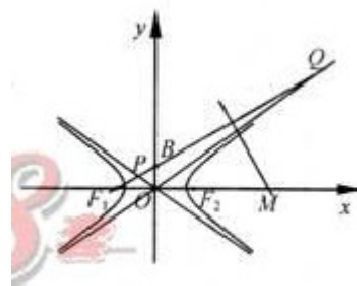
B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】B

9. 设 $a > 0, b > 0$



(第8题图)

- A. 若 $2^a + 2a = 2^b + 3b$, 则 $a > b$ B. $2^a + 2a = 2^b + 3b$ 若, 则 $a < b$
- C. 若 $2^a - 2a = 2^b - 3b$, 则 $a > b$ D. 若 $2^a - 2a = 2^b - 3b$, 则 $a < b$

【答案】A

10. 已知矩形 $ABCD$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$. 将 $\triangle ABD$ 沿矩形的对角线 BD 所在的直线进行翻折, 在翻折过程中,

- A. 存在某个位置, 使得直线 AC 与直线 BD 垂直
 B. 存在某个位置, 使得直线 AB 与直线 CD 垂直
 C. 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直
 D. 对任意位置, 三对直线 “ AC 与 BD ”, “ AB 与 CD ”, “ AD 与 BC ” 均不垂直

【答案】B

非选择题部分 (共 100 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分。

11. 已知某三棱锥的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该三棱锥的体积等于 _____ cm^3 .



(第 11 题图)

【答案】1

12. 若某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{120}$

13. 设公比为 $q (q > 0)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

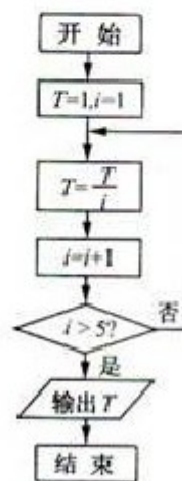
若 $S_2 = 3a_2 + 2$, $S_4 = 3a_4 + 2$, 则 $q =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

14. 若将函数 $f(x) = x^5$ 表示为

$$f(x) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + a_3(1+x)^3 + a_4(1+x)^4 + a_5(1+x)^5,$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_5$ 为实数, 则 $a_3 =$ _____.



(第 12 题图)

【答案】 10

15. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 3$, $BC = 10$,

则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

【答案】 -16

16. 定义: 曲线 C 上的点到直线的距离的最小值称为曲线 C 到直线 l

的距离. 已知曲线 $C_1: y = x^2 + a$ 到直线 $l: y = x$ 的距离等于曲线

$C_2: x^2 + (y + 4)^2 = 2$ 到直线 $l: y = x$ 的距离, 则实数 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

17. 设 $a \in \mathbb{R}$, 若 $x > 0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1) \geq 0$,

则 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 72 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知

$$\cos A = \frac{2}{3}, \quad \sin B = \sqrt{5} \cos C.$$

(I) 求 $\tan C$ 的值;

(II) 若 $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 本题主要考查三角恒等变换、正弦定理等知识, 同时考查运算求解能力. 满分 14 分.

(I) 因为 $0 < A < \pi$, $\cos A = \frac{2}{3}$, 得

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \sqrt{5} \cos C &= \sin B = \sin(A + C) \\ &= \sin A \cos C + \cos A \sin C \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \cos C + \frac{2}{3} \sin C \end{aligned}$$

所以 $\tan C = \sqrt{5}$

(II) 由 $\tan C = \sqrt{5}$, 得

$$\sin C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \quad \cos C = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

于是

$$\sin B = \sqrt{5} \cos C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

由 $a = \sqrt{2}$ 及正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得

$$c = \sqrt{3}.$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

19. (本题满分 14 分) 已知箱中装有 4 个白球和 5 个黑球, 且规定: 取出一个白球得 2 分, 取出一个黑球得 1 分. 现从箱中任取 (无放回, 且每球取道的机会均等) 3 个球, 记随机变量 X 为取出此 3 球所得分数之和.

(I) 求 X 的分布列;

(II) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

【答案】 本题主要考查随机事件的概率和随机变量的分布列、数学期望等概念, 同时考查抽象概括、运算求解能力和应用意识. 满分 14 分.

(I) 由题意得 X 取 3, 4, 5, 6, 且

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}, \quad P(X=4) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^2}{C_9^3} = \frac{10}{21},$$

$$P(X=5) = \frac{C_4^2 \cdot C_5^1}{C_9^3} = \frac{5}{14}, \quad P(X=6) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}.$$

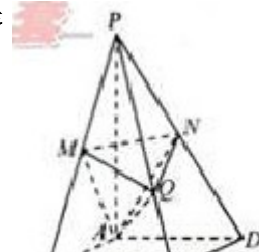
所以 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

(II) 由 (I) 知

$$E(X) = 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) + 5 \cdot P(X=5) + 6 \cdot P(X=6) = \frac{13}{3}.$$

20. (本题满分 15 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是



边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ，且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，

$PA = 2\sqrt{6}$ ， M ， N 分别为 PB ， PD 的中点。

(I) 证明： $MN \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(II) 过点 A 作 $AQ \perp PC$ ，垂足为点 Q ，求二面角

$A-MN-Q$ 的平面角的余弦值。

【答案】 本题主要考察空间点、线、面位置关系，二面角等基础知识，空间向量的应用，同时考查空间想像能力和运算求解能力。满分 15 分。

(I) 因为 M ， N 分别是 PB ， PD 的中点，所以 MN 是 $\triangle PBD$ 的中位线，所以

$$MN \parallel BD$$

又因为 $MN \not\subset$ 平面 $ABCD$ ，所以

$$MN \parallel \text{平面 } ABCD.$$

(II) 方法一：

连结 AC 交 BD 于 O ，以 O 为原点， OC ， OD 所在直线为 x ， y 轴，建立空

间直角坐标系 $Oxyz$ ，如图所示

在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 120^\circ$ ，得

$$AC = AB = 2\sqrt{3}, \quad BD = \sqrt{3}AB = 6.$$

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以

$$PA \perp AC.$$

在直角 $\triangle PAC$ 中， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $PA = 2\sqrt{6}$ ， $AQ \perp PC$ ，得

$$QC = 2, \quad PQ = 4.$$

由此知各点坐标如下，

$$A(-\sqrt{3}, 0, 0), \quad B(0, -3, 0),$$

$$C(\sqrt{3}, 0, 0), \quad D(0, 3, 0),$$

$$P(-\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{6}), \quad M(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, \sqrt{6}),$$

$$N(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{6}), \quad Q(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}).$$

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 为平面 AMN 的法向量。

由 $\overline{AM} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, \sqrt{6})$, $\overline{AN} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{6})$ 知

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + \sqrt{6}z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y + \sqrt{6}z = 0 \end{cases}$$

取 $x = -1$, 得

$$\mathbf{m} = (2\sqrt{2}, 0, -1)$$

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 QMN 的法向量.

由 $\overline{QM} = (-\frac{5\sqrt{3}}{6}, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3})$, $\overline{QN} = (-\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ 知

$$\begin{cases} -\frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{6}}{3}z = 0 \\ -\frac{5\sqrt{3}}{6}x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{6}}{3}z = 0 \end{cases}$$

取 $z = 5$, 得

$$\mathbf{n} = (2\sqrt{2}, 0, 5)$$

于是

$$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{33}}{33}.$$

所以二面角 $A-MN-Q$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$.

方法二:

在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 120^\circ$, 得

$$AC = AB = BC = DA, \quad BD = \sqrt{3}AB,$$

有因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以

$$PA \perp AB, \quad PA \perp AC, \quad PA \perp AD,$$

所以 $PB = PC = PD$.

所以 $\triangle PBC \cong \triangle PDC$.

而 M, N 分别是 PB, PD 的中点, 所以

$$MQ = NQ, \quad \text{且} \quad AM = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}PD = AN.$$

取线段 MN 的中点 E , 连结 AE, EQ , 则

$$AE \perp MN, QE \perp MN,$$

所以 $\angle AEQ$ 为二面角 $A-MN-Q$ 的平面角.

由 $AB = 2\sqrt{3}$, $PA = 2\sqrt{6}$, 故

在 $\triangle AMN$ 中, $AM = AN = 3$, $MN = \frac{1}{2}BD = 3$, 得

$$AE = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

在直角 $\triangle PAC$ 中, $AQ \perp PC$, 得

$$AQ = 2\sqrt{2}, QG = 2, PQ = 4,$$

在 $\triangle PBC$ 中, $\cos \angle BPC = \frac{PB^2 + PC^2 - BC^2}{2PB \cdot PC} = \frac{5}{6}$, 得

$$MQ = \sqrt{PM^2 + PQ^2 - 2PM \cdot PQ \cos \angle BPC} = \sqrt{5}.$$

在等腰 $\triangle MQN$ 中, $MQ = NQ = \sqrt{5}$, $MN = 3$, 得

$$QE = \sqrt{MQ^2 - ME^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

在 $\triangle AEQ$ 中, $AE = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $QE = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $AQ = 2\sqrt{2}$, 得

$$\cos \angle AEQ = \frac{AE^2 + QE^2 - AQ^2}{2AE \cdot QE} = \frac{\sqrt{33}}{33}.$$

所以二面角 $A-MN-Q$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$.

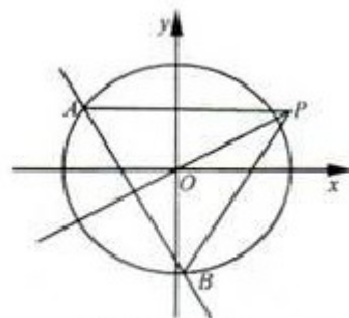
21. (本题满分 15 分) 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的

离心率为 $\frac{1}{2}$, 其左焦点到点 $P(2, 1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$, 不过原点 O 的

直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 且线段 AB 被直线 OP 平分.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 求 $\triangle ABP$ 面积取最大值时直线 l 的方程.



(第 21 题图)

【答案】 本题主要考查椭圆的几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识，同时考查解析几何的基本思想方法和综合解题能力。满分 15 分。

(I) 设椭圆左焦点为 $F(-c, 0)$ ，则由题意得

$$\begin{cases} \sqrt{(2+c)+1} = \sqrt{10} \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

所以椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(II) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，线段 AB 的中点为 M 。

当直线 AB 与 x 轴垂直时，直线 AB 的方程为 $x = 0$ ，与不过原点的条件不符，舍去。故可设直线 AB 的方程为

$$y = kx + m (m \neq 0),$$

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{消去 } y, \text{ 整理得}$$

$$(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0, \quad (1)$$

则

$$\Delta = 64k^2m^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 12) > 0, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2} \\ x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} \end{cases}$$

$$\text{所以 } AB \text{ 线段的中点 } M\left(-\frac{8km}{3 + 4k^2}, \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}\right),$$

因为 M 在直线 OP 上，所以

$$\frac{3m}{3 + 4k^2} = \frac{-2km}{3 + 4k^2},$$

得

$$m = 0 \text{ (舍去) 或 } k = -\frac{3}{2},$$

此时方程 (1) 为 $3x^2 - 3mx + m^2 = 0$ ，则

$$\Delta = 3(12 - m^2) > 0, \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3}{3} \end{cases}$$

所以

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{39}}{6} \cdot \sqrt{12 - m^2},$$

设点 P 到直线 AB 距离为 d , 则

$$d = \frac{|8 - 2m|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{2|m - 4|}{\sqrt{13}},$$

设 $\triangle ABP$ 的面积为 S , 则

$$S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{(m - 4)^2 (12 - m^2)},$$

其中 $m \in (-2\sqrt{3}, 0) \cup (0, 2\sqrt{3})$,

$$\text{令 } u(m) = (12 - m^2)(m - 4)^2, \quad m \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$$

$$u'(m) = -4(m - 4)(m^2 - 2m - 6) = -4(m - 4)(m - 1 - \sqrt{7})(m - 1 + \sqrt{7}),$$

所以当且仅当 $m = 1 - \sqrt{7}$, $u(m)$ 取到最大值,

故当且仅当 $m = 1 - \sqrt{7}$, S 取到最大值.

综上, 所求直线 l 方程为 $3x + 2y + 2\sqrt{7} - 2 = 0$.

22. (本题满分 14 分) 已知 $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = 4ax^3 - 2bx - a + b$.

(I) 证明: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

(i) 函数 $f(x)$ 的最大值为 $|2a - b| + a$;

(ii) $f(x) + |2a - b| + a \geq 0$;

(II) 若 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 对 $x \in [0, 1]$ 恒成立, 求 $a + b$ 的取值范围.

【答案】 本题主要考查利用导函数研究函数的性质、线性规划等基础知识, 同时考查推理论证能力, 分类讨论等综合解题能力和创新意识. 满分 14 分.

$$(I) (i) f'(x) = 12ax^2 - 2b = 12a(x^2 - \frac{b}{6a})$$

当 $b \leq 0$ 时, 有 $f'(x) \geq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增

所以当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$f(x)_{\max} = \max\{f(0), f(1)\} = \max\{-a+b, 3a-b\} = \begin{cases} 3a-b, & b \leq 2a \\ -a+b, & b > 2a \end{cases} = |2a-b|+a$$

(ii) 由于 $0 \leq x \leq 1$, 故
当 $b \leq 2a$ 时,

$$f(x) + |2a-b|+a = f(x) + 3a-b = 4ax^3 - 2bx + 2a \geq 4ax^3 - 4ax + 2a = 2a(2x^3 - 2x + 1)$$

当 $b > 2a$ 时,

$$f(x) + |2a-b|+a = f(x) - a + b = 4ax^3 + 2b(1-x) - 2a > 4ax^3 + 4a(1-x) - 2a = 2a(2x^3 - 2x + 1)$$

设 $g(x) = 2x^3 - 2x + 1, 0 \leq x \leq 1$, 则

$$g'(x) = 6x^2 - 2 = 6\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

于是

x	0	$(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$	1
$g'(x)$			-	0	+
$g(x)$	1	减	极小值	增	1

$$\text{所以, } g(x)_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0,$$

所以

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } 2x^3 - 2x + 1 > 0$$

$$\text{故 } f(x) + |2a-b|+a = f(x) - a + b \geq 2a(2x^3 - 2x + 1) \geq 0$$

(II) 由 (i) 知, 当 $0 \leq x \leq 1$, $f(x)_{\max} = |2a-b|+a$, 所以

$$|2a-b|+a \leq 1$$

若 $|2a-b|+a \leq 1$, 则由 (ii) 知

$$f(x) \geq -(|2a-b|+a) \geq -1$$

所以 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 对任意 $0 \leq x \leq 1$ 恒成立的充要条件是

$$\begin{cases} |2a-b|+a \leq 1 \\ a > 0 \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} 2a-b \geq 0 \\ 3a-b \leq 1 \\ a > 0 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} 2a-b < 0 \\ b-a \leq 1 \\ a > 0 \end{cases} \quad (1)$$

在直角坐标系 aOb 中, (1) 所表示的平面区域为如图所示的阴影部分, 其中不包括线段 BC ,

作一组平行直线 $a+b=t(t \in R)$, 得

$$-1 < a+b \leq 3.$$

所以的取值范围是 $(-1, 3]$.