绝密★启用前

2003年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

第I卷　（共110分）

一、填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．函数 $y=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{4})+\cos x\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的最小正周期T=____________ .

2．若 $x=\frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x+\alpha)=1$ 的解,其中 $\alpha\in(0,2\pi)$,则 $\alpha=$____________ .

3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_5=3，a_6=－2,则 $a_4+a_5+\ldots+a_{10}$=____________.

4．已知定点A（0，1），点B在直线 $x+y=0$ 上运动，当线段AB最短时，点B的坐标是____________.

5．在正四棱锥P—ABCD中，若侧面与底面所成二面角的大小为60°，则异面直线PA与BC所成角的大小等于____ .（结果用反三角函数值表示）

6．设集合A={x||x|<4},B={x|x^2－4x+3>0}，则集合{x|x∈A且 $x\notin A\cap B$} =____________ .

7．在△ABC中，sinA;sinB:sinC=2:3:4,则∠ABC=____________ .（结果用反三角函数值表示）

8．若首项为 a_1，公比为q的等比数列 $\{a_n\}$ 的前n项和总小于这个数列的各项和，则首项 a_1，公比q的一组取值可以是（a_1，q）=____________ .

9．某国际科研合作项目成员由11个美国人、4个法国人和5个中国人组成.现从中随机选出两位作为成果发布人，则此两人不属于同一个国家的概率为____________

.（结果用分数表示）

10．方程$x^3+\lg x=18$的根$x\approx$____________．（结果精确到0.1）

11．已知点$A(0,\frac{2}{n}),B(0,-\frac{2}{n}),C(4+\frac{2}{n},0)$，其中n为正整数．设$S_n$表示△ABC外接圆的面积，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$=____________．

12．给出问题：F_1、F_2是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}$=1的焦点，点P在双曲线上．若点P到焦点$F_1$的距离等于9，求点P到焦点$F_2$的距离．某学生的解答如下：双曲线的实轴长为8，由$||PF_1|-|PF_2||=8$，即$|9-|PF_2||=8$，得$|PF_2|=1$或17.

该学生的解答是否正确？若正确，请将他的解题依据填在下面空格内，若不正确，将正确的结果填在下面空格内.

____

.

二、选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13．下列函数中，既为偶函数又在（0，π）上单调递增的是（　　）

A．$y=\mathrm{tg}|x|$.　　　　B．$y=\cos(-x)$.

C．$y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$.　　　　D．$y=|ctg\frac{x}{2}|$.

14．在下列条件中，可判断平面α与β平行的是（　　）

A．α、β都垂直于平面r.

B．α内存在不共线的三点到β的距离相等.

C．l，m是α内两条直线，且l∥β，m∥β.

D．l，m是两条异面直线，且l∥α，m∥α，l∥β，m∥β.

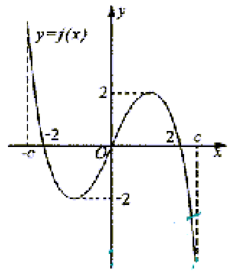
15．在P（1，1）、Q（1，2）、M（2，3）和N$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$四点中，函数$y=a^x$的图象与其反函数的图象的公共点只可能是点（　　）

A．P.　　　　B．Q.　　　　C．M.　　　　D．N.

16．$f(x)$是定义在区间[－c，c]上的奇函数，其图象如图所示：令g（x）=af（x）+b，

则下

列关于函数g（x）的叙述正确的是 （ ）



A．若a<0,则函数g（x）的图象关于原点对称.

B．若a=1， 0<b<2,则方程g（x）=0有大于2的实根.

C．若a=－2,b=0,则函数g(x)的图象关于y轴对称

D．若 $a\neq 0$,b=2,则方程g（x）=0有三个实根.

三、解答题（本大题满分86分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

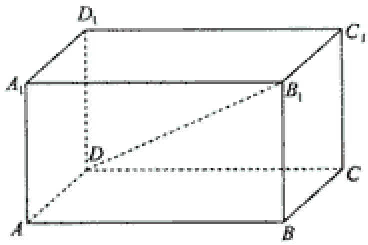
17. （本题满分12分）

已知复数$z_1=\cos\theta-i$，$z_2=\sin\theta+i$，求$|z_1\cdot z_2|$的最大值和最小值.

18．（本题满分12分）

已知平行六面体ABCD—

$A_1B_1C_1D_1$中，$A_1A\perp$平面ABCD，AB=4，AD=2.若$B_1D\perp BC$，直线B_1D与平面ABCD所成的角等于30°，求平行六面体ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的体积.

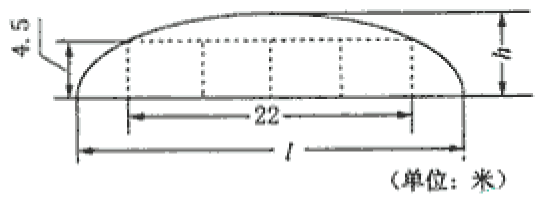


19．（本题满分14分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\log_2\frac{1+x}{1-x}$，求函数 $f(x)$ 的定义域，并讨论它的奇偶性和单调性.

20．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

如图，某隧道设计为双向四车道，车道总宽22米，要求通行车辆限高4.5米，隧道全长2.5千米，隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.



（1）若最大拱高h为6米，则隧道设计的拱宽l是多少？

（2）若最大拱高h不小于6米，则应如何设计拱高h和拱宽l，才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小？（半个椭圆的面积公式为$S=\frac{\pi}{4}lh$，柱体体积为：底面积乘以高.本题结果精确到0.1米）

21．（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分7分.

在以O为原点的直角坐标系中，点A（4，－3）为△OAB的直角顶点. 已知|AB|=2|OA|，且点B的纵坐标大于零.

（1）求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标；

（2）求圆 $x^2-6x+y^2+2y=0$ 关于直线OB对称的圆的方程；

（3）是否存在实数a，使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线OB对称的两个点？若不存在，说明理由：若存在，求a的取值范围.

22．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分8分，第3小题满分6分.

已知数列 $\{a_n\}$（n为正整数）是首项是a_1，公比为q的等比数列.

（1）求和：$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2, a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$;

（2）由（1）的结果归纳概括出关于正整数n的一个结论，并加以证明.

（3）设q≠1，S_n是等比数列 $\{a_n\}$ 的前n项和，求：

$$S_1C_n^0 - S_2C_n^1 + S_3C_n^2 - S_4C_n^3 + \ldots + (-1)^n S_{n+1}C_n^n$$

2003年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（文史类）答案

一、（第1题至第12题）

1．π.　2．$\frac{4}{3}\pi$.　3．－49．　4．$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.　5．arctg2.　6．[1,3].

7．$\arccos\frac{11}{6}$.　8．$(1,\frac{1}{2})(a_1>0,0<q<1$的一组数）．9．$\frac{119}{190}$

10．2.6．　11．4π　12．$|PF_2|=17$.

二、（第13题至第16题）

题　号	13	14	15	16
代　号	C	D	D	B

三、（第17题至第22题）

17．[解]

$$\begin{aligned}|z_1\cdot z_2|&=|1+\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)i|\\&=\sqrt{(1+\sin\theta\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{2+\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}.\end{aligned}$$

故$|z_1\cdot z_2|$的最大值为$\frac{3}{2}$，最小值为$\sqrt{2}$.

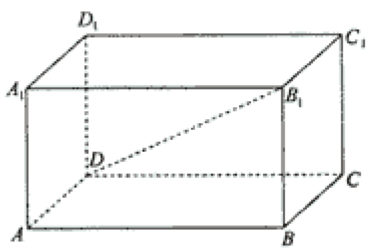
18．[解]连结BD，因为$B_1B\perp$平面ABCD，$B_1D\perp BC$，所以$BC\perp BD$.

在△BCD中，BC=2，CD=4，所以BD=$2\sqrt{3}$.

又因为直线B_1D与平面ABCD所成的角等于30°，所以

$\angle B_1DB=30°$，于是$BB_1=\frac{1}{\sqrt{3}}BD=2$.

故平行六面体ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的体积为$S_{ABCD}\cdot BB_1=8\sqrt{3}$.



19．[解]x须满足$\begin{cases}x\neq 0\\ \frac{1+x}{1-x}>0\end{cases}$，由$\frac{1+x}{1-x}>0$得$-1<x<1$，

所以函数$f(x)$的定义域为（－1，0）∪（0，1）.

因为函数$f(x)$的定义域关于原点对称，且对定义域内的任意x，有

$f(-x)=-\frac{1}{x}-\log_2\frac{1-x}{1+x}=-(\frac{1}{x}-\log_2\frac{1+x}{1-x})=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数.

研究$f(x)$在（0，1）内的单调性，任取x_1、x_2∈（0，1），且设$x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\log_2\frac{1+x_1}{1-x_1}-\frac{1}{x_2}+\log_2\frac{1+x_2}{1-x_2}$$

$$=(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})+[\log_2(\frac{2}{1-x_2}-1)-\log_2(\frac{2}{1-x_1}-1)],$$

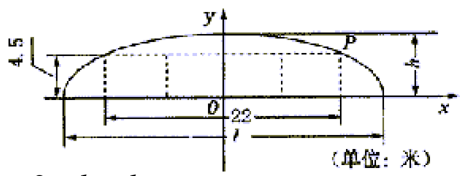
由$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}>0,\log_2(\frac{2}{1-x_2}-1)-\log_2(\frac{2}{1-x_1}-1)>0,$

得 $f(x_1)-f(x_2)$ >0，即 $f(x)$ 在（0，1）内单调递减，

由于 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 在（－1，0）内单调递减.

20．[解]（1）如图建立直角坐标系，则点P（11，4.5），　椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

将b=h=6与点P坐标代入椭圆方程，得 $a=\frac{44\sqrt{7}}{7}$,此时$l=2a=\frac{88\sqrt{7}}{7}\approx 33.3$.因此隧道的拱宽约为33.3米.



（2）由椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得$\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$.

因为$\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}\geq\frac{2\times 11\times 4.5}{ab}$即$ab\geq 99$,且$l=2a,h=b$,

所以$S=\frac{\pi}{4}lh=\frac{\pi ab}{2}\geq\frac{99\pi}{2}$.

当S取最小值时,有$\frac{11^2}{a^2}=\frac{4.5^2}{b^2}=\frac{1}{2}$,得$a=11\sqrt{2},b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

此时$l=2a=22\sqrt{2}\approx 31.1,h=b\approx 6.4$

故当拱高约为6.4米、拱宽约为31.1米时，土方工程量最小.

[解二]由椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得$\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$. 于是$b^2=\frac{81}{4}\cdot\frac{a^2}{a^2-121}$,

$$a^2b^2=\frac{81}{4}(a^2-121+\frac{121^2}{a^2-121}+242)\geq\frac{81}{4}(2\sqrt{121^2}+242)=81\times 121,$$

即$ab\geq 99$,当S取最小值时,有$a^2-121=\frac{121^2}{a^2-121}$,

得 $a=11\sqrt{2},b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.以下同解一.

21．[解]（1）设$\overrightarrow{AB}=\{u,v\}$,则由$\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{OA}|\\|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{OA}|=0\end{cases}$,即$\begin{cases}u^2+v^2=100\\4u-3v=0,\end{cases}$得

$\begin{cases}u=6\\v=8\end{cases}$,或$\begin{cases}u=-6\\v=-8\end{cases}$.因为$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\{u+4,v-3\}$,

所以v—3>0,得v=8,故$\overrightarrow{AB}$={6，8}.

（2）由$\overrightarrow{OB}$={10，5}，得B（10，5），于是直线OB方程：$y=\frac{1}{2}x.$

由条件可知圆的标准方程为：(x—3)²+y(y+1)²=10,

得圆心（3，—1），半径为$\sqrt{10}$.

设圆心（3，—1）关于直线OB的对称点为（x，y）则

$\begin{cases}\frac{x+3}{2}-2\cdot\frac{y-1}{2}=0\\\frac{y+1}{x-3}=-2\end{cases}$,得$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$,故所求圆的方程为($x$—1)²+(y—3)²=10.

（3）设P（x_1, y_1)，Q（x_2, y_2）为抛物线上关于直线OB对称两点，则

$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}-2\frac{y_1+y_2}{2}=0\\\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-2\end{cases}$,得$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2}{a}\\x_1x_2=\frac{5-2a}{2a^2}\end{cases}$,

即x_1,x_2为方程$x^2+\frac{2}{a}x+\frac{5-2a}{2a^2}=0$的两个相异实根,

于是由$\Delta=\frac{4}{a^2}-4\cdot\frac{5-2a}{2a^2}>0$,得$a>\frac{3}{2}$.

故当$a>\frac{3}{2}$时，抛物线y=ax^2—1上总有关于直线OB对称的两点.

22．[解]（1）

$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2=a_1-2a_1q+a_1q^2=a_1(1-q)^2$,

$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3=a_1-3a_1q+3a_1q^2-a_1q^3=a_1(1-q)^3$.

（2）归纳概括的结论为：

若数列$\{a_n\}$是首项为a_1，公比为q的等比数列，则

$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\ldots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n$, n为正整数.

证明: $a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\ldots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n$

$=a_1C_n^0-a_1qC_n^1+a_1q^2C_n^2-a_1q^3C_n^3+\ldots+(-1)^n a_1q^nC_n^n$

$=a_1[C_n^0-qC_n^1+q^2C_n^2-q^3C_n^3+\ldots+(-1)^n q^nC_n^n]=a_1(1-q)^n$

（3）因为 $S_n=\dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}$,

所以 $S_1C_n^0-S_2C_n^1+S_3C_n^2-S_4C_n^3+\ldots+(-1)^n S_{n+1}C_n^n$

$=\dfrac{a_1-a_1q}{1-q}C_n^0-\dfrac{a_1-a_1q^2}{1-q}C_n^1+\dfrac{a_1-a_1q^3}{1-q}C_n^2+\ldots+(-1)^n\dfrac{a_1-a_1q^{n+1}}{1-q}C_n^n$

$=\dfrac{a_1}{1-q}[C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n]-$

$\dfrac{a_1q}{1-q}[C_n^0-qC_n^1+q^2C_n^2-q^3C_n^3+\ldots+(-1)^n q^nC_n^n]=\dfrac{a_1q}{q-1}(1-q)^n$.