1996年内蒙古高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.共150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题共65分)

一、选择题:本大题共15小题;第(1)　(10)题每小题4分,第(11)　(15)题每小题5分,共65分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)已知全集I=N,集合A={x丨x=2n,n∈N},B={x丨x=4n,n∈N},则

$(A) I=A\cup B$　$(B) I=\overline{A}\cup B$　$(C) I=A\cup\overline{B}$　$(D) I=\overline{A}\cup\overline{B}$

[Key]　　C

(1)已知全集I=N,集合A={x丨x=2n,n∈N},B={x丨x=4n,n∈N},则

$(A) I=A\cup B$　$(B) I=\overline{A}\cup B$　$(C) I=A\cup\overline{B}$　$(D) I=\overline{A}\cup\overline{B}$

[Key]　　C

(3)若$\sin^2x>\cos^2x$,则x的取值范围是

$(A)\{x\mid 2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi,k\in Z\}$

$(B)\{x\mid 2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi,k\in Z\}$

$(C)\{x\mid k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in Z\}$

$(D)\{x\mid 2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in Z\}$

[Key]　　D

(4)复数$\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)}$等于

$(A) 1+\sqrt{3}i$　$(B) -1+\sqrt{3}i$　$(C) 1-\sqrt{3}i$　$(D) -1-\sqrt{3}i$

[Key]　　B

5)如果直线l、m与平面α、β、γ满足：l=β∩γ,l//α,m⊂α和m⊥γ那么必有

(A)α⊥γ且l⊥m (B)α⊥γ且m∥β

(C)m∥β且l⊥m　(D)α∥β且α⊥γ

[Key]　　A

(6)当$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$，函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的

(A)最大值是1，最小值是-1

(B)最大值是1，最小值是-(1/2)

(C)最大值是2，最小值是-2

(D)最大值是2，最小值是-1

[Key]　　D

(7)椭圆$\begin{cases} x = 3 + 3\cos\varphi \\ y = -1 + 5\sin\varphi \end{cases}$的两个焦点坐标是(B)

(A)(-3,5),(-3,-3)　　(B)(3,3,),(3,-5)

(C)(1,1,),(-7,1)　　(D)(7,-1,),(-1,-1)

(8)若$0 < a < \frac{\pi}{2}$，则$\arcsin[\cos(\frac{\pi}{2} + a)] + \arccos[\sin(\pi + a)]$等于

$(A)\frac{\pi}{2}$　$(B)-\frac{\pi}{2}$　$(C)\frac{\pi}{2}-2a$　$(D)-\frac{\pi}{2}-2a$

[Key]　　A

(9)将边长为a的正方形ABCD沿对角线AC折起,使得BD=a,则三棱锥D-ABC的体积为

$(A)\frac{a^3}{6}$　$(B)\frac{a^3}{12}$　$(C)\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$　$(D)\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

[Key]　　D

(10)等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-1$，前n项的和为S_n，若$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，则$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$等于

$(A)\frac{2}{3}$　$(B)-\frac{2}{3}$　$(C)2$　$(D)-2$

[Key]　　B

(11)椭圆的极坐标方程为$\rho = \frac{3}{2-\cos\theta}$，则它在短轴上的两个顶点的极坐标是

$(A)(3,0)(1,\pi)$　　　　$(B)(\sqrt{3},\frac{\pi}{2})(\sqrt{3},\frac{3\pi}{2})$

$(B)(2,\frac{\pi}{3})(2,\frac{5\pi}{3})$　$(B)(\sqrt{7},\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{7},2\pi-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2})$

[Key]　　C

(12)等差数列$\{a_n$的前m项和为30,前2m项和为100,则它的前3m项和为

(A)130　(B)170　(C)210　(D)260

[Key]　　C

(13)设双曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$的半焦距为c，直线l过两点(a,0)(0,b)。已知原点到直线l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为

(A)2　(B)$\sqrt{3}$　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

[Key]　　A

(14)母线长为1的圆锥体积最大时,其侧面展开图圆心角 ψ 等于

(A)$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　(B)$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　(C)$\sqrt{2}\pi$　(D)$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

[Key]　　D

(15)设f(x)是(-∞,+∞)上的奇函数,f(x+2)=f(x),当0≤x≤1时,f(x)=x,则f(7.5)等于

(A)0.5　(B)-0.5

(C)1.5　(D)-1.5

[Key]　　B

(16)已知圆$x^2+y^2-6x-7=0$与抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线相切.则P=________.

[Key]　　2

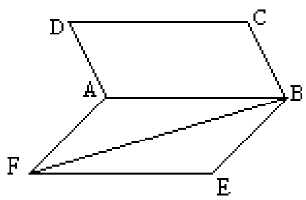
(17)正六边形的中心和顶点共7个点,以其中3个点为顶点的三角形共有_______个(用数字作答).

[Key]　　32

(18)tg20°＋tg40°＋$\sqrt{3}$ tg20° tg40° 的值是______________

[Key]　　$\sqrt{3}$

(19)如图,



正方形ABCD所在平面与正方形ABEF所在平面成60°的二面角,则异面直线AD与BF所成角的余弦值是____

[Key]　　$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(20)解不等式 $\log_a(1-\frac{1}{x})>1$ 。

[Key]

本小题考查对数函数性质,对数不等式的解法,分类讨论的方法和运算能力.满分11分.

解:(Ⅰ)当a＞1时,原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases}1-\frac{1}{x}>0\\1-\frac{1}{x}>a\end{cases}$$ 2分

由此得 $1-a>\frac{1}{x}$

因为1-a<0,所以x<0,

$\therefore \frac{1}{1-a}<x<0$ 5分

(Ⅱ)当0<a<1时,原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases}1-\frac{1}{x}>0 & (1)\\1-\frac{1}{x}<a & (2)\end{cases}$$ 7分

由①得,x>1或x<0,

由(2)得,0<x< $\frac{1}{1-a}$, ∴1<x< $\frac{1}{1-a}$ 10分

综上，当a>1时，不等式的解集为 $\{x\mid \frac{1}{1-a}<x<0\}$

当0<a<1时，不等式的解集为 $\{x\mid 1<x<\frac{1}{1-a}\}$ 11分

(21)已知△ABC的三个角A，B，C满足A+C=2B，$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos A}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$,求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值

[Key]

本小题考查三角函数基础知识,利用三角公式进行恒等变形和运算的能力.满分12分.

解法一:由题设条件知B=60°,A+C=120°. 2分

$\because \frac{-\sqrt{2}}{\cos 60^\circ}=-2\sqrt{2},$

$\therefore \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$

将上式化为 $\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$

利用和差化积及积化和差公式,上式可化为

$2\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{A-C}{2}=-2\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$

将$\cos\frac{A+C}{2}=\cos 60°=\frac{1}{2},\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$代入上式得

$\cos(\frac{A+C}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C)$ 6分

将$\cos(A-C)=2\cos^2(\frac{A-C}{2})-1$代入上式并整理得

$4\sqrt{2}\cos^2(\frac{A-C}{2})+2\cos(\frac{A-C}{2})-3\sqrt{2}=0,$ 9分

$2\cos(\frac{A-C}{2}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3)=0$

$\because 2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\neq 0$

$\therefore 2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}=0$

从而得$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12分

解法二:由题设条件知B=60°,A+C=120°.

设$\alpha=\frac{A-C}{2}$则$A-C=2\alpha$,可得$A=60°+\alpha,C=60°-\alpha$(3分)

所以$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos(60°+\alpha)}+\frac{1}{\cos(60°-\alpha)}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}$(7分)

依题设条件有$\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$

$\because \cos B=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=-2\sqrt{2}$

整理得$4\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha-3\sqrt{2}=0$(9分)

$(2\cos\alpha-\sqrt{2})(2\sqrt{2\cos\alpha}+3)=0$

$\because 2\sqrt{2\cos\alpha}+3\neq 0$

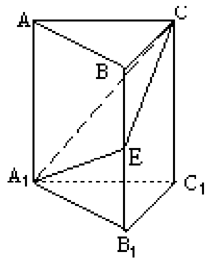
$\therefore (2\cos\alpha-\sqrt{2})=0$

从而得$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$(12分)

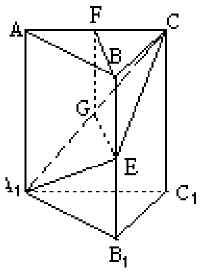
(22)如图,在正三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中,E∈BB_1, 截面A_1EC⊥侧面AC_1.

(Ⅰ)求证:BE=EB_1;

(Ⅱ)若AA_1=A_1B_1;求平面A_1EC与平面$A_1B_1C_1$所成二面角(锐角)的度数.



注意:在下面横线上填写适当内容,使之成为(Ⅰ)的完整证明,并解答(Ⅱ).



[Key]

(Ⅰ)证明:在截面A_1EC内,过E作EG⊥A_1C,G是垂足.

① ∵______________________________

∴EG⊥侧面AC_1;取AC的中点F,连结BF,FG,由AB=BC得BF⊥AC,

② ∵________________________

∴BF⊥侧面AC_1;得BF∥EG,BF、EG确定一个平面,交侧面AC_1于FG.

③ ∵__________________

∴BE∥FG,四边形BEGF是平行四边形,BE=FG,

④ ∵________________________

∴FG∥AA_1,△AA_1C∽△FGC,

⑤ ∵________________

$\therefore FG=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}BB_1$,即$BE=\frac{1}{2}BB_1$,故$BE=EB_1$

(Ⅱ)解
本小题考查空间线面关系,正三棱柱的性质,逻辑思维能力,空间想象能力及运算能力.满分12分.

(Ⅰ)①∵面A_1EC⊥侧面AC_1,　　2分

②∵面ABC⊥侧面AC_1，3分

③∵BE∥侧面AC_1,　　4分

④∵BE∥AA_1,　　5分

⑤∵AF=FC,　6分

(Ⅱ)解:分别延长CE、C_1B_1交于点D,连结A_1D.

$\because EB_1 // CC_1, EB_1 = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}CC_1$

$\therefore EB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = B_1C_1 = A_1B_1$

$\because \angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = 60°$

$\angle DA_1B_1 = \angle A_1DB_1 = \frac{1}{2}(180° - \angle DB_1A_1 = 30°$

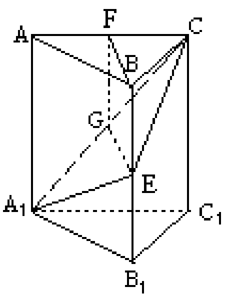
$\angle DA_1C_1 = \angle DA_1B_1 + \angle B_1A_1C_1 = 90°$,即$DA_1 \perp A_1C_1$(9分)

∵CC_1⊥面$A_1C_1B_1$,即A_1C_1是A_1C在平面A_1C_1D上的射影,根据三垂线定理得DA_1⊥A_1C,

所以∠CA_1C_1所求二面角的平面角.　11分

∵$CC_1=AA_1=A_1B_1=A_1C_1$,∠$A_1C_1C=90°$,

∴∠$CA_1C_1=45°$,即所求二面角为45°.　12分



:

23.某地现有耕地10000公顷,规划10年后粮食单产比现在增加22%,人均粮食占有量比现在提高10%.如果人口年增长率为1%,那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷（精确到1公顷)?

($\text{糖食单产} = \frac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$,$\text{人均粮食占有量} = \frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$)
(

[Key]
本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力,指数函数和二项式定理的应用,近似计算的方法和能力.满分10分.
解:设耕地平均每年至多只能减少X公顷,又设该地区现有人口为P人,粮食单产为M吨/公顷.
依题意得不等式

$$\frac{M\times(1+22\%)\times(10^4-10x)}{P\times(1+1\%)^{10}}\geq\frac{M\times10^4}{P}\times(1+10\%)(5分)$$

化简得$x\leq10^3\times[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]$

$\because 10^3\times[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]$

$=10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times(1+C_{10}^1\times0.01+C_{10}^2\times0.01^2\ldots)]$

$\approx10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times(1.1045)$

≈4.1

$\therefore x\leq4.1$(公顷)(9分)

答:按规划该地区耕地平均每年至多只能减少4公顷.　　10分

(24)已知l_1、l_2是过点$P(-\sqrt{2},0)$的两条互相垂直的直线，且l_1、l_2与双曲线$y^2-x^2=1$各有两个交点，分别为A_1、B_1和A_2、B_2

(I)求l_1的斜率k_1的取值范围；

(II)若$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$，求$l_1$、$l_2$的方程

(24)本小题主要考查直线与双曲线的性质,解析几何的基本思想,以及综合运用知识的能力.满分12分.

解：(I)依题设，l_1、l_2的斜率都存在，因为l_1过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases}y=k_1(x+\sqrt{2})(k_1\neq0)\\ y^2-x^2=1\end{cases}\quad(1)\quad(1分)$$

有两个不同的解.在方程组①中消去y,整理得

$$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0\quad(2)$$

若$k^2{}_1-1=0$,则方程组①只有一个解，即l_1与双曲线只有一个交点，与题设矛盾，故$k^2{}_1-1\neq0$即$|k_1|\neq1$

方程②的判别式为

$$\Delta_1=(2\sqrt{2}k_1^2)^2-4(k_1^2-1)(2k_1^2-1)=4(3k_1^2-1)$$

设的斜率为k_2，因为l_2过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases} y = k_2(x+\sqrt{2})(k_2 \neq 0) \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

有两个不同的解. 在方程组③中消去y, 整理得

$$(k_2^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_2^2x+2k_2^2-1=0 \qquad (4)$$

同理有$k_2^2-1\neq 0, \Delta_2 = 4(3k_2^2-1)$

又因为$l_1 \perp l_2$, 所以有$k_1 \cdot k_2=-1$.　　4分

于是, l_1、l_2与双曲线各有两个交点，等价于

$$\begin{cases} 3k_1^2-1>0 \\ 3k_2^2-1>0 \\ k_1 \bullet k_2 = -1 \\ |k_1| \neq 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3} < k_1 < \sqrt{3} \text{(6分)} \\ |k_1| \neq 1 \end{cases}$$

$$\therefore k_1 \in (-\sqrt{3},-1)\cup(-1,\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},1)\cup(1,\frac{\sqrt{3}}{3})\text{(7分)}$$

(Ⅱ)设$A_1(x_1y_1)$, $B_1(x_2y_2)_1$. 由方程②知

$$x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{2}k_1^2}{k_1^2-1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{2k_1^2-1}{k_1^2-1},$$

$\therefore |A_1B_1|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$$=(1+k_1^2)(x_1-x_2)^2$$

$$=4\frac{(1+k_1^2)(3k_1^2-1)}{(k_1^2-1)^2}(5) \qquad \text{(9分)}$$

同理，由方程④可求得，$|A_2B_2|^2$, 整理得 $|A_2B_2|^2=4\dfrac{(1+k_1^2)(3-k_1^2)}{(1-k_1^2)}$ ⑥

由$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$, 得$|A_1B_1|^2=5|A_2B_2|^2$

将⑤、⑥代入上式得

$$\frac{4(1+k_1^2)(3k_1^2-1)}{(k_1^2-1)^2}=5\times\frac{4(1+k_1^2)(3-k_1^2)}{(1-k_1^2)^2}$$

解得$k_1 \pm \sqrt{2}$

取$k_1=\sqrt{2}$时,$l_1: y=\sqrt{2}(x+\sqrt{2}), l_2: y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$

取$k_1=-\sqrt{2}$时,$l_1: y=-\sqrt{2}(x+\sqrt{2}), l_2: y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$(12分)

25.已知a、b、c是实数,函数$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$,当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,$|f(x)|\leqslant 1$.

(Ⅰ)证明:$|c|\leqslant 1$;

(Ⅱ)证明:当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,$|g(x)|\leqslant 2$;

(Ⅲ)设$a>0$,当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,$g(x)$的最大值为2,求$f(x)$.

[Key]　本小题主要考查函数的性质、含有绝对值的不等式的性质，以及综合运用数学知识分析问题与解决问题的能力。满分12分.

(Ⅰ)证明:由条件当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,$|f(x)|\leqslant 1$,取$x=0$得

$|c|=|f(0)|\leqslant 1$,

即$|c|\leqslant 1$. 2分

(Ⅱ)证法一:

当$a>0$时,$g(x)=ax+b$在$[-1,1]$上是增函数,

∴$g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$,

∵$|f(x)|\leqslant 1\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$,$|c|\leqslant 1$,

∴$g(1)=a+b=f(1)-c\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\geqslant -(|f(-1)|+|c|\geqslant -2$,

由此得$|g(x)|\leqslant 2$; 5分

当$a<0$时,$g(x)=ax+b$在$[-1,1]$上是减函数,

∴$g(-1)\geqslant g(x)\geqslant g(1)$,

∵$|f(x)|\leqslant 1\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$,$|c|\leqslant 1$,

∴$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\leqslant |f(-1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(1)=a+b=f(1)-c\geqslant -(|f(1)|+|c|)\geqslant -2$,

由此得$|g(x)|\leqslant 2$; 7分

当$a=0$时,$g(x)=b$, $f(x)=bx+c$.

∵$-1\leqslant x\leqslant 1$,

∴$|g(x)|=|f(1)-c|\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$.

综上得$|g(x)|\leqslant 2$. 8分

证法二

由$x=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$可得

$g(x)=ax+b$

$=a[(\dfrac{x+1}{2})^2-(\dfrac{x-1}{2})^2]+b(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x-1}{2})$

$=[a(\dfrac{x+1}{2})^2+b(\dfrac{x+1}{2})+c]-[a(\dfrac{x-1}{2})^2+b(\dfrac{x-1}{2})+c]$

$=f(\dfrac{x+1}{2})-f(\dfrac{x-1}{2})$(6分)

当$-1\le x\le 1$时,有$0\le\dfrac{x+1}{2}\le 1,-1\le\dfrac{x-1}{2}\le 0$

根据含绝对值的不等式的性质,得

$|f(\dfrac{x+1}{2})-f(\dfrac{x-1}{2})|\le|f(\dfrac{x+1}{2})|+|f(\dfrac{x-1}{2})|\le 2$

即 $|g(x)|\leqslant 2$. 8分

(III)因为$a>0$, $g(x)$在$[-1,1]$上是增函数,当$x=1$时取得最大值2,

即$g(1)=a+b=f(1)-f(0)=2$.①

∵$-1\leqslant f(0)=f(1)-2\leqslant 1-2=-1$,

∴$c=f(0)=-1$. 10分

因为当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,$f(x)\geqslant -1$,即$f(x)\geqslant f(0)$,

根据二次函数的性质,直线$x=0$为$f(x)$的图象的对称轴,由此得

$-\dfrac{b}{2a}=0$即$b=0$

由① 得$a=2$.

所以 $f(x)=2x^2-1$. 12分