

2014年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数学（文科）

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ，集合 $A = \{1,3,5,6\}$ ，则 $C_U A = (\quad)$

- A. $\{1,3,5,6\}$ B. $\{2,3,7\}$ C. $\{2,4,7\}$ D. $\{2,5,7\}$

【答案】C

【解析】

试题分析：依题意， $C_U A = \{2,4,7\}$ ，故选 C.

考点：补集的运算，容易题. 学科网

2. i 为虚数单位，则 $(\frac{1-i}{1+i})^2 = (\quad)$

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

【答案】B

【解析】

试题分析：因为 $(\frac{1-i}{1+i})^2 = \frac{-2i}{2i} = -1$ ，故选 B.

考点：复数的运算，容易题.

3. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq x$ ”的否定是 ()

- A. $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 \neq x$ B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = x$
C. $\exists x \notin \mathbb{R}, x^2 \neq x$ D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$

【答案】D

【解析】

试题分析：因为全称命题的否定是特称命题，所以命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq x$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$ ”，故选 D.

考点：含有一个量词的命题的否定，容易题.

4. 若变量 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ x-y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $2x+y$ 的最大值是 ()

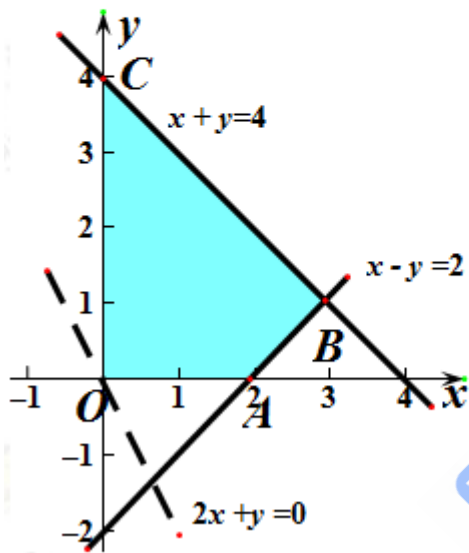
- A. 2 B. 4 C. 7 D. 8

【答案】 C

【解析】

试题分析：不等式组表示的平面区域如图的四边形 $OABC$ （包括边界），解方程组 $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$ 得点 $B(3,1)$ ，

令 $z=2x+y$ ，平移直线 $z=2x+y$ 经过点 B 使得 z 取得最大值，即 $z_{\max}=2 \times 3+1=7$ 。选 c。



考点：不等式组表示的平面区域，求目标函数的最大值，容易题。

5. 随机投掷两枚均匀的投骰子，他们向上的点数之和不超过 5 的概率为 P_1 ，点数之和大于 5 的概率为 P_2 ，点数之和为偶数的概率为 P_3 ，则 ()

- A. $P_1 < P_2 < P_3$ B. $P_2 < P_1 < P_3$ C. $P_1 < P_3 < P_2$ D. $P_3 < P_1 < P_2$

【答案】 C

【解析】

试题分析：依题意， $P_1 = \frac{10}{36}$ ， $P_2 = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$ ， $P_3 = \frac{18}{36}$ ，所以 $P_1 < P_3 < P_2$ 。选 c。

考点：古典概型公式求概率，容易题。

6. 根据如下样本数据：

x	3	4	5	6	7	8
y	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

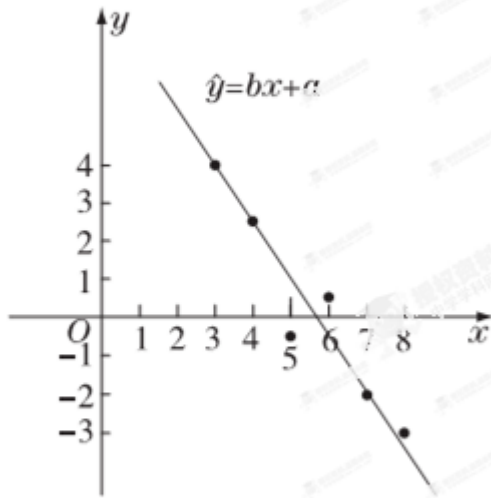
得到的回归方程为 $\hat{y} = bx + a$ ，则 ()

- A. $a > 0, b < 0$ B. $a > 0, b > 0$ C. $a < 0, b < 0$ D. $a < 0, b > 0$

【答案】A

【解析】

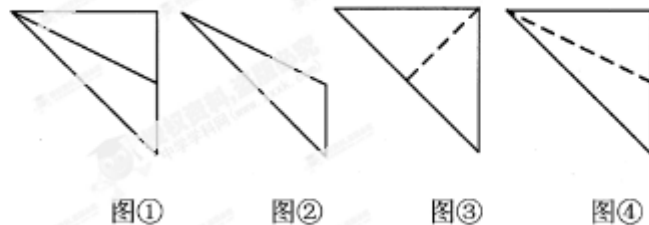
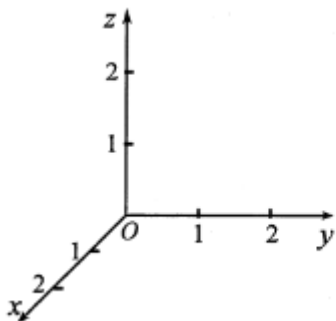
试题分析：作出散点图，如图所示，



观察图像可知，回归直线的斜率 $b < 0$ ，当 $x = 0$ 时， $\hat{y} = a > 0$ 。故选 A。

考点：根据已知样本数判断线性回归方程中的 b 与 a 的符号，容易题。

7. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，一个四面体的顶点坐标分别是 $(0, 0, 2)$ ， $(2, 2, 0)$ ， $(1, 2, 1)$ ， $(2, 2, 2)$ ，给出编号①、②、③、④的四个图，则该四面体的正视图和俯视图分别为 ()

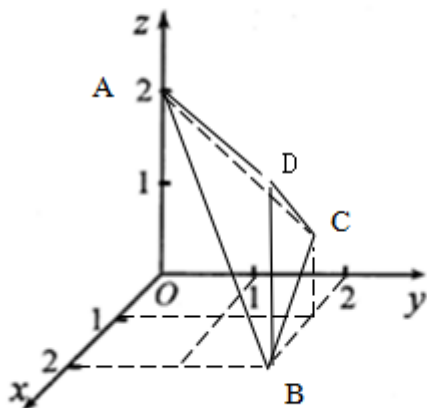


- A. ①和② B. ③和① C. ④和③ D. ④和②

【答案】D

【解析】

试题分析：在坐标系中标出已知的四个点，根据三视图的画图规则判断三棱锥的正视图为④与俯视图为②，故选 D.



考点：空间由已知条件，在空间坐标系中作出几何体的形状，正视图与俯视图的面积，容易题.

8. 设 a 、 b 是关于 t 的方程 $t^2 \cos \theta + t \sin \theta = 0$ 的两个不等实根，则过 $A(a, a^2)$ ， $B(b, b^2)$ 两点的直线与双

曲线 $\frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 1$ 的公共点的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 A

【解析】

试题分析：依题意， $a + b = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$ ，过 $A(a, a^2)$ ， $B(b, b^2)$ 两点的直线斜率为

$$k = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a = -\tan \theta, \text{不妨设 } a = 0, b = -\tan \theta, \text{故 } A(0, 0), B(-\tan \theta, \tan^2 \theta),$$

所以直线 AB 的方程为 $y = -\tan \theta \cdot x$.

又因为双曲线 $\frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \tan \theta \cdot x$,

显然直线 AB 是双曲线的一条渐近线，

所以直线与双曲线无交点，故选 A.

考点：一元二次方程的根与系数关系，直线的斜率，双曲线的性质，直线与双曲线的位置关系，中等题.

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 3x$ ，则函数 $g(x) = f(x) - x + 3$ 的零点的集合为 ()

A. $\{1,3\}$

B. $\{-3,-1,1,3\}$

C. $\{2-\sqrt{7},1,3\}$

D. $\{-2-\sqrt{7},1,3\}$

【答案】 D

【解析】

试题分析：因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 3x$ ，

所以当 $x < 0$ 时， $f(x) = -x^2 - 3x$ ，所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, x \geq 0 \\ -x^2 - 3x, x < 0 \end{cases}$ ，

所以 $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, x \geq 0 \\ -x^2 - 4x + 3, x < 0 \end{cases}$ ，

由 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$ 解得 $x = 1$ 或 3 ，由 $\begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$ 解得 $x = -2 - \sqrt{7}$ ，

所以函数 $g(x) = f(x) - x + 3$ 的零点的集合为 $\{-2 - \sqrt{7}, 1, 3\}$ ，故选 D.

考点：函数的奇偶性的运用，分段函数，函数的零点，一元二次方程的解法，难度中等.

10. 《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土，这是我国现存最早的有系统的数学典籍，其中记载有求“盖”的术：置如其周，令相承也. 又以高乘之，三十六成一. 该术相当于给出了有圆锥的底面周长 L 与高 h ，计算其体积 V 的近似公式 $v \approx \frac{1}{36} L^2 h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为

3. 那么近似公式 $v \approx \frac{2}{75} L^2 h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 ()

A. $\frac{22}{7}$

B. $\frac{25}{8}$

C. $\frac{157}{50}$

D. $\frac{355}{113}$

【答案】 B

【解析】

试题分析：设圆锥底面圆的半径为 r ，高为 h ，依题意， $L = 2\pi r$ ， $\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{75} (2\pi r)^2 h$ ，

所以 $\frac{1}{3} \pi = \frac{8}{75} \pi^2$ ，即 π 的近似值为 $\frac{25}{8}$ ，故选 B.

考点：《算数书》中 π 的近似计算，容易题.

二. 填空题：本大题共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分. 请将答案填在答题卡对应题号的位置上，答错位置，书写不清，模棱两可均不得分.

11. 甲、乙两套设备生产的同类产品共 4800 件，采用分层抽样的方法从中抽取一个容量为 80 的样本进行检测. 若样本中有 50 件产品由甲设备生产，则乙设备生产的产品总数为 _____ 件.

【答案】1800

【解析】

试题分析：依题意，设在甲生产的设备中抽 $50x$ 件，则在乙生产的设备中抽 $30x$ 件，

所以 $50x + 30x = 4800$ ，解得 $x = 600$ ，故乙设备生产的产品总数为 1800 件。

考点：分层抽样，容易题。

12. 若向量 $\vec{OA} = (1, -3)$ ， $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$ ， $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ，则 $|\vec{AB}| =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

试题分析：设 $B(x, y)$ ，依题意， $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$ ，即 $B(-1, -3)$ 或 $B(1, 3)$ （舍去），

所以 $\vec{AB} = (2, 6)$ ，所以 $|\vec{AB}| = 2\sqrt{5}$ 。

考点：平面向量的数量积，向量的模的求法，容易题。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，已知 $A = \frac{\pi}{6}$ ， $a = 1$ ， $b = \sqrt{3}$ ，则 $B =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

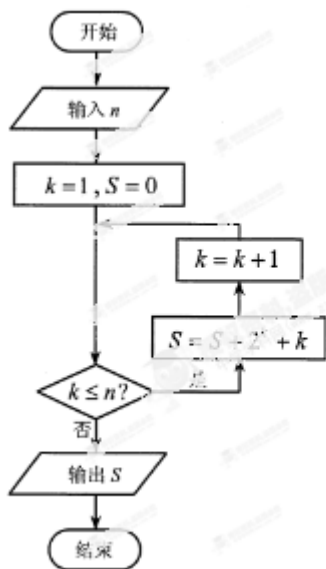
【解析】

试题分析：依题意，由正弦定理知 $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$ ，所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，由于 $0 < B < \pi$ ，

所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 。

考点：正弦定理的运用，容易题。

14. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，若输入 n 的值为 9，则输出 S 的值为_____.



【答案】 1067

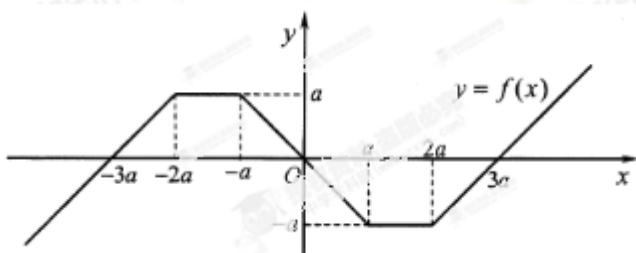
【解析】

试题分析：依题意：该程序框图是计算 $S = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^9 + 1 + 2 + \dots + 9 = 1067$ ，

故输出 $S = 1067$.

考点：新定义题型，程序框图，当型循环结构，容易题.

15. 如图所示，函数 $y = f(x)$ 的图象由两条射线和三条线段组成. 若 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) > f(x-1)$ ， 则正实数 a 的取值范围是_____.



【答案】 $(0, \frac{1}{6})$

【解析】

试题分析：依题意， $\begin{cases} a > 0 \\ 3a - (-3a) < 1 \end{cases}$ ， 解得 $0 < a < \frac{1}{6}$ ， 即正实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{6})$.

考点：函数的奇函数图象的性质、分段函数、最值及恒成立，难度中等.

16. 某项研究表明，在考虑行车安全的情况下，某路段车流量 F （单位时间内测量点的车辆数，单位：辆/小时）与车流速度 v （假设车辆以相同速度 v 行驶，单位：米/秒）平均车长 l （单位：米）的值有关，

其公式为 $F = \frac{76000v}{v^2 + 18v + 20l}$

(1) 如果不限定车型, $l = 6.05$, 则最大车流量为 _____ 辆/小时;

(2) 如果限定车型, $l = 5$, 则最大车流量比 (1) 中的最大车流量增加 _____ 辆/小时.

【答案】 (1) 1900; (2) 100

【解析】

试题分析: (1) 当 $l = 6.05$ 时, 则 $F = \frac{76000v}{v^2 + 18v + 121} = \frac{76000}{v + \frac{121}{v} + 18} \leq \frac{76000}{2\sqrt{v \cdot \frac{121}{v}} + 18} = 1900$,

当且仅当 $v = \frac{121}{v}$ 即 $v = 11$ (米/秒) 时取等号.

(2) 当 $l = 5$ 时, 则 $F = \frac{76000v}{v^2 + 18v + 100} = \frac{76000}{v + \frac{100}{v} + 18} \leq \frac{76000}{2\sqrt{v \cdot \frac{100}{v}} + 18} = 2000$,

当且仅当 $v = \frac{100}{v}$ 即 $v = 10$ (米/秒) 学科网时取等号,

此时最大车流量比 (1) 中的最大车流量增加 100 辆/小时.

考点: 基本不等式的实际运用, 难度中等.

17. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 和点 $A(-2, 0)$, 若定点 $B(b, 0) (b \neq -2)$ 和常数 λ 满足: 对圆 O 上那个任意一点

M , 都有 $|MB| = \lambda |MA|$, 则:

(1) $b =$ _____;

(2) $\lambda =$ _____.

【答案】 (1) $-\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{2}$

【解析】

试题分析: 设 $M(x, y)$, 因为 $|MB| = \lambda |MA|$,

所以 $(x-b)^2 + y^2 = \lambda^2 [(x+2)^2 + y^2]$,

整理得 $(\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda^2 - 1)y^2 + (4\lambda^2 + 2b)x - b^2 + 4\lambda^2 = 0$,

配方得 $x^2 + y^2 + \frac{4\lambda^2 + 2b}{\lambda^2 - 1}x + \frac{4\lambda^2 - b^2}{\lambda^2 - 1} = 0$,

因为对圆 O 上那个任意一点 M , 都有 $|MB| = \lambda |MA|$ 成立,

$$\text{所以} \begin{cases} 4\lambda^2 + 2b = 0 \\ \frac{4\lambda^2 - b^2}{\lambda^2 - 1} = -1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} b = -8 \\ \lambda = -2 \end{cases} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{故} \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

考点：圆的性质，两点间的距离公式，二元二次方程组的解法，难度中等.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 65 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本小题满分 12 分)

某实验室一天的温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系:

$$f(t) = 10 - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} t - \sin \frac{\pi}{12} t, t \in [0, 24).$$

(1) 求实验室这一天上午 8 时的温度;

(2) 求实验室这一天的最大温差.

【答案】 (1) 10°C ; (2) 4°C .

【解析】

试题分析: (1) 把 $f(t) = 10 - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} t - \sin \frac{\pi}{12} t$ 中的自变量 t 用 8 代替计算即可; (2) 利用两个角的和的正弦公式把 $f(t)$ 变成 $f(t) = 10 - 2 \sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3})$, 根据 $0 \leq t < 24$ 求出 $\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}$ 的取值范围, 确定 $\sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3})$ 的取值范围, 从而求得 $f(t)$ 在 $[0, 24)$ 上的最大值与最小值, 最大值减去最小值即得最大温差.

$$\begin{aligned} \text{试题解析: (1)} \quad f(8) &= 10 - \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{12} \times 8) - \sin(\frac{\pi}{12} \times 8) = 10 - \sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= 10 - \sqrt{3} \times (-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 10. \end{aligned}$$

故实验室上午 8 时的温度为 10°C .

$$(2) \text{ 因为 } f(t) = 10 - 2(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{12} t + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} t) = 10 - 2 \sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}),$$

又 $0 \leq t < 24$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$, $-1 \leq \sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}) \leq 1$.

当 $t = 2$ 时, $\sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}) = 1$; 当 $t = 14$ 时, $\sin(\frac{\pi}{12} t + \frac{\pi}{3}) = -1$.

于是 $f(t)$ 在 $[0, 24)$ 上取得最大值 12, 取得最小值 8.

故实验室这一天最高温度为 12°C , 最低温度为 8°C , 最大温差为 4°C .

考点：三角函数的实际运用，两个角的和的正弦公式，三角函数的最值.

19. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 2$ ，且 a_1 、 a_2 、 a_3 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，是否存在正整数 n ，使得 $S_n > 60n + 800$? 若存在，求 n 的最小值；若不存在，说明理由.

【答案】 (1) $a_n = 2$ 或 $a_n = 4n - 2$.

【解析】

试题分析：(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，根据 $2, 2+d, 2+4d$ 成等比数列求得 d 的值，从而求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；(2) 由 (1) 中求得的 a_n ，根据等差数列的求和公式求出 S_n ，解不等式 $S_n > 60n + 800$ 求出满足条件的 n .

试题解析：(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，依题意， $2, 2+d, 2+4d$ 成等比数列，

所以 $(2+d)^2 = 2(2+4d)$ ，学科网解得 $d = 0$ 或 $d = 4$ ，

当 $d = 0$ 时， $a_n = 2$ ；当 $d = 4$ 时， $a_n = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2$ 或 $a_n = 4n - 2$ 。

(2) 当 $a_n = 2$ 时， $S_n = 2n$ ，显然 $2n < 60n + 800$ ，不存在正整数 n ，使得 $S_n > 60n + 800$ 。

当 $a_n = 4n - 2$ 时， $S_n = \frac{n[2 + (4n - 2)]}{2} = 2n^2$ ，

令 $2n^2 > 60n + 800$ ，即 $n^2 - 30n - 400 > 0$ ，

解得 $n > 40$ 或 $n < -10$ (舍去)

此时存在正整数 n ，使得 $S_n > 60n + 800$ 成立， n 的最小值为 41。

综上所述，当 $a_n = 2$ 时，不存在正整数 n ；

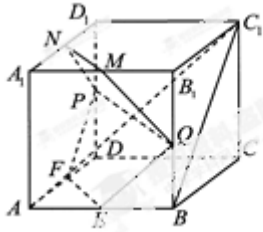
当 $a_n = 4n - 2$ 时，存在正整数 n ，使得 $S_n > 60n + 800$ 成立， n 的最小值为 41。

考点：等差数列、等比数列的性质，等差数列的求和公式.

20. (本小题满分 13 分)

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, P, Q, M, N 分别是棱 $AB, AD, DD_1, BB_1, A_1B_1, A_1D_1$ 的中点. 求证：

- (1) 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$ ；
- (2) 直线 $AC_1 \perp$ 平面 $PQMN$.



【答案】(1) 详见解析；(2) 详见解析.

【解析】

试题分析：(1) 由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的性质得 $BC_1 \parallel AD_1$ ，当 $\lambda=1$ 时，证明 $FP \parallel AD_1$ ，由平行于同一条直线的两条直线平行得 $BC_1 \parallel FP$ ，根据线面平行的判定定理证明 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$ ；(2) .

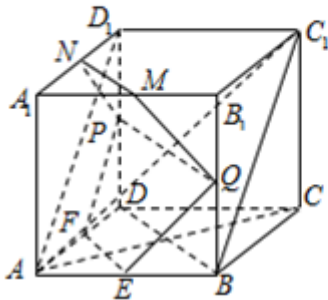
试题解析：(1) 连接 AD_1 ，由 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，知 $AD_1 \parallel BC_1$ ，

因为 F, P 分别是 AD, DD_1 的中点，所以 $FP \parallel AD_1$.

从而 $BC_1 \parallel FP$.

而 $FP \subset$ 平面 $EFPQ$ ，且 $BC_1 \not\subset$ 平面 $EFPQ$ ，

故直线 $BC_1 \parallel$ 平面 $EFPQ$.



(2) 如图，连接 AC, BD ，则 $AC \perp BD$.

由 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，可得 $CC_1 \perp BD$.

又 $AC \cap CC_1 = C$ ，所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1 .

而 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1 ，所以 $BD \perp AC_1$.

因为 M, N 分别是 A_1B_1, A_1D_1 的中点，所以 $MN \parallel BD$ ，从而 $MN \perp AC_1$.

同理可证 $PN \perp AC_1$. 又 $PN \cap MN = N$ ，所以直线 $AC_1 \perp$ 平面 $PQMN$.

考点：正方体的性质，空间中的线线、线面、面面平行于垂直.

21. (本小题满分 14 分)

π 为圆周率, $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调区间;

(2) 求 e^3 , 3^e , e^π , π^e , 3^π , π^3 这 6 个数中的最大数与最小数;

(3) 将 e^3 , 3^e , e^π , π^e , 3^π , π^3 这 6 个数按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.

【答案】 (1) 单调增区间为 $(0, e)$, 单调减区间为 $(e, +\infty)$; (2) 最大数为 3^π , 最小数为 3^e ; (3) 3^e , e^3 , π^e , e^π , π^3 , 3^π .

【解析】

试题分析: (1) 先求函数 $f(x)$ 的定义域, 用导数法求函数 $f(x)$ 的单调区间; (2) 利用 (1) 的结论结合函数根据函数 $y = \ln x$ 、 $y = e^x$ 、 $y = \pi^x$ 的性质, 确定 e^3 , 3^e , e^π , π^e , 3^π , π^3 这 6 个数中的最大数与最小数. 学科网

试题解析: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 所以 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $f'(x) > 0$, 即 $0 < x < e$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $f'(x) < 0$, 即 $x > e$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减;

故函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, e)$, 单调减区间为 $(e, +\infty)$.

(2) 因为 $e < 3 < \pi$, 所以 $e \ln 3 < e \ln \pi$, $\pi \ln e < \pi \ln 3$, 即 $\ln 3^e < \ln \pi^e$, $\ln e^\pi < \ln 3^\pi$,

于是根据函数 $y = \ln x$ 、 $y = e^x$ 、 $y = \pi^x$ 在定义域上单调递增,

所以 $3^e < \pi^e < \pi^3$, $e^3 < e^\pi < 3^\pi$,

故这 6 个数的最大数在 π^3 与 3^π 之中, 最小数在 3^e 与 e^3 之中,

由 $e < 3 < \pi$ 及 (1) 的结论得 $f(\pi) < f(3) < f(e)$, 即 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln e}{e}$,

由 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln 3}{3}$ 得 $\ln \pi^3 < \ln 3^\pi$, 所以 $3^\pi > \pi^3$,

由 $\frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln e}{e}$ 得 $\ln 3^e < \ln e^3$, 所以 $3^e < e^3$,

综上, 6 个数中的最大数为 3^π , 最小数为 3^e .

考点: 导数法求函数的单调性、单调区间, 对数函数的性质, 比较大小.

22. (本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1, 记点 M 的轨迹为 C .

(1) 求轨迹为 C 的方程

(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $p(-2,1)$, 求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点, 两个公共点, 三个公共点时 k 的相应取值范围.

【答案】 (1) $y^2 = \begin{cases} 4x(x \geq 0) \\ 0, (x < 0) \end{cases}$; (2) 当 $k \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点; 当

$k \in \{-1, \frac{1}{2}\} \cup [-\frac{1}{2}, 0)$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有两个公共点; 当 $k \in (-1, \frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有三个公共点.

【解析】

试题分析: (1) 设点 $M(x, y)$, 根据条件列出等式 $|MF| = |x| + 1$, 在用两点间的距离公式表示 $|MF|$, 化简整理即得; (2) 在点 M 的轨迹 C 中, 记 $C_1: y^2 = 4x(x \geq 0)$, $C_2: y = 0(x < 0)$, 设直线 l 的方程为

$y - 1 = k(x + 2)$, 联立方程组 $\begin{cases} y - 1 = k(x + 2) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 整理得 $ky^2 - 4y + 4(2k + 1) = 0$, 分类讨论① $k = 0$ 时;

② $\begin{cases} \Delta < 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$; ③ $\begin{cases} \Delta = 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$; ④ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$, 确定直线 l 与轨迹 C 的公共点的个数.

试题解析: (1) 设点 $M(x, y)$, 依题意, $|MF| = |x| + 1$, 即 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x| + 1$,

整理的 $y^2 = 2(|x| + x)$,

所以点 M 的轨迹 C 的方程为 $y^2 = \begin{cases} 4x(x \geq 0) \\ 0, (x < 0) \end{cases}$.

(2) 在点 M 的轨迹 C 中, 记 $C_1: y^2 = 4x(x \geq 0)$, $C_2: y = 0(x < 0)$,

依题意, 设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x + 2)$,

由方程组 $\begin{cases} y - 1 = k(x + 2) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $ky^2 - 4y + 4(2k + 1) = 0$ ①

当 $k = 0$ 时, 此时 $y = 1$, 把 $y = 1$ 代入轨迹 C 的方程得 $x = \frac{1}{4}$,

所以此时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点 $(\frac{1}{4}, 1)$.

当 $k \neq 0$ 时, 方程①的判别式为 $\Delta = -16(2k^2 + k - 1)$ ②

设直线 l 与 x 轴的交点为 $(x_0, 0)$, 则由 $y - 1 = k(x + 2)$, 令 $y = 0$, 得 $x_0 = \frac{2k + 1}{k}$ ③

(i) 若 $\begin{cases} \Delta < 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$, 由②③解得 $k < -1$ 或 $k > \frac{1}{2}$.

即当 $k \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, 直线 l 与 C_1 没有公共点, 与 C_2 有一个公共点,
故此时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点.

(ii) 若 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$, 由②③解得 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\}$ 或 $-\frac{1}{2} \leq k < 0$,

即当 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\}$ 时, 直线 l 与 C_1 有一个共点, 与 C_2 有一个公共点.

当 $k \in [-\frac{1}{2}, 0)$ 时, 直线 l 与 C_1 有两个共点, 与 C_2 没有公共点.

故当 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\} \cup [-\frac{1}{2}, 0)$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有两个公共点.

(iii) 若 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$, 由②③解得 $-1 < k < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < k < \frac{1}{2}$,

即当 $k \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, 直线 l 与 C_1 有两个共点, 与 C_2 有一个公共点.

故当 $k \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有三个公共点.

综上所述, 当 $k \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时直线 l 与轨迹 C 恰有一个公共点;

当 $k \in \{-1, \frac{1}{2}\} \cup [-\frac{1}{2}, 0)$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有两个公共点;

当 $k \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, 故此时直线 l 与轨迹 C 恰有三个公共点.

考点: 两点间的距离公式, 抛物线方程, 直线与抛物线的位置关系.