

绝密★启用前

2019年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$ C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z - i| = 1$, z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则

- A. $(x+1)^2 + y^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$

3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外,

最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述

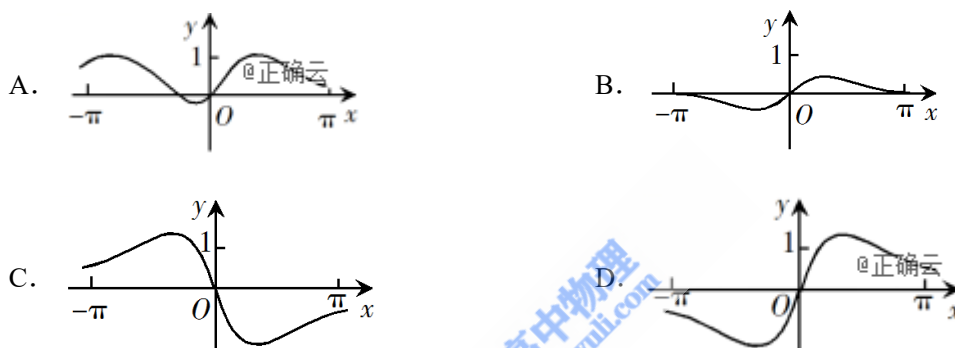
两个黄金分割比例, 且腿长为105 cm, 头顶至脖子下端的长度为26

cm, 则其身高可能是

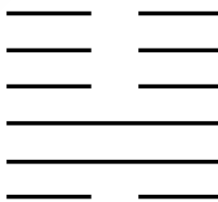


- A. 165 cm B. 175 cm C. 185 cm D. 190 cm

5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“—”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有3个阳爻的概率是

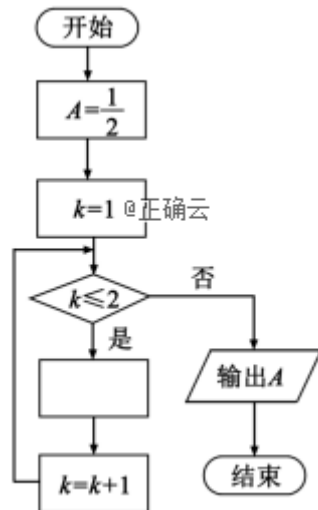


- A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$, 且 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 如图是求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入



- A. $A = \frac{1}{2+A}$ B. $A = 2 + \frac{1}{A}$ C. $A = \frac{1}{1+2A}$ D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则

- A. $a_n = 2n - 5$ B. $a_n = 3n - 10$ C. $S_n = 2n^2 - 8n$ D.

$$S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若

$|AF_2| = 2|F_2B|$, $|AB| = |BF_1|$, 则 C 的方程为

- A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

- ① $f(x)$ 是偶函数 ② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增
 ③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点 ④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

- A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③

12. 已知三棱锥 $P-$

ABC 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形, E, F 分别是 PA, PB 的中点, $\angle CEF=90^\circ$, 则球 O 的体积为

- A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_4^2 = a_6$, 则 $S_5 =$ _____.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为0.6, 客场取胜的概率为0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以4:1获胜的概率是_____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共60分。

17. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设

$$(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C.$$

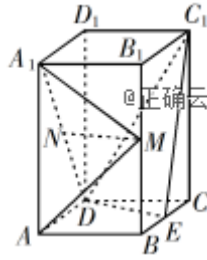
(1) 求 A ;

(2) 若 $\sqrt{2}a + b = 2c$, 求 $\sin C$.

18. (12分)

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

的底面是菱形， $AA_1=4$ ， $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ， E ， M ， N 分别是 BC ， BB_1 ， A_1D 的中点.



(1) 证明： $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.

19. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点为 F ，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A ， B ，与 x 轴的交点为 P .

(1) 若 $|AF|+|BF|=4$ ，求 l 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ ，求 $|AB|$.

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有2个零点.

21. (12分)

为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验。试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验。对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药。一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验。当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效。为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分。甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β ，一轮试验中甲药的得分记为 X 。

(1) 求 X 的分布列；

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分， $p_i (i = 0, 1, \dots, 8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0 = 0$ ， $p_8 = 1$ ，

$$p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, 7), \text{ 其中 } a = P(X = -1), \quad b = P(X = 0),$$

$$c = P(X = 1). \text{ 假设 } \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.8.$$

(i) 证明： $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$ 为等比数列；

(ii) 求 p_4 ，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性。

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修4—4：坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点 O 为

极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为

$$2\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta + 11 = 0.$$

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. [选修4—5: 不等式选讲] (10分)

已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:

(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;

(2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.