2002年天津高考理科数学真题及答案

本试卷分第一卷（选择题）和第二卷（非选择题）两部分。第一卷1至2页。第二卷3至10页。共150分。考试用时120分钟。

第一卷（选择题共60分）

注意事项：

1、 答第一卷前，考生务必将自己的姓名、准考号、考试科目用铅笔涂在答题卡上。

2、 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3、 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么P（A+B）=P（A）+P（B）

如果事件A、B互相独立，那么 P（AB）=P（A）P（B）

如果事件A在试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

正棱锥、圆锥的侧面积公式 $S_{锥侧}=\dfrac{1}{2}cl$

其中c表示底面周长，l表示斜高或母线长

球的体积公式$V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$ 其中R表示球的半径。

一、选择题 本大题共12道小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）曲线$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}(\theta为参数)$上的点到两坐标轴的距离之和的最大值是

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（C）1　（D）$\sqrt{2}$

（2）复数$(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^3$的值是

（A）$-i$　（B）i　（C）-1　（D）1

（3）已知m、n异面直线，$m\subset$平面α，$n\subset$平面β，$\alpha\cap\beta=l$，则l

（A） 与m、n都相交　（B）与m、n中至少一条相交

（B） 与m、n都不相交　（D）至多与m、n中的一条相交

（4）不等式$(1+x)(1-|x|)>0$的解集是

（A）$\{x|0\le x<1\}$　（B）$\{x|x<0且x\ne-1\}$

（C）$\{x|-1<x<1\}$　（D）$\{x|x<1且x\ne-1\}$

（5）在（0,2π）内，使sinx>cosx成立的x取值范围为

支点物理 曹亚辉高中物理 www.zhidianwuli.com

（A） $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$ （B） $(\frac{\pi}{4},\pi)$

（C） $(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$ （D） $(\frac{\pi}{4},\pi)\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$

（6）设集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in Z\right\},N=\left\{x\middle|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in Z\right\}$ 则

（A） $M=N$ （B） $M\subset N$ （C） $M\supset N$ （D） $M\cap N=\phi$

（7）正六棱柱 ABCDEF—$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$，则这个棱柱的侧面对角线 E_1D 独角戏与 BC_1 所成的角是

（A）90^0 （B）60^0 （C）45^0 （D）30^0

（8）函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty)$ 是单调函数的充要条件是

（A） b≥0 （B）b≤0 （C）b>0 （D）b<0

（9）已知 $0<x<y<a<1$，则有

（A） $\log_a(xy)<0$ （B） $0<\log_a(xy)<1$

（C） $1<\log_a(xy)<2$ （D） $\log_a(xy)>2$

（10）平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 A(3,1)，B(-1,3)，若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha,\beta\in R$，且 $\alpha+\beta=1$，则点 C 的轨迹方程为：

（A） 3x-2y-11=0 （B） $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

（C） 2x-y=0 （D） x+2y-5=0

（11）从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有

（A） 8 种 （B）12 种 （C）16 种 （D）20 种

（12）据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》：“2001 年国内生产总值达到 95933 亿元，比上年增长 7.3%。” 如果“十·五”期间（2001 年—2005 年）每年的国内生产总值都按此年增长率增长，那么到“十·五”末我国国内年生产总值约为

（A）115000 亿元 （B）120000 亿元 （C）127000 亿元 （D）135000 亿元

第二卷（非选择题共 90 分）

注意事项：

1、 第二卷共 8 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。

2、 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

（13）函数 $y=\frac{2x}{1+x}(x\in(-1,+\infty))$ 图象与其反函数图象的交点坐标为________。

（14）椭圆 $5x^2-ky^2=5$ 的一个焦点是（0,2），那么 k=______________.

（15）直线 x=0，y=0，x=2 与曲线 $y=(\sqrt{2})^x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的

体积等于___________________。

（16）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么

$$f(1)+f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+f(4)+f(\frac{1}{4})=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

三．解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 12 分）

已知 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5},\frac{\pi}{2}\le\alpha<\frac{3\pi}{2}$.求 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值。

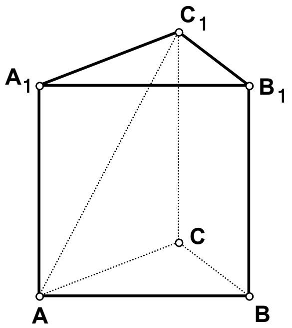
注意：考生在（18 甲）、（18 乙）两题中选一题作答，如果两题都答，只以（18 甲）计分。

（18 甲）（本小题满分 12 分）

如图，正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为 $\sqrt{2}a$。

（1） 建立适当的坐标系，并写出点 A、B、A_1、C_1 的坐标；

（2） 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角

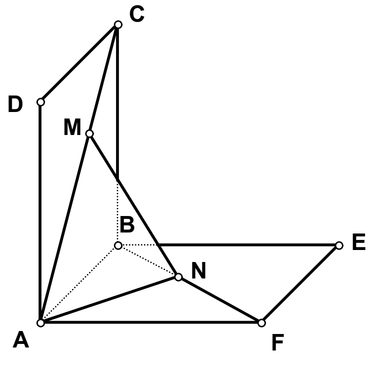


（18 乙）如图，正方形 ABCD、ABEF 的边长都是 1,而且平面 ABCD、ABEF 互相垂直。点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 CM=BN=a $(0<a<\sqrt{2})$.

（1） 求 MN 的长；

（2） 当 a 为何值时，MN 的长最小；

（3） 当 MN 长最小时，求面 MNA 与面 MNB 所成的二面角 α 的大小。



（19）（本小题满分 12 分）

某单位 6 个员工借助互联网开展工作，每个员工上网的概率都是 0.5（相互独立）。

（1）求至少 3 人同时上网的概率；

（2）至少几人同时上网的概率小于 0.3？

（20）（本小题满分 12 分）

已知 $a>0$，函数 $f(x)=\dfrac{1-ax}{x}, x\in(0,+\infty)$。设 $0<x_1<\dfrac{2}{a}$，记曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l。

（1）求 l 的方程；

（2）设 l 与 x 轴交点为 $(x_2,0)$。证明：

①$0<x_2\le\dfrac{1}{a}$；

②若 $x_1<\dfrac{1}{a}$，则 $x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$

（21）（本小题满分 12 分）

已知两点 M（-1，0），N（1，0），且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN},\overrightarrow{NM}\bullet\overrightarrow{NP}$ 成等差小于零的等差数列。

（1）点 P 的轨迹是什么曲线？

（2）若点 P 坐标为 (x_0,y_0)，记 θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角，求 $\tan\theta$。

（22）已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列，满足 $a_1=0,a_2=3,$

$a_{n+1}a_n=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2), n=3,4,5,\cdots\cdots$。

（1）　求 a_3；

（2）　证明 $a_n=a_{n-2}+2, n=3,4,5,\cdots\cdots$；

（3）　求 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 S_n。

参考答案

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算。每题 5 分，满分 60 分。

（1）D（2）C（3）B（4）D（5）C（6）B（7）B（8）A（9）D（10）D（11）B（12）C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，满分 16 分

（13）（0,0），（1,1）　（14）-1　　（15）$\dfrac{3\pi}{\ln 2}$　　（16）$\dfrac{7}{2}$

三．解答题

（17）本小题考查同角三角函数关系式、倍角公式等基础知识，考查基本运算能力。满分 12 分。

解：$\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\cos 2\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha).$

$\because \dfrac{3\pi}{4}\le\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4},\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})>0,$

由此知$\dfrac{3\pi}{2}\langle\alpha+\dfrac{\pi}{4}\langle\dfrac{7\pi}{4},$

$\therefore \sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})}=-\sqrt{1-(\dfrac{3}{5})^2}=-\dfrac{4}{5}.$

从而$\cos 2\alpha=\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{2})=2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=2\times(-\dfrac{4}{5})\times\dfrac{3}{5}=-\dfrac{24}{25}$

$\sin 2\alpha=-\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{2})=1-2\cos^2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=1-2\times(\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{7}{25}.$

$\therefore \cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\dfrac{24}{25}-\dfrac{7}{25})=-\dfrac{31\sqrt{2}}{50}$

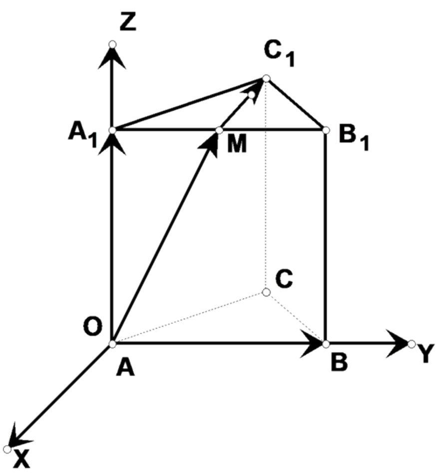
注意：考生在（18 甲）、（18 乙）两题中选一题作答，如果两题都答，只以（18 甲）计分。本小题主要考查空间直角坐标系的概念，空间点和向量的坐标表示以及向量夹角的计算方法，考查运用向量研究空间图形的数学思想方法。满分 12 分。

解：（1）如图，以点 A 为坐标原点 O，以 AB 所在直线为 Oy 轴，以 AA_1 所在直线为 Oz 轴，

以经过原点且与平面 ABB_1A_1 垂直的直线为 Ox 轴，建立空间直角坐标系。

由已知，得 $A(0,0,0),B(0,a,0),A_1(0,0,\sqrt{2}a),C_1(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2},\sqrt{2}a)$

------------4 分



（2）坐标系如上。取 A_1B_1 的中点 M，于是有

$M(0,\dfrac{a}{2},\sqrt{2}a)$，连 AM,MC_1 有

$\overrightarrow{MC_1}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，且

$\overrightarrow{AB}=(0,a,0),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a)$

由于 $\overrightarrow{MC_1}\bullet\overrightarrow{AA_1}=0,\overrightarrow{MC_1}\bullet\overrightarrow{AA_1}=0$

所以，$MC_1 \perp 面ABB_1A_1$

$\therefore AC_1与AM所成的角就是AG_1与侧面ABB_1A_1所成的角。$

$\because \overrightarrow{AC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a),\overrightarrow{AM}=(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$

$\therefore \overrightarrow{AC_1}\bullet\overrightarrow{AM}=0+\frac{a^2}{4}+2a^2=\frac{9}{4}a^2$

而$\left|\overrightarrow{AC_1}\right|=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+2a^2}=\sqrt{3}a$

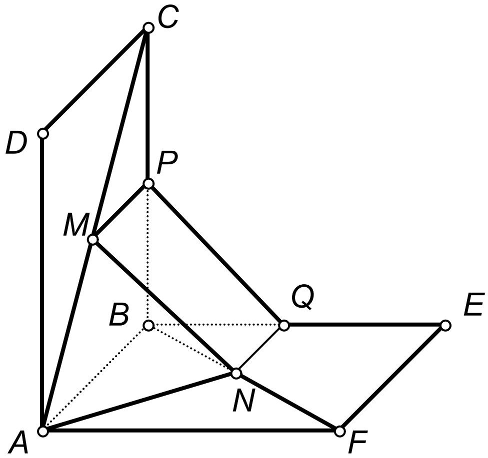
$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2}=\frac{3}{2}a$

$\therefore \cos\left\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AM}\right\rangle=\frac{\frac{9}{4}a^2}{\sqrt{3}a\bullet\frac{3}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以，$\overrightarrow{AC_1}$与$\overrightarrow{AM}$所成的角，即AC_1与侧面ABB_1A_1所成的角为30^0

（18 乙）本小题主要考查线面关系、二面角和函数极值等基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力。满分 12 分。

解：（1）作 MP∥AB 交 BC 于点 P，NQ∥AB 交 BE 于点 Q，连接 PQ，依题意可得 MP∥NQ，且 MP=NQ，



即 MNQP 是平行四边形。

∴MN=PQ

由已知，

CM=BN=a, CB=AB=BE=1,

$AC=BF=\sqrt{2}$

$\therefore \frac{CP}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{BQ}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

即 $CP=BQ=\frac{a}{\sqrt{2}}$

∴

$$MN=PQ=\sqrt{(1-CP)^2+BQ^2}=\sqrt{(1-\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{a}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}(0<a<\sqrt{2})$$

（2）由（1）

$$MN=\sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

所以，当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$

即M,N分别移动到AC,BF的中点时，MN的长最小，最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（3）取 MN 的中点 G，连接 AG、BG，

∵AM=AN,BM=BN，∴AG⊥MN,BG⊥MN，∴∠AGB 即为二面角α的平面角。

又$AG=BG=\frac{\sqrt{6}}{4}$，所以由余弦定理有

$$\cos\alpha=\frac{(\frac{\sqrt{6}}{4})^2+(\frac{\sqrt{6}}{4})^2-1}{2\bullet\frac{\sqrt{6}}{4}\bullet\frac{\sqrt{6}}{4}}=-\frac{1}{3}$$。故所求二面角$\alpha=\arccos(-\frac{1}{3})$。

（19）本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法，考查运用概率知识解决实际问题的能力。满分 12 分。

解：（1）至少 3 人同时上网的概率等于 1 减去至多 2 人同时上网的概率，即

$$1-C_6^0(0.5)^6-C_6^1(0.5)^6-C_6^2(0.5)^6$$
$$=1-\frac{1+6+15}{64}=\frac{21}{32}$$

（2）至少 4 人同时上网的概率为

$$C_6^4(0.5)^6+C_6^5(0.5)^6+C_6^6(0.5)^6=\frac{11}{32}>0.3$$

至少 5 人同时上网的概率为

$$(C_6^5+C_6^6)(0.5)^6=\frac{7}{64}<0.3$$

因此，至少 5 人同时上网的概率小于 0.3.

（20）本小题主要考查利用导数求曲线切线的方法，考查不等式的基本性质，以及分析和解决问题的能力。满分 12 分。

（1）　解：求$f(x)$的导数：$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，由此得切线l的方程：

$$y-(\frac{1-ax_1}{x_1})=-\frac{1}{x^2}(x-x_1)$$。

（2）　证：依题意，切线方程中令 y=0，

$x_2=x_1(1-ax_1)+x_1=x_1(2-ax_1)$，其中$0<x_1<\frac{2}{a}$.

① 由$0<x_1<\frac{2}{a},x_2=x_1(2-ax_1)$,有$x_2>0$,及$x_2=-a(x_1-\frac{1}{a})^2+\frac{1}{a}$

$\therefore 0 < x_2 \le \frac{1}{a}$,当且仅当$x_1 = \frac{1}{a}$时，$x_2 = \frac{1}{a}$.

②当$x_1 < \frac{1}{a}$时，$ax_1 < 1$，因此，$x_2 = x_1(2 - ax_1) > x_1$，且由①，$x_2 < \frac{1}{a}$

所以$x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$。

（21）本小题主要考查向量的数量积，二次函数和等差数列等基础知识，以及综合分析和解决问题的能力。满分 12 分。

解：（1）记$P(x,y)$,由$M(-1,0),N(1,0)$得

$$\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP} = (-1-x,-y), \overrightarrow{PN} = -\overrightarrow{NP} = (1-x,-y), \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM} = (2,0)$$

$$\therefore \overrightarrow{MP} \bullet \overrightarrow{MN} = 2(1+x), \overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN} = x^2 + y^2 - 1, \overrightarrow{NM} \bullet \overrightarrow{NP} = 2(1-x)。$$

于是， $\overrightarrow{MP} \bullet \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{NM} \bullet \overrightarrow{NP}$是公差小于零的等差数列等价于

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = \frac{1}{2}[2(1+x) + 2(1-x)] \\ 2(1-x) - 2(1+x) < 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x > 0 \end{cases},$$

所以，点 P 的轨迹是以原点为圆心，$\sqrt{3}$为半径的右半圆。

（2）点 P 的坐标为(x_0, y_0)。

$$\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN} = x_0^2 + y_0^2 - 1 = 2$$

$$\left|\overrightarrow{PM}\right| \bullet \left|\overrightarrow{PN}\right| = \sqrt{(1+x_0)^2 + y_0^2} \bullet \sqrt{(1-x_0)^2 + y_0^2}$$

$$= \sqrt{(4+2x_0)(4-2x_0)} = 2\sqrt{4 - x_0^2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN}}{\left|\overrightarrow{PM}\right| \bullet \left|\overrightarrow{PN}\right|} = \frac{1}{\sqrt{4 - x_0^2}}$$

$$\because 0 < x_0 \le \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \cos\theta \le 1, 0 \le \theta < \frac{\pi}{3}, \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{4 - x_0^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4 - x_0^2}}}{\sqrt{\frac{1}{4 - x_0^2}}} = \sqrt{3 - x_0^2} = |y_0|$$

（22）本小题主要考查数列与等差数列前 n 项和等基础知识，以及准确表述，分析和解决问题的能力。满分 14 分。

解：（1）由题设得$a_3a_4 = 10$，且a_3, a_4均为非负整数，所以a_3的可能的值为 1、2、5、

10.

若$a_3=1$,则$a_4=10$，$a_5=\frac{3}{2}$，与题设矛盾。

若$a_3=5$,则$a_4=2$，$a_5=\frac{35}{2}$，与题设矛盾。

若$a_3=10$,则$a_4=1$，$a_5=60$，$a_6=\frac{3}{5}$，与题设矛盾。

所以$a_3=2$.

（2）用数学归纳法证明：

①当$n=3, a_3=a_1+2$，等式成立。

②假设当$n=k(k\geq 3)$时等式成立，即$a_k=a_{k-2}+2$，

由题设$a_{k+1}a_k=(a_{k-1}+2)(a_{k-2}+2)$

因为$a_k=a_{k-2}+2\neq 0$

所以$a_{k+1}=a_{k-1}+2$

也就是说，当$n=k+1$时，等式$a_{k+1}=a_{k-1}+2$成立。

根据①②，对于所有$n\geq 3$,有$a_{n+1}=a_{n-1}+2$。

（3）由$a_{2k-1}=a_{2(k-1)-1}+2, a_1=0$及$a_{2k}=a_{2(k-1)}+2, a_2=3$得

$a_{2k-1}=2(k-1), a_{2k}=2k+1, k=1,2,3,\cdots\cdots$。

即$a_n=n+(-1)^n, n=1,2,3,\cdots\cdots$。

所以$S_n=\begin{cases}\frac{1}{2}n(n+1),当n为偶数\\ \frac{1}{2}n(n+1)-1,当n为奇数\end{cases}$。