1999年天津高考文科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第II卷3至8页。共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题共60分）

注意事项：

1.答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目、试卷类型（A或B）用铅笔涂写在答题卡上。

2.每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后。再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3.考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]/2$

$\cos\alpha\sin\beta=[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]/2$

$\cos\alpha\cos\beta=[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2$

$\sin\alpha\sin\beta=-[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]/2$

正棱台、圆台的侧面积公式：

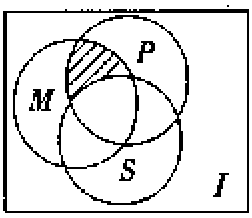
$S_{台侧}=(c'+c)L/2$　　其中c'和c表示圆台的上下底面的周长，L表示斜高或母线长。

台体的体积公式：

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$ 其中s,s'分别表示上下底面积，h表示高。

一. 选择题：本大题共14小题；第(1)—(10)题每小题4分，第(11)—(14)题每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）如图，I是全集，M、P、S是I的3个子集，则阴影部分所表示的集合是



（A）$(M\cap P)\cap S$　　（B）$(M\cap P)\cup S$

（C）$(M\cap P)\cap \overline{S}$　　（D）$(M\cap P)\cup \overline{S}$

（2）已知映射f：A→B，其中，集合A＝{-3，-2，-1，1，2，3，4}，集合B中的元素都是A中元素在映射f下的象，且对任意的a∈A，在B中和它对应的元素是|a|，则集合B中元素的个数是

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

（3）若函数y＝f（x）的反函数是y=g（x），f（a）=b，ab≠0，则g（b）等于

（A）a　　（B）a^{-1}　　（C）b　　（D）b^{-1}

（4）函数 f（x）＝Msin（ωx+ρ）（ω>0）在区间[a，b]上是增函数，且 f（a）=-M，f（b）=M，则函数 g（x）=Mcos（ωx+ρ）在[a，b]上

（A）是增函数　　（B）是减函数

（C）可以取得最大值 M　　（D）可以取得最小值-M

（5）若 f（x）sinx 是周期为Π的奇函数，则 f（x）可以是

（A）sinx　　（B）cosx　　（C）sin2x　　（D）cos2x

（6）曲线 $x^2+y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y=0$ 关于

（A）直线 x=轴对称　　（B）直线 y=-x 轴对称

（C）点（-2，$\sqrt{2}$）中心对称　　（D）点（-$\sqrt{2}$，0）中心对称

（7）若干毫升水倒人底面半径为 2cm 的圆柱形器皿中，量得水面的高为 6cm，若将这些水倒入轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中，则水面的高度是

（A）$6\sqrt{3}$cm　　（B）6cm　　（C）$2\sqrt[3]{18}$cm　　（D）$3\sqrt[3]{12}$cm

（8）若 $(2x+\sqrt{3})^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则 $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2$ 的值为

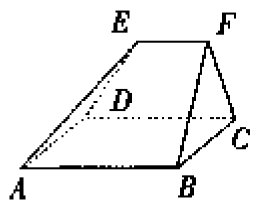
（A）-1　　（B）1　　（C）0　　（D）2

（9）直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

（10）如图，在多面体 ABCDEF 中，已知面 ABCD 是边长为 3 的正方形，EF∥AB，EF=3/2，EF 与面 AC 的距离为 2，则该多面体的体积为

（A）9/2　　（B）5　　（C）6　　（D）15/2



（11）若 sina＞tga＞ctga($-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$)，则 a∈

（A）($-\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}$)　　（B）($-\frac{\pi}{4}$，0)　　（C）(0，$\frac{\pi}{4}$)　　（D）($\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$)

（12）如果圆台的上底面半径为 5，下底面半径为 R，中截面把圆台分为上、下两个圆台，它们的侧面积的比为 1：2，那么 R=

（A）10　　（B）15　　（C）20　　（D）25

（13）给出下列曲线：　①4x+2y-1=0　②$x^2+y^2=3$　③$x^2/2+y^2=1$　④$x^2/2-y^2=1$

其中与直线 r＝-2x-3 有交点的所有曲线是

（A）①③　　（B）②④　　（C）①②③　　（D）②③④

（14）某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘根据需要，软件至少买 3 片，磁盘至少买 2 盒则不同的选购方式共有

（A）5 种　　（B）6 种　　（C）7 种　　（D）8 种

第Ⅱ卷(非选择题共 90 分)

二．填空题：本大题共4小题；每小题4分，共16分，把答案填在题中横线

(15)设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0)的右焦点为 F_1，右准线为 l_1 若过 F_1 且垂直于x轴的弦的长等于点 F_1 到 l_1 的距离，则椭圆的离心率是_______________.

(16)在一块并排10垄的田地中，选择2垄分别种植A、B两种作物，每种作物种植一垄,为有利于作物生长.要求A、B两种作物的间隔不小于6垄,则不同的选垄方法共有______种(用数字作答）.

(17)若正数a、b满足ab=a+b+3，则ab的取值范围是____________.

(18) α、β是两个不同的平面，m、n是平面α及β之外的两条不同直线，给出四个论断：

①m⊥n ②α⊥β ③n⊥β ④m⊥α

以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确一个命题：_________________________.

三．解答题：本大题共6小题；共74分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

(19)(本小题满分10分)

解方程 $\sqrt{3\lg x-2}-3\lg x+4=0$

(20)(本小题满分12分)

数列 $\{a_n\}$ 的前n项和记为 S_n，已知 $a_n=5S_n-3$ (n∈N)求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$ 的值.

(21)(本小题满分12分)

设复数 $z=3\cos\theta+i\sin\theta$．求函数 $y=tg(\theta-\arg z)$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的最大值以及对应的θ值

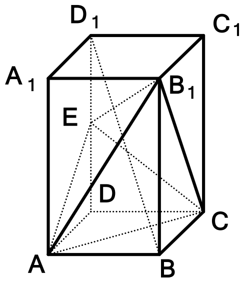
(22)(本小题满分12分)

如图，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点E在棱 D_1D 上，截面EAC∥D_1B，且面EAC与底面ABCD所成的角为45°，AB=a.

(Ⅰ)求截面EAC的面积;

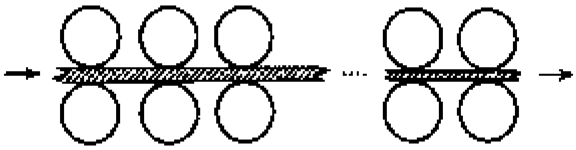
(Ⅱ)求异面直线 A_1B_1 与AC之间的距离;

(Ⅲ)求三棱锥 B_1-EAC 的体积.



(23)(本小题满分 14 分)

下图为一台冷轧机的示意图．冷轧机由若干对轧辊组成，带钢从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出．



(Ⅰ)输入带钢的厚度为 a，输出带钢的厚度为β，若每对轧辊的减薄率不超过 r_0，问冷轧机至少需要安装多少对轧辊？

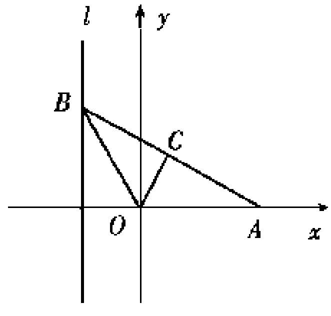
(一对轧辊减薄率= $\dfrac{\text{输入该对的带钢厚度－从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}$)

(Ⅱ)已知一台冷轧机共有 4 对减薄率为 20%的轧辊，所有轧辊周长均为 1600mm，若第 k 对轧辊有缺陷，每滚动一周在带钢上压出一个疵点，在冷轧机输出的带钢上，疵点的间距为 L_k，为了便于检修，请计算 L_1、L_2、L_3 并填入下表(轧钢过程中，带钢宽度不变，且不考虑损耗)．

轧辊序号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k(单位：mm)				1600

(24)(本小题满分 14 分)

如图，给出定点 A(a，0)　(a>0，a≠1)和直线 l：x=－1，B 是直线 l 上的动点，∠BOA 的角平分线交 AB 于点 C，求点 C 的轨迹方程，并讨论方程表示的曲线类型与 a 值的关系．



参考答案

说明：

一．本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则．

二．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

三．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

四．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．第(1)—(10)题每小题4分，第(11)—(14)题每小题5分．满分60分．

(1) C　(2) A　(3) A　(4) C　(5) B　(6) B　(7) B　(8) A　(9) C　(10) D　(11) B　(12) D　(13) D　(14) C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题4分，满分16分．

(15) $\frac{1}{2}$　　(16) 12　　(17) $[9,+\infty)$

(18) m⊥α，n⊥β，α⊥β ⇒ m⊥n 或 m⊥n，m⊥α，n⊥β ⇒ α⊥β

三．解答题

(19) 本小题主要考查对数方程、无理方程的解法和运算能力．满分10分．

解：设 $\sqrt{3\lg x-2}=y$，原方程化为

$$y-y^2+2=0$$ ——4分

解得　y=−1，y=2．——6分

因为 $\sqrt{3\lg x-2}\geq 0$，所以将 y=−1 舍去．

由 $\sqrt{3\lg x-2}$ =2，

得 lgx=2，

所以 x=100．——9分

经检验，x=100 为原方程的解. ——10 分

(20) 本小题主要考查等比数列和数列极限等基础知识. 满分 12 分.

解：由 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 知

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，

$a_1=S_1$， ——2 分

由已知 $a_n=5S_n-3$ 得

$a_{n-1}=5S_{n-1}-3$. ——4 分

于是 a_n-a_{n-1}

$=5(S_n-S_{n-1})$

$=5a_n$，

所以 $a_n=-\frac{1}{4}a_{n-1}$. ——6 分

由 $a_1=5S_1-3$，

得 $a_1=\frac{3}{4}$.

所以，数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=\frac{3}{4}$，公比 $q=-\frac{1}{4}$ 的等比数列. ——8 分

由此知数列 a_1，a_3，a_5，…，a_{2n-1}，…

是首项为 $a_1=\frac{3}{4}$，公比为$\left(-\frac{1}{4}\right)^2$ 的等比数列.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$ ——12 分

(21) 本小题主要考查复数的基本概念、三角公式和不等式等基础知识，考查综合运用所学数学知识解决问题的能力. 满分 12 分.

解：由$0<\theta<\frac{\pi}{2}$得 $\mathrm{tg}\theta>0$.

由 $z=3\cos\theta+i\sin\theta$ 得 $\mathrm{tg}(\arg z)=\frac{\sin\theta}{3\cos\theta}=\frac{1}{3}\mathrm{tg}\theta$. ——3 分

故 $y=\mathrm{tg}(\theta-\arg z)$

$$=\frac{\mathrm{tg}\theta-\frac{1}{3}\mathrm{tg}\theta}{1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\theta}$$ ——6 分

$$=\frac{2}{\frac{3}{\mathrm{tg}\theta}+\mathrm{tg}\theta}$$

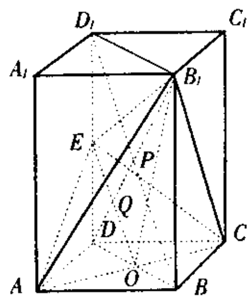
∵ $\frac{3}{\mathrm{tg}\theta}+\mathrm{tg}\theta\geq 2\sqrt{3}$，

∴ $\frac{2}{\frac{3}{\mathrm{tg}\theta}+\mathrm{tg}\theta}\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$. ——9 分

当且仅当 $\frac{3}{\mathrm{tg}\theta}=\mathrm{tg}\,\theta$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）时，即 $\mathrm{tg}\,\theta=\sqrt{3}$ 时，上式取等号.

所以当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，函数 y 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ——12 分

(22) 本小题主要考查空间线面关系、二面角和距离的概念，逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力．满分 12 分.



(Ⅰ) 解：如图，连结 DB 交 AC 于 O，连结 EO.

∵ 底面 ABCD 是正方形，

∴ DO⊥AC.

又 ∵ ED⊥底面 AC，

∴ EO⊥AC.

∴ ∠EOD 是面 EAC 与底面 AC 所成二面角的平面角，

——2 分

∴ ∠EOD=45°.

DO=$\frac{\sqrt{2}}{2}$a，AC=$\sqrt{2}$a，EO=$\frac{\sqrt{2}}{2}$a • sec45°=a.

故 $S_{\triangle EAC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. ——4 分

(Ⅱ) 解：由题设 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱，得 A_1A⊥底面 AC，$A_1A\perp AC$.

又 $A_1A\perp A_1B_1$，

∴ A_1A 是异面直线 A_1B_1 与 AC 间的公垂线. ——6 分

∵ D_1B ∥面 EAC，且面 D_1BD 与面 EAC 交线为 EO，

∴ D_1B ∥ EO.

又 O 是 DB 的中点，

∴ E 是 D_1D 的中点，$D_1B=2EO=2a$.

∴ $D_1D=\sqrt{D_1B^2-DB^2}=\sqrt{2}a$.

异面直线 A_1B_1 与 AC 间的距离为 $\sqrt{2}a$. ——8 分

(III) 解法一：如图，连结 D_1B_1.

∵ $D_1D=DB=\sqrt{2}a$，

∴ BDD_1B_1 是正方形.

连结 B_1D 交 D_1B 于 P，交 EO 于 Q.

∵ $B_1D\perp D_1B$，EO ∥ D_1B，

∴ $B_1D\perp EO$.

又 $AC\perp EO$，$AC\perp ED$.

∴ $AC\perp$ 面 BDD_1B_1，

∴ $B_1D\perp AC$，

∴ $B_1D\perp$ 面 EAC.

∴ B_1Q 是三棱锥 B_1-EAC 的高. ——10 分

由 DQ=PQ，得 $B_1Q=\frac{3}{4}B_1D=\frac{3}{2}a$.

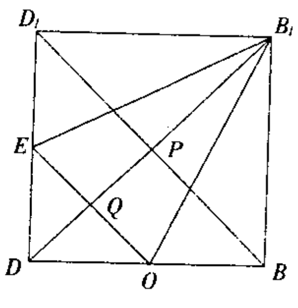
∴ $V_{B_1-EAC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\cdot\frac{3}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

所以三棱锥 B_1-EAC 的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. ——12 分

解法二：连结 B_1O，则 $V_{B_1-EAC}=2V_{A-EOB_1}$. ——10 分

∵ $AO\perp$ 面 BDD_1B_1，

∴ AO 是三棱锥 $A-EOB_1$ 的高，$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.



在正方形 BDD_1B_1 中，E、O 分别是 D_1D、DB 的中点(如右

图)，则

$$S_{\Delta EOB_1}=\frac{3}{4}a^2.$$

$$\therefore\ V_{B_1-EAC}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$$

所以三棱锥 B_1—EAC 的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.　　——12 分

(23) 本小题主要考查等比数列、对数计算等基本知识，考查综合运用数学知识和方法解决实际问题的能力．满分 14 分．

(Ⅰ) 解：厚度为 α 的带钢经过减薄率均为 r_0 的 n 对轧辊后厚度为 $\alpha(1-r_0)^n$.

为使输出带钢的厚度不超过 β，冷轧机的轧辊数(以对为单位)应满足

$$\alpha(1-r_0)^n\leqslant\beta,$$

即 $(1-r_0)^n\leqslant\frac{\beta}{\alpha}$.　　——4 分

由于 $(1-r_0)^n>0$，$\frac{\beta}{\alpha}>0$，对上式两端取对数，得

$$n\lg(1-r_0)\leqslant\lg\frac{\beta}{\alpha}.$$

由于 $\lg(1-r_0)<0$，所以

$$n\geqslant\frac{\lg\beta-\lg\alpha}{\lg(1-r_0)}.$$

因此，至少需要安装不小于 $\frac{\lg\beta-\lg\alpha}{\lg(1-r_0)}$ 的整数对轧辊.　　——7 分

(Ⅱ)解法一：第 k 对轧辊出口外疵点间距离为轧辊周长，在此处出口的两疵点间带钢的体积为

$$1600\cdot\alpha(1-r)^k\cdot\text{宽度}\quad(\text{其中 } r=20\%),$$

而在冷轧机出口处两疵点间带钢的体积为

$$L_k\cdot\alpha(1-r)^4\cdot\text{宽度}.$$

因宽度相等，且无损耗，由体积相等得

$$1600\cdot\alpha(1-r)^k=L_k\cdot\alpha(1-r)^4\quad(r=20\%),$$

即 $L_k=1600\cdot0.8^{k-4}$.　　——10 分

由此得 L_3=2000(mm)，

L_2=2500(mm)，

L_1=3125(mm).

填表如下

轧辊序号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k(mm)	3125	2500	2000	1600

解法二：第 3 对轧辊出口疵点间距为轧辊周长，在此处出口的两疵点间带钢体积与冷轧机出口处两疵点间带钢体积相等，因宽度不变，有

$$1600=L_3\cdot(1-0.2),$$

所以 $L_3=\dfrac{1600}{0.8}=2000$(mm). ——10 分

同理 $L_2=\dfrac{L_3}{0.8}=2500$(mm).

$L_1=\dfrac{L_2}{0.8}=3125$(mm).

填表如下

轧辊序号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k(mm)	3125	2500	2000	1600

——14 分

(24) 本小题主要考查曲线与方程，直线和圆锥曲线等基础知识，以及求动点轨迹的基本技能和综合运用数学知识解决问题的能力. 满分 14 分.

解法一：依题意，记 B(−1，b) (b∈R)，则直线 OA 和 OB 的方程分别为 y=0 和 y=−bx. 设点 C(x，y)，则有 0≤x<a，由 OC 平分∠AOB，知点 C 到 OA、OB 距离相等. 根据点到直线的距离公式得 $|y|=\dfrac{|y+bx|}{\sqrt{1+b^2}}$. ①

——4 分

依题设，点 C 在直线 AB 上，故有

$$y=-\frac{b}{1+a}(x-a).$$ ——6 分

由 x−a≠0，得 $b=-\dfrac{(1+a)y}{x-a}$. ②

将②式代入①代得

$$y^2\left[1+\frac{(1+a)^2y^2}{(x-a)^2}\right]=\left[y-\frac{(1+a)xy}{x-a}\right]^2,$$

整理得 $y^2[(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2]=0$. ——9 分

若 $y\neq0$，则 $(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0\quad(0<x<a)$；

若 $y=0$，则 $b=0$，$\angle AOB=\pi$，点 C 的坐标为(0，0)，满足上式.

综上得点 C 的轨迹方程为

$$(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0\quad(0\leqslant x<a).$$ ——10 分

∵ $a\neq1$，

$$\therefore\ \frac{\left(x-\frac{a}{1-a}\right)^2}{\left(\frac{a}{1-a}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{1-a^2}}=1\qquad(0\leqslant x<a).\qquad③$$ ——12 分

由此知，当 $0<a<1$ 时，方程③表示椭圆弧段；

当 $a>1$ 时，方程③表示双曲线一支的弧段. ——14 分

解法二：如图，设 D 是 l 与 x 轴的交点，过点 C 作 CE⊥x 轴，E 是垂足.

(ⅰ)当 $|BD|\neq0$ 时，设点 C(x，y)，则 $0<x<a$，$y\neq0$.

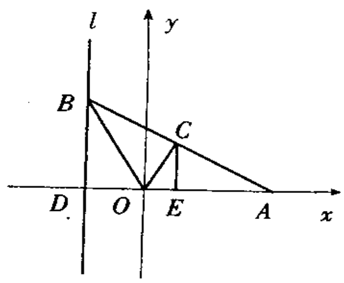
由 CE∥BD 得 $|BD|=\frac{|CE|\cdot|DA|}{|EA|}=\frac{|y|}{a-x}(1+a)$. ——3 分

∵ $\angle COA=\angle COB=\angle COD-\angle BOD=\pi-\angle COA-\angle BOD$，

∴ $2\angle COA=\pi-\angle BOD$.

∵ $\mathrm{tg}(2\angle COA)=\frac{2\mathrm{tg}\angle COA}{1-\mathrm{tg}^2\angle COA}$，$\mathrm{tg}(\pi-\angle BOD)=-\mathrm{tg}\angle BOD$， ——6 分

$$\mathrm{tg}\angle COA=\frac{|y|}{x},\ \mathrm{tg}\angle BOD=\frac{|BD|}{|OD|}=\frac{|y|}{a-x}(1+a).$$



$$\therefore\ \frac{2\cdot\frac{|y|}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}=-\frac{|y|}{a-x}(1+a),$$

整理得 $(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0\quad(0<x<a)$. ——9

分

（ii）当$|BD|=0$时，$\angle BOA=\pi$，则点C的坐标为（0，0），满足上式.

综合（i），（ii），得点C的轨迹方程为

$$(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0\quad(0\leqslant x<a).$$ ——10

分

以下同解法一.