2015 年浙江省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．（5 分）（2015•浙江）已知集合 $P=\{x|x^2-2x\geq 3\}$，$Q=\{x|2<x<4\}$，则 $P\cap Q=$（　　）

A．$[3，4)$　　B．$(2，3]$　　C．$(-1，2)$　　D．$(-1，3]$

考点：　交集及其运算．

专题：　集合．

分析：　求出集合 P，然后求解交集即可．

解答：　解：集合 $P=\{x|x^2-2x\geq 3\}=\{x|x\leq -1$ 或 $x\geq 3\}$，

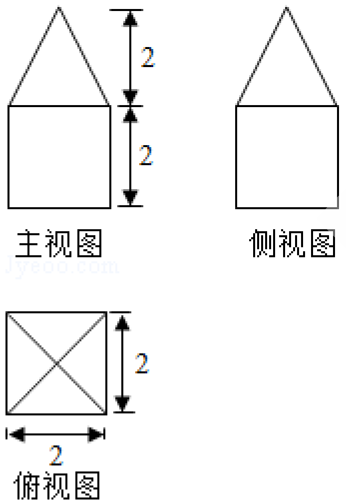
$Q=\{x|2<x<4\}$，

则 $P\cap Q=\{x|3\leq x<4\}=[3，4)$．

故选：A．

点评：　本题考查二次不等式的解法，集合的交集的求法，考查计算能力．

2．（5 分）（2015•浙江）某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是（　　）



A．$8cm^3$　　B．$12cm^3$　　C．$\frac{32}{3}cm^3$　　D．$\frac{40}{3}cm^3$

考点：　由三视图求面积、体积．

专题：　空间位置关系与距离．

分析：　判断几何体的形状，利用三视图的数据，求几何体的体积即可．

解答：　解：由三视图可知几何体是下部为棱长为 2 的正方体，上部是底面为边长 2 的正方形奥为 2 的正四棱锥，

所求几何体的体积为：$2^3+\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 2=\frac{32}{3}cm^3$．

故选：C．

点评：本题考查三视图与直观图的关系的判断，几何体的体积的求法，考查计算能力．

3．（5 分）（2015•浙江）设 a，b 是实数，则“a+b＞0”是“ab＞0”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断．

专题：简易逻辑．

分析：利用特例集合充要条件的判断方法，判断正确选项即可．

解答：解：a，b 是实数，如果 a=－1，b=2 则“a+b＞0”，则“ab＞0”不成立．

如果 a=－1，b=－2，ab＞0，但是 a+b＞0 不成立，

所以设 a，b 是实数，则“a+b＞0”是“ab＞0”的既不充分也不必要条件．

故选：D．

点评：本题考查充要条件的判断与应用，基本知识的考查．

4．（5 分）（2015•浙江）设 α，β 是两个不同的平面，l，m 是两条不同的直线，且 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，（　　）

A．若 $l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　B．若 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp m$　　C．若 $l\parallel\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$　　D．若 $\alpha\parallel\beta$，则 $l\parallel m$

考点：空间中直线与平面之间的位置关系．

专题：综合题；空间位置关系与距离．

分析：A 根据线面垂直的判定定理得出 A 正确；

B 根据面面垂直的性质判断 B 错误；

C 根据面面平行的判断定理得出 C 错误；

D 根据面面平行的性质判断 D 错误．

解答：解：对于 A，$\because l\perp\beta$，且 $l\subset\alpha$，根据线面垂直的判定定理，得 $\alpha\perp\beta$，∴A 正确；

对于 B，当 $\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$ 时，l 与 m 可能平行，也可能垂直，∴B 错误；

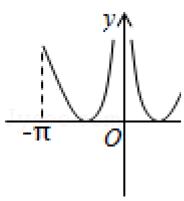
对于 C，当 $l\parallel\beta$，且 $l\subset\alpha$ 时，α 与 β 可能平行，也可能相交，∴C 错误；

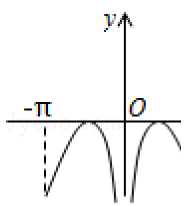
对于 D，当 $\alpha\parallel\beta$，且 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$ 时，l 与 m 可能平行，也可能异面，∴D 错误．

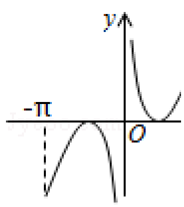
故选：A．

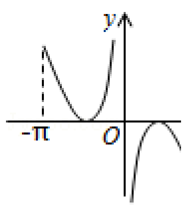
点评：本题考查了空间中的平行与垂直关系的应用问题，也考查了数学符号语言的应用问题，是基础题目．

5．（5 分）（2015•浙江）函数 $f(x)=(x-\frac{1}{x})\cos x$（$-\pi\le x\le\pi$ 且 $x\neq0$）的图象可能为（　　）

A．

B．

C．

D．

考点： 函数的图象．

专题： 函数的性质及应用．

分析： 由条件可得函数 f（x）为奇函数，故它的图象关于原点对称；再根据在（0，1）上，f（x）＜0，结合所给的选项，得出结论．

解答： 解：对于函数 f（x）=（$x-\frac{1}{x}$）cosx（﹣π≤x≤π 且 x≠0），由于它的定义域关于原点对称，

且满足 f（﹣x）=（$\frac{1}{x}-x$）cosx=﹣f（x），故函数 f（x）为奇函数，故它的图象关于原点对称．

故排除 A、B．

再根据在（0，1）上，$\frac{1}{x}$＞x，cosx＞0，f（x）=（$x-\frac{1}{x}$）cosx＜0，故排除 C，

故选：D．

点评： 本题主要考查函数的奇偶性的判断，奇函数的图象特征，函数的定义域和值域，属于中档题．

6．（5 分）（2015•浙江）有三个房间需要粉刷，粉刷方案要求：每个房间只用一种颜色，且三个房间颜色各不相同．已知三个房间的粉刷面积（单位：m^2）分别为 x，y，z，且 x＜y＜z，三种颜色涂料的粉刷费用（单位：元/m^2）分别为 a，b，c，且 a＜b＜c．在不同的方案中，最低的总费用（单位：元）是（　　）

A． ax+by+cz　　B． az+by+cx　　C． ay+bz+cx　　D． ay+bx+cz

考点： 函数的最值及其几何意义．

专题： 函数的性质及应用．

分析： 作差法逐个选项比较大小可得．

解答： 解：∵x＜y＜z 且 a＜b＜c，

∴ax+by+cz﹣（az+by+cx）

=a（x﹣z）+c（z﹣x）

=（x﹣z）（a﹣c）＞0，

∴ax+by+cz＞az+by+cx；

同理 ay+bz+cx﹣（ay+bx+cz）

=b（z﹣x）+c（x﹣z）

=（z﹣x）（b﹣c）＞0，

∴ay+bz+cx＞ay+bx+cz；

同理 az+by+cx﹣（ay+bz+cx）

=a（z﹣y）+b（y﹣z）

=（z﹣y）（a﹣b）＜0，

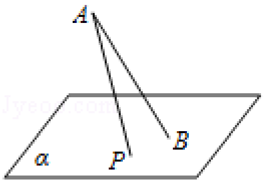
∴az+by+cx＜ay+bz+cx，

∴最低费用为 az+by+cx

故选：B

点评： 本题考查函数的最值，涉及作差法比较不等式的大小，属中档题．

7．（5 分）（2015•浙江）如图，斜线段 AB 与平面 α 所成的角为 60°，B 为斜足，平面 α 上的动点 P 满足∠PAB=30°，则点 P 的轨迹是（　　）



A．直线　　B．抛物线　　C．椭圆　　D．双曲线的一支

考点： 圆锥曲线的轨迹问题．

专题： 圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析： 根据题意，∠PAB=30°为定值，可得点 P 的轨迹为一以 AB 为轴线的圆锥侧面与平面 α 的交线，则答案可求．

解答： 解：用垂直于圆锥轴的平面去截圆锥，得到的是圆；把平面渐渐倾斜，得到椭圆；当平面和圆锥的一条母线平行时，得到抛物线．

此题中平面 α 上的动点 P 满足∠PAB=30°，可理解为 P 在以 AB 为轴的圆锥的侧面上，

再由斜线段 AB 与平面 α 所成的角为 60°，可知 P 的轨迹符合圆锥曲线中椭圆定义．

故可知动点 P 的轨迹是椭圆．

故选：C．

点评： 本题考查椭圆的定义，考查学生分析解决问题的能力，比较基础．

8．（5 分）（2015•浙江）设实数 a，b，t 满足|a+1|=|sinb|=t．（　　）

A．若 t 确定，则 b^2 唯一确定

B．若 t 确定，则 a^2+2a 唯一确定

C．若 t 确定，则 $\sin\frac{b}{2}$ 唯一确定

D．若 t 确定，则 a^2+a 唯一确定

考点： 四种命题．

专题： 简易逻辑．

分析： 根据代数式得出 $a^2+2a=t^2-1$，$\sin^2b=t^2$，运用条件，结合三角函数可判断答案．

解答： 解：∵实数 a，b，t 满足|a+1|=t，

∴$(a+1)^2=t^2$，

$a^2+2a=t^2-1$，

t 确定，则 t^2-1 为定值．

$\sin^2b=t^2$，

A，C 不正确，

∴若 t 确定，则 a^2+2a 唯一确定，

故选：B

点评： 本题考查了命题的判断真假，属于容易题，关键是得出 $a^2+2a=t^2-1$，即可判断．

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分）

9．（6 分）（2015•浙江）计算：$\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=$__ $-\frac{1}{2}$__，$2^{\log_2 3+\log_4 3}=$__ $3\sqrt{3}$__．

考点： 对数的运算性质．

专题： 函数的性质及应用．

分析： 直接利用对数运算法则化简求值即可．

解答： 解：$\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\log_2 2^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$；

$2^{\log_2 3+\log_4 3}=2^{\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3}=$

$2^{\log_2(3\cdot 3^{\frac{1}{2}})}=3\sqrt{3}$．

故答案为：$-\frac{1}{2}$；$3\sqrt{3}$．

点评： 本题考查导数的运算法则的应用，基本知识的考查．

10．（6分）（2015•浙江）已知$\{a_n\}$是等差数列，公差d不为零，若a_2，a_3，a_7成等比数列，且$2a_1+a_2=1$，则$a_1=$__$\frac{2}{3}$__，$d=$__﹣1__．

考点：等比数列的性质．

专题：等差数列与等比数列．

分析：运用等比数列的性质，结合等差数列的通项公式，计算可得$d=-\frac{3}{2}a_1$，再由条件$2a_1+a_2=1$，运用等差数列的通项公式计算即可得到首项和公差．

解答：解：由a_2，a_3，a_7成等比数列，

则$a_3^2=a_2a_7$，

即有$(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+6d)$，

即$2d^2+3a_1d=0$，

由公差d不为零，

则$d=-\frac{3}{2}a_1$，

又$2a_1+a_2=1$，

即有$2a_1+a_1+d=1$，

即$3a_1-\frac{3}{2}a_1=1$，

解得$a_1=\frac{2}{3}$，$d=-1$．

故答案为：$\frac{2}{3}$，﹣1．

点评：本题考查等差数列首项和公差的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等差数列和等比数列的性质的合理运用．

11．（6分）（2015•浙江）函数$f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$的最小正周期是__π__，最小值是_$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$__．

考点：二倍角的余弦；三角函数的最值．

专题：三角函数的图像与性质．

分析：由三角函数恒等变换化简解析式可得$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$，由正弦函数的图象和性质即可求得最小正周期，最小值．

解答：解：∵$f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$

$=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+1$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$．

∴最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，最小值为：$\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$．

故答案为：π，$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

点评： 本题主要考查了三角函数恒等变换的应用，考查了正弦函数的图象和性质，属于基本知识的考查.

12．（6 分）（2015•浙江）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ x+\frac{6}{x}-6, & x>1\end{cases}$，则 f（f（﹣2））=__$-\frac{1}{2}$__，f（x）的最小值是__$2\sqrt{6}-6$__.

考点： 函数的最值及其几何意义.

专题： 函数的性质及应用.

分析： 由分段函数的特点易得 f（f（﹣2））=的值；分别由二次函数和基本不等式可得各段的最小值，比较可得.

解答： 解：由题意可得 $f(-2)=(-2)^2=4$，

∴$f(f(-2))=f(4)=4+\frac{6}{4}-6=-\frac{1}{2}$；

∵当 x≤1 时，$f(x)=x^2$，

由二次函数可知当 x=0 时，函数取最小值 0；

当 x＞1 时，$f(x)=x+\frac{6}{x}-6$，

由基本不等式可得 $f(x)=x+\frac{6}{x}-6\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{6}{x}}-6=2\sqrt{6}-6$，

当且仅当 $x=\frac{6}{x}$即 $x=\sqrt{6}$时取到等号，即此时函数取最小值 $2\sqrt{6}-6$；

∵$2\sqrt{6}-6<0$，∴f（x）的最小值为 $2\sqrt{6}-6$

故答案为：$-\frac{1}{2}$；$2\sqrt{6}-6$

点评： 本题考查函数的最值，涉及二次函数的性质和基本不等式，属中档题.

13．（4 分）（2015•浙江）已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是平面向量，且$\overrightarrow{e_1}\bullet\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{2}$，若平衡向量$\overrightarrow{b}$满足$\overrightarrow{b}\bullet\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{b}\bullet\overrightarrow{e_2}=1$，则$|\overrightarrow{b}|$=__$\frac{2\sqrt{3}}{3}$__.

考点： 平面向量数量积的性质及其运算律.

专题： 平面向量及应用.

分析： 根据数量积得出$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$夹角为 60°，$<\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_1}>=<\overrightarrow{b},\overrightarrow{e_2}>=30°$，运用数量积的定义判断求解即可.

解答： 解：∵$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是平面单位向量，且$\overrightarrow{e_1}\bullet\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 夹角为 $60°$，

$\because$平衡向量$\vec{b}$满足$\vec{b}\bullet\vec{e_1}=\vec{b}\bullet\vec{e_2}=1$

$\therefore \vec{b}$与$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 夹角相等，且为锐角，

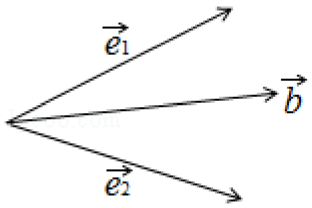
$\therefore \vec{b}$应该在$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 夹角的平分线上，

即$<\vec{b}, \vec{e_1}>=<\vec{b}, \vec{e_2}>=30°$，

$|\vec{b}|\times1\times\cos30°=1$，

$\therefore |\vec{b}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$



点评： 本题简单的考查了平面向量的运算，数量积的定义，几何图形的运用，属于容易题，关键是判断夹角即可．

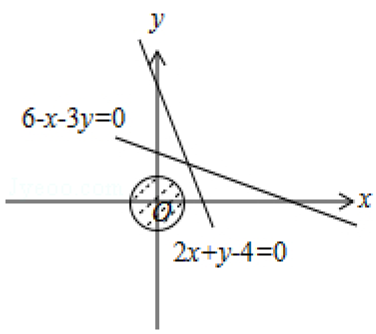
14．（4 分）（2015•浙江）已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2\le1$，则$|2x+y-4|+|6-x-3y|$的最大值是_<u>15 </u>．

考点： 简单线性规划．

专题： 不等式的解法及应用．

分析： 由题意可得 $2x+y-4<0$，$6-x-3y>0$，去绝对值后得到目标函数 $z=-3x-4y+10$，然后结合圆心到直线的距离求得$|2x+y-4|+|6-x-3y|$的最大值．

解答： 解：如图，



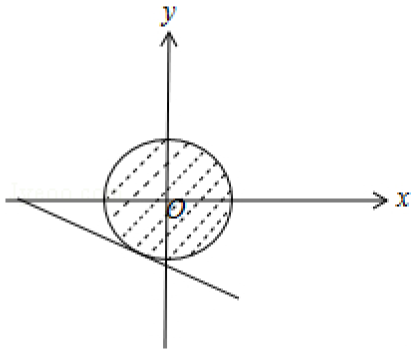
由 $x^2+y^2\le1$，

可得 $2x+y-4<0$，$6-x-3y>0$，

则$|2x+y-4|+|6-x-3y|=-2x-y+4+6-x-3y=-3x-4y+10$，

令 z=﹣3x﹣4y+10，得 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{z}{4}+\frac{5}{2}$，

如图，



要使 z=﹣3x﹣4y+10 最大，则直线 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{z}{4}+\frac{5}{2}$在 y 轴上的截距最小，

由 z=﹣3x﹣4y+10，得 3x+4y+z﹣10=0．

则$\frac{|z-10|}{5}=1$，即 z=15 或 z=5．

由题意可得 z 的最大值为 15．

故答案为：15．

点评： 本题考查了简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，考查了数学转化思想方法，是中档题．

15．（4 分）（2015•浙江）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的右焦点 F（c，0）关于直线 $y=\frac{b}{c}x$ 的对称点 Q 在椭圆上，则椭圆的离心率是__$\frac{\sqrt{2}}{2}$__．

考点： 椭圆的简单性质．

专题： 圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析： 设出 Q 的坐标，利用对称知识，集合椭圆方程推出椭圆几何量之间的关系，然后求解离心率即可．

解答：

解：不妨令 c=1，设 Q（m，n），由题意可得$\begin{cases}\frac{n}{m-c}=-\frac{c}{b}\cdots①\\ \frac{n}{2}=\frac{b}{c}\cdot\frac{m+c}{2}\cdots②\\ \frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1\cdots③\end{cases}$，即：

$$\begin{cases}\frac{n}{m-1}=-\frac{1}{b}\cdots① \\ \frac{n}{2}=b\cdot\frac{m+1}{2}\cdots② \\ \frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1\cdots③\end{cases},$$

由①②可得：$m=\frac{c^3-cb^2}{a^2}$，$n=\frac{2bc^2}{a^2}$，代入③可得：

$$\frac{\left(\frac{c^3-cb^2}{a^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{2bc^2}{a^2}\right)^2}{b^2}=1,$$

解得 $e^2(4e^4-4e^2+1)+4e^2=1$，

可得，$4e^6+e^2-1=0$．

即 $4e^6-2e^4+2e^4-e^2+2e^2-1=0$，

可得 $(2e^2-1)(2e^4+e^2+1)=0$

解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

点评： 本题考查椭圆的方程简单性质的应用，考查对称知识以及计算能力．

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16．（14 分）（2015•浙江）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)=2$．

（Ⅰ）求$\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}$的值；

（Ⅱ）若 $B=\frac{\pi}{4}$，$a=3$，求△ABC 的面积．

考点： 二倍角的余弦；两角和与差的正切函数．

专题： 解三角形．

分析： （Ⅰ）由两角和与差的正切函数公式及已知可得 tanA，由倍角公式及同角三角函数关系式即可得解．

（Ⅱ）由 $\tan A=\frac{1}{3}$，$A\in(0,\pi)$，可得 sinA，cosA．又由正弦定理可得 b，由 $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，可得 sinC，利用三角形面积公式即可得解．

解答： 解：（Ⅰ）由 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)=2$．可得 $\tan A=\frac{1}{3}$，

所以$\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}=\frac{2\tan A}{2\tan A+1}=\frac{2}{5}$.

（Ⅱ）由 $\tan A=\frac{1}{3}$，$A\in(0，\pi)$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

又由 $a=3$，$B=\frac{\pi}{4}$及正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b=3\sqrt{5}$，

由 $\sin C=\sin(A+B)=\sin(A+\frac{\pi}{4})$，可得 $\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

设△ABC 的面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=9$.

点评： 本题主要考查了三角函数及其变换、正弦定理和余弦定理等基本知识的应用，同时考查了运算求解能力，属于中档题.

17.（15 分）（2015•浙江）已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足 $a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$（$n\in N^*$），$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\ldots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$（$n\in N^*$）

（Ⅰ）求 a_n 与 b_n；

（Ⅱ）记数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

考点： 数列的求和.

专题： 等差数列与等比数列.

分析： （Ⅰ）直接由 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，可得数列$\{a_n\}$为等比数列，由等比数列的通项公式求得数列$\{a_n\}$的通项公式；

再由 $b_1=1$，$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\ldots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$，取 n=1 求得 $b_2=2$，当 $n\geq 2$ 时，得另一递推式，作差得到$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，整理得数列$\{\frac{b_n}{n}\}$为常数列，由此可得$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求出 $a_nb_n=n\cdot 2^n$，然后利用错位相减法求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和为 T_n.

解答： 解：（Ⅰ）由 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，得 $a_n=2^n$（$n\in N^*$）.

由题意知，当 n=1 时，$b_1=b_2-1$，故 $b_2=2$，

当 $n\geq 2$ 时，$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\ldots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=b_n-1$，和原递推式作差得，

$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，整理得：$\frac{b_{n+1}}{n+1}=\frac{b_n}{n}$，

$\therefore b_n=n$（$n\in N^*$）；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_nb_n=n\cdot 2^n$，

因此$T_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$

$2T_n=2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$,

两式作差得：$-T_n=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}$,

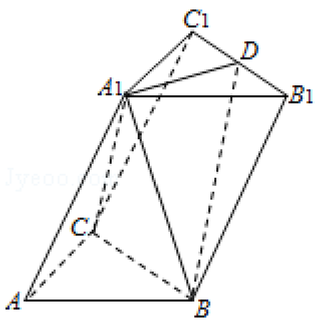
$T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$（$n\in N^*$）.

点评： 本题主要考查等差数列的通项公式、等差数列和等比数列等基础知识，同时考查数列求和等基本思想方法，以及推理论证能力，是中档题.

18．（15分）（2015•浙江）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2$，$A_1A=4$，A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点，D 是 B_1C_1 的中点.

（Ⅰ）证明：$A_1D\perp$平面 A_1BC；

（Ⅱ）求直线 A_1B 和平面 BB_1C_1C 所成的角的正弦值.



考点： 直线与平面所成的角；直线与平面垂直的判定.

专题： 空间位置关系与距离；空间角.

分析： （I）连接 AO，A_1D，根据几何体的性质得出 $A_1O\perp A_1D$，$A_1D\perp BC$，利用直线平面的垂直定理判断.

（II）利用空间向量的垂直得出平面 BB_1C_1C 的法向量$\vec{n}=(\sqrt{7}, 0, 1)$，|根据与$\overrightarrow{BA_1}$数量积求解余弦值，即可得出直线 A_1B 和平面 BB_1C_1C 所成的角的正弦值.

解答： 证明：（I）∵AB=AC=2，D 是 B_1C_1 的中点.

∴$A_1D\perp B_1C_1$，

∵$BC\parallel B_1C_1$，

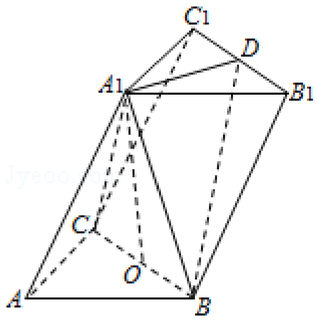
∴$A_1D\perp BC$，

∵$A_1O\perp$面 ABC，$A_1D\parallel AO$，

∴$A_1O\perp AO$，$A_1O\perp BC$

∵$BC\cap AO=O$，$A_1O\perp A_1D$，$A_1D\perp BC$

∴$A_1D\perp$平面 A_1BC



解：（II）

建立坐标系如图

∵在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2$，$A_1A=4$

∴O（0，0，0），B（0，$\sqrt{2}$，0），B_1（$-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{14}$），A_1（0，0$\sqrt{14}$）

即$\overrightarrow{A_1B}$=（0，$\sqrt{2}$，$\sqrt{14}$），$\overrightarrow{OB}$=（0，$\sqrt{2}$，0），$\overrightarrow{BB_1}$=（$-\sqrt{2}$，0，$\sqrt{14}$），

设平面 BB_1C_1C 的法向量为$\vec{n}$=（x，y，z），

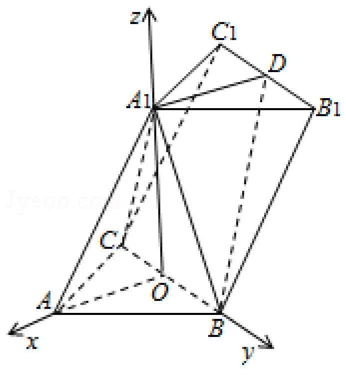
$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$ 即得出 $\begin{cases}y=0\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{14}z=0\end{cases}$

得出$\vec{n}$=（$\sqrt{7}$，0，1），$|\overrightarrow{BA_1}|$=4，$|\vec{n}|=2\sqrt{2}$

∵$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=\sqrt{14}$，

∴$\cos<\vec{n},\overrightarrow{BA_1}>=\dfrac{\sqrt{14}}{4\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$，

可得出直线 A_1B 和平面 BB_1C_1C 所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

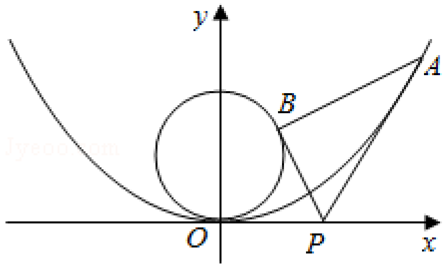


点评：本题考查了空间几何体的性质，直线平面的垂直问题，空间向量的运用，空间想象能力，计算能力，属于中档题.

19.（15 分）（2015•浙江）如图，已知抛物线 C_1：$y=\frac{1}{4}x^2$，圆 C_2：$x^2+(y-1)^2=1$，过点 P（t，0）（t>0）作不过原点 O 的直线 PA，PB 分别与抛物线 C_1 和圆 C_2 相切，A，B 为切点.

（Ⅰ）求点 A，B 的坐标；

（Ⅱ）求△PAB 的面积．
注：直线与抛物线有且只有一个公共点，且与抛物线的对称轴不平行，则称该直线与抛物线相切，称该公共点为切点．



考点：直线与圆锥曲线的综合问题．

专题：圆锥曲线中的最值与范围问题．

分析：（I）由直线 PA 的斜率存在，设切线 PA 的方程为：y=k（x﹣t）（k≠0），与抛物线方程联立化为 x^2﹣4kx+4kt=0，利用△=0，解得 k=t，可得 A 坐标．圆 C_2 的圆心 D（0，1），设 B（x_0，y_0），由题意可知：点 B 与 O 关于直线 PD 得出，可得$\begin{cases}\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0}{2t}+1\\ x_0t-y_0=0\end{cases}$，解得 B 坐标．

（II）由（I）可得：（t^2﹣1）x﹣2ty+2t=0，可得点 P 到直线 AB 的距离 d，又$|AB|=\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}-2t\right)^2+\left(\frac{2t^2}{1+t^2}-t^2\right)^2}$．即可得出 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\bullet d$．

解答：解：（I）由直线 PA 的斜率存在，设切线 PA 的方程为：y=k（x﹣t）（k≠0），

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2\\ y=k(x-t)\end{cases}$，

化为 x^2﹣4kx+4kt=0，

∵△=16k^2﹣16kt=0，解得 k=t，

∴x=2t，∴A（2t，t^2）．

圆 C_2 的圆心 D（0，1），设 B（x_0，y_0），由题意可知：点 B 与 O 关于直线 PD 得出，

∴$\begin{cases}\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0}{2t}+1\\ x_0t-y_0=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=\frac{2t}{1+t^2}\\ y_0=\frac{2t^2}{1+t^2}\end{cases}$．

∴B $\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{2t^2}{1+t^2}\right)$．

（II）由（I）可得：$k_{AB}=\dfrac{\dfrac{2t^2}{1+t^2}-t^2}{\dfrac{2t}{1+t^2}-2t}=\dfrac{t^2-1}{2t}$，直线 AB 的方程为：$y-t^2=\dfrac{t^2-1}{2t}(x-2t)$，化为 $(t^2-1)x-2ty+2t=0$，

∴点 P 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|(t^2-1)t+2t|}{\sqrt{(t^2-1)^2+(-2t)^2}}=\dfrac{t^3+t}{t^2+1}=t$，

又 $|AB|=\sqrt{\left(\dfrac{2t}{1+t^2}-2t\right)^2+\left(\dfrac{2t^2}{1+t^2}-t^2\right)^2}=t^2$.

∴$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}t^3$.

点评： 本小题主要考查抛物线、直线与抛物线及其圆的位置关系及其性质、垂直平分线的性质、点到直线的距离公式等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想，属于难题．

20．（15 分）（2015•浙江）设函数 $f(x)=x^2+ax+b$（a，b∈R）.

（Ⅰ）当 $b=\dfrac{a^2}{4}+1$ 时，求函数 f（x）在[－1，1]上的最小值 g（a）的表达式．

（Ⅱ）已知函数 f（x）在[－1，1]上存在零点，$0\le b-2a\le 1$，求 b 的取值范围．

考点： 二次函数的性质；函数零点的判定定理．

专题： 分类讨论；函数的性质及应用；不等式的解法及应用．

分析： （Ⅰ）求出二次函数的对称轴方程，讨论对称轴和区间[－1，1]的关系，运用函数的单调性即可得到最小值；

（Ⅱ）设 s，t 是方程 f（x）=0 的解，且 $-1\le t\le 1$，运用韦达定理和已知条件，得到 s 的不等式，讨论 t 的范围，得到 st 的范围，由分式函数的值域，即可得到所求 b 的范围．

解答： 解：（Ⅰ）当 $b=\dfrac{a^2}{4}+1$ 时，$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+1$，对称轴为 $x=-\dfrac{a}{2}$，

当 $a\le -2$ 时，函数 f（x）在[－1，1]上递减，则 $g(a)=f(1)=\dfrac{a^2}{4}+a+2$；

当 $-2<a\le 2$ 时，即有 $-1\le -\dfrac{a}{2}<1$，则 $g(a)=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=1$；

当 $a>2$ 时，函数 f（x）在[－1，1]上递增，则 $g(a)=f(-1)=\dfrac{a^2}{4}-a+2$.

综上可得，g（a）=$\begin{cases}\frac{a^2}{4}+a+2, & a\leqslant -2\\ 1, & -2<a\leqslant 2\\ \frac{a^2}{4}-a+2, & a>2\end{cases}$；

（Ⅱ）设 s，t 是方程 f（x）=0 的解，且 - 1≤t≤1，

则$\begin{cases}s+t=-a\\ st=b\end{cases}$，

由于 0≤b - 2a≤1，

由此$\frac{-2t}{2+t}\leq s\leq\frac{1-2t}{2+t}$（ - 1≤t≤1），

当 0≤t≤1 时，$\frac{-2t^2}{t+2}\leq st\leq\frac{t-2t^2}{t+2}$，

由 $-\frac{2}{3}\leq\frac{2t}{t+2}\leq 0$，得 $-\frac{1}{3}\leq\frac{t-2t^2}{t+2}\leq 9-4\sqrt{5}$，

所以 $-\frac{2}{3}\leq b\leq 9-4\sqrt{5}$；

当 - 1≤t＜0 时，$\frac{t-2t^2}{t+2}\leq st\leq\frac{-2t^2}{t+2}$，

由于 $-2\leq\frac{-2t^2}{t+2}<0$ 和 $-3\leq\frac{t-2t^2}{t+2}<0$，所以 - 3≤b＜0，

故 b 的取值范围是$[-3，9-4\sqrt{5}]$.

点评： 本题考查二次函数在闭区间上的最值的求法，同时考查二次方程和函数的零点的关系，以及韦达定理的运用，考查不等式的性质和分式函数的最值的求法，属于中档题.