2009年全国统一高考数学试卷（文科）（全国卷Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）已知全集U={1，2，3，4，5，6，7，8}，M={1，3，5，7}，N={5，6，7}，则C_U（M∪N）=（　　）

A．{5，7}　　B．{2，4}　　C．{2，4，8}　　D．{1，3，5，6，7}

【考点】1H：交、并、补集的混合运算．

【专题】11：计算题．

【分析】先求集合M∪N，后求它的补集即可，注意全集的范围．

【解答】解：∵M={1，3，5，7}，N={5，6，7}，

∴M∪N={1，3，5，6，7}，

∵U={1，2，3，4，5，6，7，8}，

∴C_U（M∪N）={2，4，8}

故选：C．

【点评】本题考查集合运算能力，本题是比较常规的集合题，属于基础题．

2．（5分）函数$y=\sqrt{-x}$（x≤0）的反函数是（　　）

A．$y=x^2$（x≥0）　B．$y=-x^2$（x≥0）　C．$y=x^2$（x≤0）　D．$y=-x^2$（x≤0）

【考点】4R：反函数．

【专题】11：计算题．

【分析】直接利用反函数的定义，求出函数的反函数，注意函数的定义域和函数的值域．

【解答】解：由原函数定义域x≤0可知A、C错，

原函数的值域 y≥0可知D错，

故选：B．

【点评】本题考查反函数的求法，反函数概念，考查逻辑推理能力，是基础题．

3．（5分）函数$y=\log_2\frac{2-x}{2+x}$的图象（　　）

A．关于直线y=﹣x对称　　B．关于原点对称

C．关于y轴对称　　D．关于直线y=x对称

【考点】3K：函数奇偶性的性质与判断；3M：奇偶函数图象的对称性．

【专题】31：数形结合．

【分析】先看函数的定义域，再看f（﹣x）与f（x）的关系，判断出此函数是个奇函数，所以，图象关于原点对称．

【解答】解：由于定义域为（﹣2，2）关于原点对称，

又$f(-x)=\log_2\frac{2+x}{2-x}=-\log_2\frac{2-x}{2+x}=-f(x)$，故函数为奇函数，

图象关于原点对称，

故选：B．

【点评】本题考查函数奇偶性的判断以及利用函数的奇偶性判断函数图象的对称性．

4．（5分）已知△ABC中，$\cot A=-\frac{12}{5}$，则cosA=（　　）

A．$\frac{12}{13}$　　B．$\frac{5}{13}$　　C．$-\frac{5}{13}$　　D．$-\frac{12}{13}$

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系．

【专题】11：计算题．

【分析】利用同角三角函数的基本关系cosA转化成正弦和余弦，求得sinA和cosA的关系式，进而与$\sin^2A+\cos^2A=1$联立方程求得cosA的值．

【解答】解：$\because \cot A=-\frac{12}{5}$

∴A为钝角，cosA＜0排除A和B，

再由$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=-\frac{12}{5}$，和$\sin^2A+\cos^2A=1$求得$\cos A=-\frac{12}{13}$，

故选：D．

【点评】本题考查同角三角函数基本关系的运用．主要是利用了同角三角函数中的平方关系和商数关系．

5．（5分）已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2AB$，E为AA_1中点，则异面直线BE与CD_1所形成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{3}{5}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角．

【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5G：空间角．

【分析】由$BA_1\parallel CD_1$，知$\angle A_1BE$是异面直线BE与CD_1所形成角，由此能求出异面直线BE与CD_1所形成角的余弦值．

【解答】解：∵正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2AB$，E为AA_1中点，

∴$BA_1\parallel CD_1$，∴$\angle A_1BE$是异面直线BE与CD_1所形成角，

设$AA_1=2AB=2$，

则$A_1E=1$，$BE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$A_1B=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

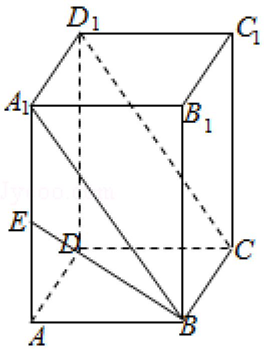
∴$\cos\angle A_1BE=\frac{A_1B^2+BE^2-A_1E^2}{2\cdot A_1B\cdot BE}$

$=\frac{5+2-1}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

∴异面直线BE与CD_1所形成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

故选：C．



【点评】本题考查异面直线所成角的余弦值的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意空间思维能力的培养．

6．（5分）已知向量$\vec{a}$=（2，1），$\vec{a}\cdot\vec{b}$=10，$|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}$，则$|\vec{b}|$=（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．5　　D．25

【考点】91：向量的概念与向量的模；9O：平面向量数量积的性质及其运算．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】根据所给的向量的数量积和模长，对$|a+b|=5\sqrt{2}$两边平方，变化为有模长和数量积的形式，代入所给的条件，等式变为关于要求向量的模长的方程，解方程即可．

【解答】解：∵$|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}$，$|\vec{a}|=\sqrt{5}$

∴$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=50$，

得$|\vec{b}|=5$

故选：C．

【点评】本题考查平面向量数量积运算和性质，根据所给的向量表示出要求模的向量，用求模长的公式写出关于变量的方程，解方程即可，解题过程中注意对于变量的应用．

7．（5分）设a=lge，b=（lge）^{2}，c=lg$\sqrt{e}$，则（　　）

A．a＞b＞c　　B．c＞a＞b　　C．a＞c＞b　　D．c＞b＞a

【考点】4M：对数值大小的比较；4O：对数函数的单调性与特殊点．

【分析】因为10＞1，所以y=lgx单调递增，又因为1＜e＜10，所以0＜lge＜1，即可得到答案．

【解答】解：∵$1<e<3<\sqrt{10}$，

∴0＜lge＜1，∴$\lg e>\frac{1}{2}\lg e>(\lg e)^2$．

∴a＞c＞b．

故选：C．

【点评】本题主要考查对数的单调性．即底数大于1时单调递增，底数大于0小于1时单调递减．

8．（5分）双曲线$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$的渐近线与圆$(x-3)^2+y^2=r^2$（r＞0）相切，则r=（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．3　　D．6

【考点】IT：点到直线的距离公式；KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题．

【分析】求出渐近线方程，再求出圆心到渐近线的距离，根据此距离和圆的半径相等，求出r．

【解答】解：双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$，即$x\pm\sqrt{2}y=0$，

圆心（3，0）到直线的距离$d=\frac{|3|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}}=\sqrt{3}$，

∴$r=\sqrt{3}$．

故选：A．

【点评】本题考查双曲线的性质、点到直线的距离公式．

9．（5分）若将函数$y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{4})$（ω＞0）的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，与函数$y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{6})$的图象重合，则ω的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

【考点】HJ：函数y=Asin（ωx+φ）的图象变换．

【专题】11：计算题．

【分析】根据图象的平移求出平移后的函数解析式，与函数$y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{6})$的图象重合，比较系数，求出$\omega=6k+\frac{1}{2}$（k∈Z），然后求出ω的最小值．

【解答】解：$y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{4})$，向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位可得：$y=\tan[\omega(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{4}]=\tan(\omega x+\frac{\pi}{6})$

$\therefore \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\omega+k\pi=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \omega=k+\frac{1}{2}$（k∈Z），

又∵ω＞0

$\therefore \omega_{min}=\frac{1}{2}$.

故选：D．

【点评】本题是基础题，考查三角函数的图象的平移，待定系数法的应用，考查计算能力，是常考题．

10．（5分）甲、乙两人从4门课程中各选修2门，则甲、乙所选的课程中恰有1门相同的选法有（　　）

A．6种　　B．12种　　C．24种　　D．30种

【考点】D5：组合及组合数公式．

【专题】11：计算题．

【分析】根据题意，分两步，①先求所有两人各选修2门的种数，②再求两人所选两门都相同与都不同的种数，进而由事件间的相互关系，分析可得答案．

【解答】解：根据题意，分两步，

①由题意可得，所有两人各选修2门的种数$C_4^2C_4^2=36$，

②两人所选两门都相同的有为$C_4^2=6$种，都不同的种数为$C_4^2=6$，

故选：C．

【点评】本题考查组合公式的运用，解题时注意事件之间的关系，选用直接法或间接法．

11．（5分）已知直线y=k（x+2）（k＞0）与抛物线C：$y^2=8x$相交于A、B两点，F为C的焦点，若|FA|=2|FB|，则k=（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【考点】K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】根据直线方程可知直线恒过定点，如图过A、B分别作AM⊥l于M，BN⊥l于N，根据|FA|=2|FB|，推断出|AM|=2|BN|，点B为AP的中点、连接OB，进而可知$|OB|=\frac{1}{2}|AF|$，进而推断出|OB|=|BF|，进而求得点B的横坐标，则点B的坐标可得，最后利用直线上的两点求得直线的斜率．

【解答】解：设抛物线C：$y^2=8x$的准线为l：x=﹣2

直线y=k（x+2）（k＞0）恒过定点P（﹣2，0）

如图过A、B分别作AM⊥l于M，BN⊥l于N，

由|FA|=2|FB|，则|AM|=2|BN|，

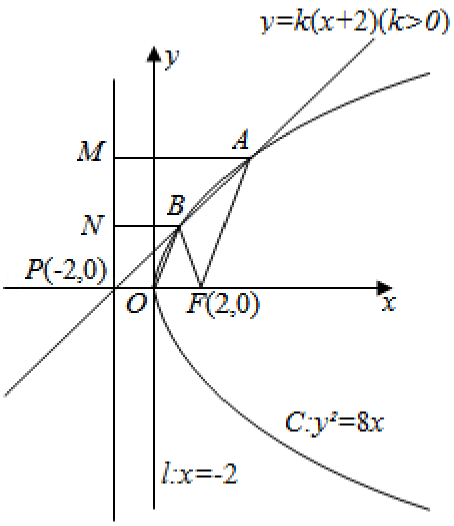
点B为AP的中点、连接OB，

则$|OB|=\frac{1}{2}|AF|$，

∴|OB|=|BF|，点B的横坐标为1，

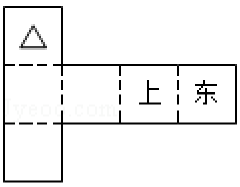
故点B的坐标为$(1,2\sqrt{2})$$\therefore k=\frac{2\sqrt{2}-0}{1-(-2)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故选：D．



【点评】本题主要考查了抛物线的简单性质．考查了对抛物线的基础知识的灵活运用．

12．（5分）纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北．现在沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平，得到如图所示的平面图形，则标“△”的面的方位（　　）



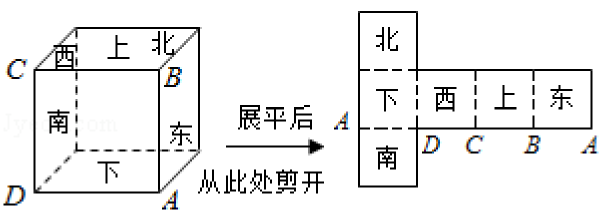
A．南　　　　B．北　　　　C．西　　　　D．下

【考点】LC：空间几何体的直观图．

【专题】16：压轴题．

【分析】本题考查多面体展开图；正方体的展开图有多种形式，结合题目，首先满足上和东所在正方体的方位，“△”的面就好确定．

【解答】解：如图所示．



故选B

【点评】本题主要考查多面体的展开图的复原，属于基本知识基本能力的考查

.

二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

13．（5分）设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$a_1=1$，$S_6=4S_3$，则$a_4=$__3__．

【考点】87：等比数列的性质；89：等比数列的前n项和．

【专题】11：计算题．

【分析】根据$S_6=4S_3$可求得q^3，进而根据等比数列的通项公式，得到答案．

【解答】解：设等比数列的公比为q，则由$S_6=4S_3$知$q\neq 1$，

$\therefore S_6=\frac{1-q^6}{1-q}=\frac{4(1-q^3)}{1-q}$.

$\therefore q^3=3$．$\therefore a_1q^3=3$．

故答案为：3

【点评】本题主要考查了等比数列的求和问题．属基础题．

14．（5分）$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$的展开式中x^3y^3的系数为__6__．

【考点】DA：二项式定理．

【分析】先化简代数式，再利用二项展开式的通项公式求出第r+1项，令x，y的指数都为1求出x^3y^3的系数

【解答】解：$(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4=x^2y^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$，

只需求$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$展开式中的含xy项的系数．

$\because (\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^r(\sqrt{x})^{4-r}(-\sqrt{y})^r$

令$\begin{cases}4-r=2\\ r=2\end{cases}$得r=2

$\therefore$展开式中x^3y^3的系数为$C_4^2=6$

故答案为6．

【点评】本题考查二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工

具．

15．（5分）已知圆O：$x^2+y^2=5$和点A（1，2），则过A且与圆O相切的直线与两坐标轴围成的三角形的面积=__$\frac{25}{4}$__．

【考点】J7：圆的切线方程．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】判断点A在圆上，用点斜式写出切线方程，求出切线在坐标轴上的截距，从而求出直线与两坐标轴围成的三角形的面积．

【解答】解：由题意知，点A在圆上，切线斜率为$\frac{-1}{K_{OA}}=\frac{-1}{\frac{2}{1}}=-\frac{1}{2}$，

用点斜式可直接求出切线方程为：$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$，

即$x+2y-5=0$，从而求出在两坐标轴上的截距分别是5和$\frac{5}{2}$，

所以，所求面积为$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{4}$．

【点评】本题考查求圆的切线方程的方法，以及求直线与坐标轴围成的三角形的面积．

16．（5分）设OA是球O的半径，M是OA的中点，过M且与OA成45°角的平面截球O的表面得到圆C．若圆C的面积等于$\frac{7\pi}{4}$，则球O的表面积等于__8π__．

【考点】LG：球的体积和表面积．

【专题】11：计算题；16：压轴题．

【分析】本题可以设出球和圆的半径，利用题目的关系，求解出具体的值，即可得到答案．

【解答】解：设球半径为R，圆C的半径为r，

由$\pi r^2=\frac{7\pi}{4}$，得$r^2=\frac{7}{4}$．

因为$OC=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}R$．

由$R^2=(\frac{\sqrt{2}}{4}R)^2+r^2=\frac{1}{8}R^2+\frac{7}{4}$得$R^2=2$

故球O的表面积等于8π

故答案为：8π，

【点评】本题考查学生对空间想象能力，以及球的面积体积公式的利用，是基础题．

三、解答题（共6小题，满分70分）

17．（10分）已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3a_7=-16$，$a_4+a_6=0$，求$\{a_n\}$前n项和s_n．

【考点】84：等差数列的通项公式；85：等差数列的前n项和．

【专题】34：方程思想．

【分析】利用等差数列的通项公式，结合已知条件列出关于a_1，d的方程组，求出a_1、d，进而代入等差数列的前n项和公式求解即可．

【解答】解：设$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}(a_1+2d)(a_1+6d)=-16\\ a_1+3d+a_1+5d=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}a_1^2+8da_1+12d^2=-16\\ a_1=-4d\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a_1=-8\\ d=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=8\\ d=-2\end{cases}$，

因此$S_n=-8n+n(n-1)=n(n-9)$，或$S_n=8n-n(n-1)=-n(n-9)$．

【点评】本题考查等差数列的通项公式及求和公式运用能力，利用方程的思想可求解．

18．（12分）设△ABC的内角A、B、C的对边长分别为a、b、c，$\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$，$b^2=ac$，求B．

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系；HP：正弦定理．

【专题】11：计算题．

【分析】本题考查三角函数化简及解三角形的能力，关键是注意角的范围对角

的三角函数值的制约，并利用正弦定理得到$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$（负值舍掉），从而求出答案．

【解答】解：由$\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$及$B=\pi-(A+C)$得

$\cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{2}$，

$\therefore \cos A\cos C+\sin A\sin C-(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=\frac{3}{2}$，

$\therefore \sin A\sin C=\frac{3}{4}$．

又由$b^2=ac$及正弦定理得$\sin^2B=\sin A\sin C$，

故$\sin^2B=\frac{3}{4}$，

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$（舍去），

于是$B=\frac{\pi}{3}$或$B=\frac{2\pi}{3}$．

又由$b^2=ac$

知$b\leq a$或$b\leq c$

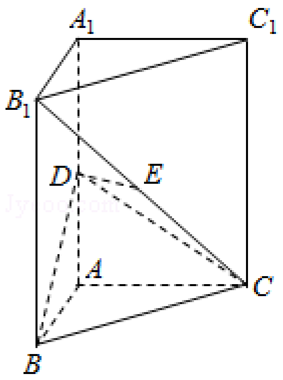
所以$B=\frac{\pi}{3}$．

【点评】三角函数给值求值问题的关键就是分析已知角与未知角的关系，然后通过角的关系，选择恰当的公式，即：如果角与角相等，则使用同角三角函数关系；如果角与角之间的和或差是直角的整数倍，则使用诱导公式；如果角与角之间存在和差关系，则我们用和差角公式；如果角与角存在倍数关系，则使用倍角公式．

19．（12分）如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，D、E分别为AA_1、B_1C的中点，$DE\perp$平面BCC_1．

（Ⅰ）证明：$AB=AC$；

（Ⅱ）设二面角$A-BD-C$为60°，求B_1C与平面BCD所成的角的大小．



【考点】LQ：平面与平面之间的位置关系．

【专题】11：计算题；14：证明题．

【分析】（1）连接BE，可根据射影相等的两条斜线段相等证得BD=DC，再根据相等的斜线段的射影相等得到AB=AC；

（2）求B_1C与平面BCD所成的线面角，只需求点B_1到面BDC的距离即可，作AG⊥BD于G，连GC，∠AGC为二面角A﹣BD﹣C的平面角，在三角形AGC中求出GC即可．

【解答】解：如图

（I）连接BE，∵ABC﹣$A_1B_1C_1$为直三棱柱，

∴$\angle B_1BC=90°$，

∵E为B_1C的中点，∴BE=EC．

又DE⊥平面BCC_1，

∴BD=DC（射影相等的两条斜线段相等）而DA⊥平面ABC，

∴AB=AC（相等的斜线段的射影相等）．

（II）求B_1C与平面BCD所成的线面角，

只需求点B_1到面BDC的距离即可．

作AG⊥BD于G，连GC，

∵AB⊥AC，∴GC⊥BD，

∠AGC为二面角A﹣BD﹣C的平面角，∠AGC=60°

不妨设$AC=2\sqrt{3}$，则AG=2，GC=4

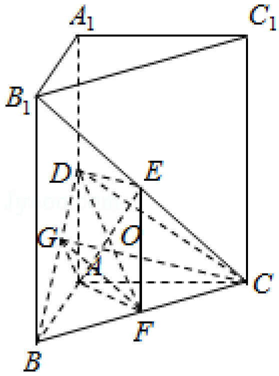
在RT△ABD中，由AD•AB=BD•AG，易得$AD=\sqrt{6}$

设点B_1到面BDC的距离为h，B_1C与平面BCD所成的角为α．

利用$\frac{1}{3}S_{\triangle B_1BC}\cdot DE=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h$，

可求得$h=2\sqrt{3}$，又可求得$B_1C=4\sqrt{3}$$\sin\alpha=\frac{h}{B_1C}=\frac{1}{2}$，$\therefore\alpha=30°$．

即B_1C与平面BCD所成的角为30°．



【点评】本题主要考查了平面与平面之间的位置关系，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题．

20．（12分）某车间甲组有10名工人，其中有4名女工人；乙组有10名工人，其中有6名女工人．现采用分层抽样（层内采用不放回简单随即抽样）从甲、乙两组中共抽取4名工人进行技术考核．

（1）求从甲、乙两组各抽取的人数；

（2）求从甲组抽取的工人中恰有1名女工人的概率；

（3）求抽取的4名工人中恰有2名男工人的概率．

【考点】B3：分层抽样方法；C6：等可能事件和等可能事件的概率．

【专题】11：计算题．

【分析】（1）根据分层抽样原理，要从甲、乙两组各10人中共抽取4名工人，则从每组各抽取2名工人．

（2）从甲组抽取2人的结果有C_{10}^2种，恰有1名女工人的结果有$C_4^1C_6^1$种，代入等可能事件的概率公式即可

（3）从甲乙各10人虫各抽2人的结果有$C_{10}^2C_{10}^2$种，而4名工人中恰有2名男工人的情况分①两名男工都来自甲，有$C_6^2C_6^2$②甲乙各抽1名男工$C_6^1C_4^1C_4^1C_6^1$③两名男工都来自乙有$C_4^2C_4^2$种结果

【解答】解：（1）由于甲、乙两组各有10名工人，根据分层抽样原理，要从甲

、乙两组中共抽取4名工人进行技术考核，则从每组各抽取2名工人．

（2）记A表示事件：从甲组抽取的工人中恰有1名女工人，则$P(A)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$

（3）A_i表示事件：从甲组抽取的2名工人中恰有i名男工人，i=0，1，2

Bj表示事件：从乙组抽取的2名工人中恰有j名男工人，j=0，1，2

B表示事件：抽取的4名工人中恰有2名男工人．

A_i与B_j独立，i，j=0，1，2，且$B=A_0\bullet B_2+A_1\bullet B_1+A_2\bullet B_0$

故P（B）=P（$A_0\bullet B_2+A_1\bullet B_1+A_2\bullet B_0$）=P（$A_0$）•P（$B_2$）+P（$A_1$）•P（$B_1$）+P（$A_2$）•P（$B_0$）

$$=\frac{C_6^2C_6^2+C_6^1C_4^1C_6^1C_4^1+\ C_4^2\ C_4^2}{C_{10}^2C_{10}^2}=\frac{31}{75}$$

【点评】本题考查概率统计知识，要求有正确理解分层抽样的方法及利用分类原理处理事件概率的能力，第一问直接利用分层统计原理即可得人数，第二问注意要用组合公式得出概率，第三问关键是理解清楚题意以及恰有2名男工人的具体含义，从而正确分类求概率．

21．（12分）设函数f（x）=$\frac{1}{3}x^3$ －（1+a）x^2+4ax+24a，其中常数a＞1，

（Ⅰ）讨论f（x）的单调性；

（Ⅱ）若当x≥0时，f（x）＞0恒成立，求a的取值范围．

【考点】3R：函数恒成立问题；6B：利用导数研究函数的单调性．

【专题】15：综合题；16：压轴题．

【分析】（1）先对函数进行求导，根据导函数大于0时原函数单调递增，导函数小于0时原函数单调递减可确定函数的单调性．

（2）先将问题转化为求函数在x≥0时的最小值问题，再结合（1）中的单调性可确定f（x）在x=2a或x=0处取得最小值，求出最小值，即可得到a的范围．

【解答】解：（1）f'（x）=x^2－2（1+a）x+4a=（x－2）（x－2a）

由a＞1知，当x＜2时，f'（x）＞0，

故f（x）在区间（－∞，2）是增函数；

当$2<x<2a$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$在区间$(2,2a)$是减函数；

当$x>2a$时，$f'(x)>0$，

故$f(x)$在区间$(2a,+\infty)$是增函数.

综上，当$a>1$时，$f(x)$在区间$(-\infty,2)$和$(2a,+\infty)$是增函数，

在区间$(2,2a)$是减函数.

（2）由（1）知，当$x\geq0$时，$f(x)$在$x=2a$或$x=0$处取得最小值.

$f(2a)=\frac{1}{3}(2a)^3-(1+a)(2a)^2+4a\cdot2a+24a=-\frac{4}{3}a^3+4a^2+24a$，$f(0)=24a$

由假设知$\begin{cases}a>1\\f(2a)>0\\f(0)>0\end{cases}$

即$\begin{cases}a>1\\-\frac{4}{3}a(a+3)(a-6)>0\\24a>0.\end{cases}$解得$1<a<6$

故a的取值范围是$(1,6)$

【点评】本题考查导数与函数的综合运用能力，涉及利用导数讨论函数的单调性.

22.（12分）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点F的直线l与C相交于A、B两点，当l的斜率为1时，坐标原点O到l的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

（Ⅰ）求a，b的值；

（Ⅱ）C上是否存在点P，使得当l绕F转到某一位置时，有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立？若存在，求出所有的P的坐标与l的方程；若不存在，说明理由.

【考点】K4：椭圆的性质.

【专题】15：综合题；16：压轴题.

【分析】（I）设F（c，0），则直线l的方程为$x-y-c=0$，由坐标原点O到l的距

离求得c，进而根据离心率求得a和b．

（II）由（I）可得椭圆的方程，设A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2），l：x=my+1代入椭圆的方程中整理得方程△＞0．由韦达定理可求得y_1+y_2和y_1y_2的表达式，假设存在点P，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立，则其充要条件为：点P的坐标为（$x_1+x_2$，$y_1+y_2$），代入椭圆方程；把A，B两点代入椭圆方程，最后联立方程求得c，进而求得P点坐标，求出m的值得出直线l的方程．

【解答】解：（I）设F（c，0），直线l：x﹣y﹣c=0，

由坐标原点O到l的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

则$\frac{|0-0-c|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得c=1

又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$

（II）由（I）知椭圆的方程为C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

设A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2）

由题意知l的斜率为一定不为0，故不妨设l：x=my+1

代入椭圆的方程中整理得（$2m^2+3$）$y^2+4my-4=0$，显然△＞0．

由韦达定理有：$y_1+y_2=-\frac{4m}{2m^2+3}$，$y_1y_2=-\frac{4}{2m^2+3}$，①

假设存在点P，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立，则其充要条件为：

点P的坐标为（x_1+x_2，y_1+y_2），

点P在椭圆上，即$\frac{(x_1+x_2)^2}{3}+\frac{(y_1+y_2)^2}{2}=1$．

整理得$2x_1^2+3y_1^2+2x_2^2+3y_2^2+4x_1x_2+6y_1y_2=6$．

又A、B在椭圆上，即$2x_1^2+3y_1^2=6$，$2x_2^2+3y_2^2=6$、

故$2x_1x_2+3y_1y_2+3=0$②

将$x_1x_2=(my_1+1)(my_2+1)=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1$及①代入②解得$m^2=\frac{1}{2}$

$\therefore y_1+y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$x_1+x_2=-\frac{4m^2}{2m^2+3}+2=\frac{3}{2}$，即$P(\frac{3}{2}，\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

当 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$P(\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$，l：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$；

当 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$P(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2})$，l：$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$

【点评】本题主要考查了椭圆的性质．处理解析几何题，学生主要是在“算”上的功夫不够．所谓“算”，主要讲的是算理和算法．算法是解决问题采用的计算的方法，而算理是采用这种算法的依据和原因，一个是表，一个是里，一个是现象，一个是本质．有时候算理和算法并不是截然区分的．例如：三角形的面积是用底乘高的一半还是用两边与夹角的正弦的一半，还是分割成几部分来算？在具体处理的时候，要根据具体问题及题意边做边调整，寻找合适的突破口和切入点．