1996年黑龙江高考文科数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题共65分）

注意事项：

1．答案Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，在选涂其它答案，不能答在试题卷上．

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回．

一．选择题：本大题共15小题；第1—10题每小题4分，第11—15题每小题5分，共65分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，集合 $A=\{1,3,5,7\},B=\{3,5\}$．则

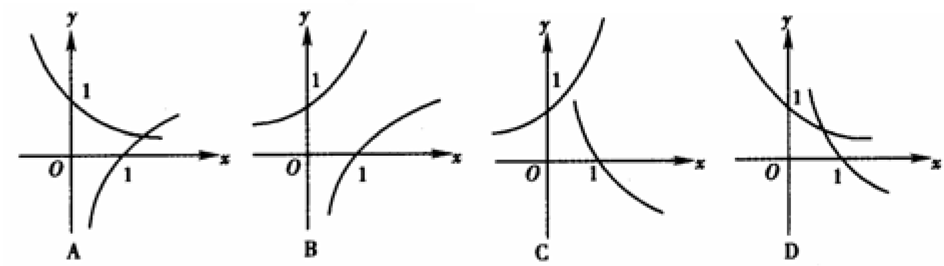
A．$I=A\cup B$　　B．$I=\overline{A}\cup B$　　C．$I=A\cup\overline{B}$　　D．$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

【答案】C

【解析】显然C正确．

支点物理 曹亚辉高中物理 www.zhidianwuli.com

2．当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图像



【答案】A

【解析】当 $a>1$ 时，函数 $y=a^{-x}$ 是减函数，且过点 $(0,1)$；而函数 $y=\log_a x$ 为增函数，且过点 $(1,0)$．

3．若 $\sin^2 x>\cos^2 x$，则 x 的取值范围是

A. $\left\{x \middle| 2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x \middle| 2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x \middle| k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{1}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x \middle| k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

【答案】D

【解析】$\sin^2 x>\cos^2 x\Rightarrow\sin^2 x>\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$ 或 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$，即 $(2k-1)\pi+\frac{\pi}{4}<x<(2k-1)\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$，所以 x 的取值范围是 $\left\{x \middle| k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

曹亚辉高中物理 www.zhidianwuli.com 支点物理

4. 复数 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$ 等于

A. $1+\sqrt{3}i$　　B. $-1+\sqrt{3}i$　　C. $1-\sqrt{3}i$　　D. $-1-\sqrt{3}i$

【答案】B

【解析】$\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}=\frac{2^4(1+i)^4}{2^5(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5}=\frac{(2i)^2}{2(-\omega)^5}=-1+\sqrt{3}i$.

5. 6 名同学排成一排，其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法有

A. 720 种　　B. 360 种　　C. 240 种　　D. 120 种

【答案】C

【解析】将甲、乙两人捆绑在一起，不同的排法有 $A_5^5A_2^2=240$.

6. 已知 α 是第三象限角且 $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$-\dfrac{3}{4}$　　D．$-\dfrac{4}{3}$

【答案】D

【解析】由已知得$\cos\alpha=-\dfrac{7}{25}$，所以$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{1-(-\dfrac{7}{25})}{-\dfrac{24}{25}}=-\dfrac{4}{3}$．

7．如果直线l,m与平面α,β,γ满足：$l=\beta\cap\gamma,l//\alpha,m\subset\alpha$和$m\perp\gamma$，那么必有

A．$\alpha\perp\gamma$且$l\perp m$　B．$\alpha\perp\gamma$且$m//\beta$　C．$m//\beta$且$l\perp m$　D．$\alpha//\beta$且$\alpha\perp\gamma$

【答案】A

【解析】略.

8．当$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的

A．最大值是1，最小值是-1　　B．最大值是1，最小值是$-\dfrac{1}{2}$

C．最大值是2，最小值是-2　　D．最大值是2，最小值是-1

【答案】D

【解析】因为$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$，由已知$-\dfrac{\pi}{6}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5\pi}{6}$．故当$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{6}$时，$f(x)$有最大值是2；当$x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}$，即$x=-\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)$有最小值是$-1$.

9．中心在原点，准线方程为$x=\pm4$，离心率为$\dfrac{1}{2}$的椭圆方程是

A．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　　　D．$x^2+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】A

【解析】由题设可得$\frac{a^2}{c}=4,\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，解得$a=2,c=1$，所以椭圆方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

10．圆锥母线长为1，侧面展开图圆心角为$240°$，该圆锥的体积是

A．$\frac{2\sqrt{2}\pi}{81}$　　B．$\frac{8\pi}{81}$　　C．$\frac{4\sqrt{5}\pi}{81}$　　D．$\frac{10\pi}{81}$

【答案】C

【解析】设圆锥底面半径为r，则$\frac{2\pi r}{1}=\frac{240°}{360°}\times 2\pi$，得$r=\frac{2}{3}$，则圆锥高为$\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

圆锥的体积是$\frac{1}{3}\pi(\frac{2}{3})^2\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}\pi}{81}$.

11．椭圆$25x^2-150x+9y^2+18y+9=0$的两个焦点坐标是

A．$(-3,5),(-3,-3)$　　B．$(3,3),(3,-5)$

C．$(1,1),(-7,1)$　　D．$(7,-1),(-1,-1)$

【答案】B

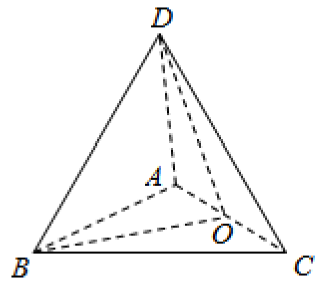
【解析】椭圆的标准方程为$\frac{(y+1)^2}{5^2}+\frac{(x-3)^2}{3^2}=1$，而$\frac{y^2}{5^2}+\frac{x^2}{3^2}=1$的焦点为$(0,\pm 4)$，所以$\frac{(y+1)^2}{5^2}+\frac{(x-3)^2}{3^2}=1$的焦点坐标是$(3,3),(3,-5)$.

12．将边长为a的正方形$ABCD$沿对角线AC折起，使得$BD=a$，则三棱锥$D-ABC$的

体积为

A．$\dfrac{a^3}{6}$　　B．$\dfrac{a^3}{12}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

【答案】D



【解析】取 AC 的中点 O，连接 BO,DO，如图所示．

$\Delta ABC,\Delta ADC$ 均为等腰直角三角形，$BO=DO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$，

$\therefore \angle BOD=\dfrac{\pi}{2}$，则 $DO\perp$ 面 ABC，DO 就是三棱锥 $D-ABC$

的高，所以 $V_{D-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}a}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$．

13．等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为

A．130　　B．170　　C．210　　D．260

【答案】C

【解析】由已知得 $S_m=30,S_{2m}=100$，则 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 成等差数列，所以

$S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=210$．

14．设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$ 的半焦距为 c，直线 l 过 $(a,0),(0,b)$ 两点．已知原点

到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】直线 l 的方程为 $bx+ay-ab=0$，原点到直线 l 的距离为 $\dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，则

$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3}{16}c^2$，即 $\dfrac{a^2(c^2-a)^2}{c^2}=\dfrac{3}{16}c^2$，解得 $e=2$ 或 $e=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，又 $0<a<b$，所以

$e=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}>\sqrt{2}$，所以$e=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$不合题意．

15． $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0\le x\le 1$时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 等于

A．0.5　　B．-0.5　　C．1.5　　D．-1.5

【答案】B

【解析】$f(7.5)=f(5.5+2)=-f(5.5)=-[-f(3.5)]=f(3.5)=-f(1.5)=-[-f(-0.5)]$ $=-f(0.5)=-0.5$．

第Ⅱ卷（非选择题共 85 分）

注意事项：

1．第Ⅱ卷共 6 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中．

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚．

二．填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

16．已知点$(-2,3)$与抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的距离是 5，则$p=$________．

【答案】4

【解析】由已知得$\sqrt{(\dfrac{p}{2}+2)^2+3^2}=5$，解得$p=4$．

17．正六边形的中心和顶点共 7 个点，以其中 3 个点为顶点的三角形共有________个．（用数字作答）

【答案】32

【解析】从 7 个点中取 3 个点有C_7^3种取法，3 个点共线的有 3 种，三角形共有$C_7^3-3=32$个．

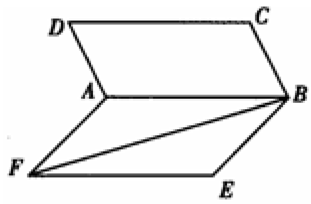
18．$\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ+\sqrt{3}\mathrm{tg}20^\circ\mathrm{tg}40^\circ$ 的值是________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\because \mathrm{tg}(20^\circ+40^\circ)=\dfrac{\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ}{1-\mathrm{tg}20^\circ\mathrm{tg}40^\circ}=\sqrt{3}$，$\therefore \mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ=\sqrt{3}(1-\mathrm{tg}20^\circ\mathrm{tg}40^\circ)$，

$\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ+\sqrt{3}\mathrm{tg}20^\circ\mathrm{tg}40^\circ=\sqrt{3}$.

19．如图，正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面成 60° 的二面角，则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是________.



【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】由于 $AD // BC$，所以 $\angle CBF$ 即为异面直线 AD 与 BF 所成角，设正方形边长为 a，在 ΔCBF 中，$BF=\sqrt{2}a, BC=a, FC=\sqrt{FD^2+CD^2}=$

$\sqrt{AD^2+FA^2-2AD\cdot FA\cos 60^\circ+CD^2}=\sqrt{2}a$，$\cos\angle CBF=\dfrac{BF^2+BC^2-FC^2}{2BF\cdot BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

三．解答题：本大题共 6 小题；共 69 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

20．（本小题满分 11 分）

解不等式 $\log_a(x+1-a)>1$.

【解】本小题考查对数函数性质，对数不等式的解法，分类讨论的方法和运算能力，满分 11 分．

（Ⅰ）$a>1$ 时，原不等式等价于不等式组：$\begin{cases} x+1-a>0, \\ x+1-a>a. \end{cases}$ ——2 分

解得 $x>2a-1$. ——5 分

（Ⅱ）当 $0<a<1$ 时，原不等式等价于不等式组：$\begin{cases} x+1-a>0, \\ x+1-a<a. \end{cases}$ ——7 分

解得 $a-1<x<2a-1$. 10 分

综上，当$a>1$时，不等式的解集为$\left\{x\middle|x>2a-1\right\}$；

当$0<a<1$时，不等式的解集为$\left\{x\middle|a-1<x<2a-1\right\}$.　　　　——11 分

21．（本小题满分 12 分）

设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$S_3+S_6=2S_9$，求数列的公比q．

【解】本小题主要考查等比数列的基础知识，逻辑推理能力和运算能力．满分 12 分．

若$q=1$，则有$S_3=3a_1,S_6=6a_1,S_9=9a_1$．但$a_1\neq 0$，

即得$S_3+S_6\neq 2S_9$，与题设矛盾，故$q\neq 1$．　　　　——2 分

又依题意$S_3+S_6=2S_9$可得$\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$.

整理得$q^3(2q^6-q^3-1)=0$.

由$q\neq 0$得方程$2q^6-q^3-1=0$．$(2q^3+1)(q^3-1)=0$，　　　　—— 9 分

$\because$　$q\neq 1,q^3\neq 1$，$\therefore 2q^3+1=0$，$\therefore q=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.　　　　——12 分

22．（本小题满分 11 分）

已知ΔABC的三个内角A,B,C满足：$A+C=2B,\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求$\cos\dfrac{A-C}{2}$的值.

解法一：由题设条件知$B=60^\circ,A+C=120^\circ$.　　　　——2 分

$\because \dfrac{-\sqrt{2}}{\cos 60^\circ}=-2\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$.

将上式化为$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$.

利用和差化积及积化和差公式，上式可化为

$2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$.　　　　——6 分

将$\cos\frac{A+C}{2}=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2},\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$代入上式得

$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C)$.

将$\cos(A-C)=2\cos^2(\frac{A-C}{2})-1$代入上式并整理得

$4\sqrt{2}\cos^2(\frac{A-C}{2})+2\cos(\frac{A-C}{2})-3\sqrt{2}=0$ ——9 分

$(2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3)=0$，

$\because 2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\neq 0$，$\therefore 2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}=0$.

从而得$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ——12 分

解法二：由题设条件知$B=60^{\circ},A+C=120^{\circ}$.

设$\alpha=\frac{A-C}{2}$，则$A-C=2\alpha$，可得$A=60^{\circ}+\alpha,C=60^{\circ}-\alpha$， ——3 分

所以$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos(60^{\circ}+\alpha)}+\frac{1}{\cos(60^{\circ}-\alpha)}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}.$$ ——7 分

依题设条件有$\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=\frac{-\sqrt{2}}{\cos B}$,

$\because \cos B=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=-2\sqrt{2}$.

整理得$4\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha-3\sqrt{2}=0,$ ——9 分

$(2\cos\alpha-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\alpha+3)=0$，

$\because 2\sqrt{2}\cos\alpha+3\neq 0$，$\therefore 2\cos\alpha-\sqrt{2}=0$.

从而得 $\cos\dfrac{A-C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　　　　　　　　　——11 分

23．（本小题满分 12 分）

【注意：本题的要求是，参照标号①的写法，在标号②、③、④、⑤的横线上填写适当步骤，完成（Ⅰ）证明的全过程；并解答（Ⅱ），如图 2.】

如图 1，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=\dfrac{AA_1}{3}=a$，E,F 分别是 BB_1,CC_1 上的点，且 $BE=a,CF=2a$．

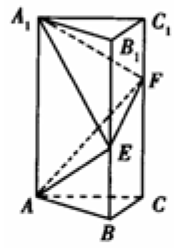


图 1

（Ⅰ）求证：面 $AEF\perp$ 面 ACF；

（Ⅱ）求三棱锥 A_1-AEF 的体积.

（Ⅰ）证明：　①$\because BE=a,CF=2a$，$BE//CF$，延长 FE 与 CB 延长线交于 D，连结 AD．

$\therefore \Delta DBE\sim\Delta DCF$，

$\therefore \dfrac{DB}{DC}=\dfrac{BE}{CF}$．

②____________________________________.

$\therefore DB=AB$．

③____________________________________.

$\therefore DA\perp AC$．

④____________________________________.

$\therefore FA\perp AD$．

⑤____________________________________.

$\therefore AEF\perp$ 面 ACF．

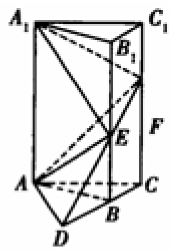


图 2

（Ⅱ）解：

【解】本小题考查空间线面关系，正三棱柱的性质，逻辑思维能力，空间想象能力及运算能力．满分 12 分.

（Ⅰ）②$\because BE:CF=1:2$，$\therefore DC=2DB$，$\therefore DB=BC$，　　　　——1 分

③$\because \Delta ABD$ 是等腰三角形，且 $\angle ABD=120°$，

$\therefore \angle BAD=30°$，$\therefore \angle CAD=90°$，　　　　—— 3 分

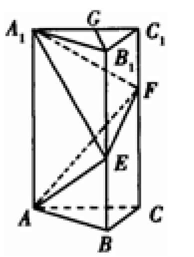
④$\because FC\perp$ 面 ACD，$\therefore CA$ 是 FA 在面 ACD 上的射影，

且 $CA\perp AD$，　　　　—— 5 分

⑤$\because FA\bigcap AC=A$，$DA\perp$ 面 ACF，$DA\subset$ 面 ADF，

$\therefore$面 $ADF\perp$ 面 ACF．　　　　7 分

（Ⅱ）$\because V_{A_1-AEF}=V_{E-AA_1F}$，



在面 $A_1B_1C_1$ 内作 $B_1G \perp A_1C_1$，垂足为 G． $B_1G = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$．

面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 A_1C，$\therefore B_1G \perp$ 面 A_1C，

$\because E \in BB_1$，而 $BB_1 //$ 面 A_1C，$\therefore$三棱柱 $E - AA_1F$ 的高为 $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$． ——9 分

$S_{\Delta A_1FA} = \dfrac{1}{2}AA_1 \cdot AC = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$． ——10 分

$\therefore V_{A_1-AEF} = V_{E-AA_1F} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$． ——12 分

24．（本小题满分 10 分）

某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%．如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷（精确到 1 公顷）？（粮食单产=$\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$，人均粮食占有量=$\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$）

【解】本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力，指数函数和二项式定理的应用，近似计算的方法和能力．满分 10 分．

设耕地平均每年至多只能减少 x 公顷，又设该地区现有人口为 P 人，粮食单产为 M 吨/公顷．

依题意得不等式 $\dfrac{M \times (1+22\%) \times (10^4 - 10x)}{P \times (1+1\%)^{10}} \geq \dfrac{M \times 10^4}{P} \times (1+10\%)$． ——5 分

化简得 $x \leq 10^3 \times [1 - \dfrac{1.1 \times (1+0.01)^{10}}{1.22}]$． ——7 分

$\because 10^3 \times [1 - \dfrac{1.1 \times (1+0.01)^{10}}{1.22}] = 10^3 \times [1 - \dfrac{1.1}{1.22} \times (1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 + \cdots)]$

$\approx 10^3 \times [1 - \dfrac{1.1}{1.22} \times 1.1045] \approx 4.1$． —— 9 分

$\therefore x \leq 4$（公顷）．

答：按规划该地区耕地平均每年至多只能减少 4 公顷． ——10 分

25．（本小题满分 12 分）

已知l_1,l_2是过点$P(-\sqrt{2},0)$的两条互相垂直的直线，且l_1,l_2与双曲线$y^2-x^2=1$各有两个交点，分别为A_1,B_1和A_2,B_2.

（Ⅰ）求l_1的斜率k_1的取值范围；

（Ⅱ）若A_1恰是双曲线的一个顶点，求$|A_2B_2|$的值.

【解】本小题主要考查直线与双曲线的性质，解析几何的基本思想，以及综合运用知识的能力．满分 12 分．

（Ⅰ）依题设，l_1,l_2的斜率都存在，因为l_1过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点，故方程

组$\begin{cases} y=k_1(x+\sqrt{2})(k_1\neq 0), \\ y^2-x^2=1. \end{cases}$ ① ——1 分

有两个不同的解．

在方程组①中消去y，整理得$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0$． ②

若$k_1^2-1=0$，则方程组①只有一个解，即l_1与双曲线只有一个交点，与题设矛盾，故

$k_1^2-1\neq 0$，即$|k_1|\neq 1$，方程②的判别式为

$\Delta_1=(2\sqrt{2}k_1^2)^2-4(k_1^2-1)(2k_1^2-1)=4(3k_1^2-1)$．

设l_2的斜率为k_2，因为l_2过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点，故方程组

$\begin{cases} y=k_2(x+\sqrt{2})(k_2\neq 0), \\ y^2-x^2=1. \end{cases}$ ③

有两个不同的解．在方程组③中消去y，整理得

$(k_2^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_2^2x+2k_2^2-1=0$． ④

同理有$k_2^2-1\neq 0,\Delta_2=4(3k_2^2-1)$．

又因为$l_1\perp l_2$，所以有$l_1\cdot l_2=-1$． ——4 分

于是，l_1,l_2 与双曲线各有两个交点，等价于$\begin{cases}3k_1^2-1>0,\\3k_2^2-1>0,\\k_1\cdot k_2=-1,\\|k_1|\neq 1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{3}<|k_1|<\sqrt{3},\\|k_1|\neq 1.\end{cases}$ ——6 分

$\therefore k_1\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)\cup(1,\sqrt{3})$． ——7 分

（Ⅱ）双曲线 $y^2-x^2=1$ 的顶点为 $(0,1),(0,-1)$．

取 $A_1(0,1)$ 时，有 $k_1(0+\sqrt{2})=1$，

解得 $k_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．从而 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\sqrt{2}$． ——8 分

将 $k_2=-\sqrt{2}$ 代入方程④得 $x^2+4\sqrt{2}x+3=0$． ⑤

记 l_2 与双曲线的两交点为 $A_2(x_1,y_1),B_2(x_2,y_2)$，则

$|A_2B_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y-y_2)^2=3(x_1-x_2)^2=3[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$．

由⑤知 $x_1+x_2)=-4\sqrt{2},x_1x_2=3$．

$\therefore |A_2B_2|^2=60,|A_2B_2|=2\sqrt{15}$． ——11 分

当取 $A_1(0,-1)$ 时，由双曲线 $y^2-x^2=1$ 关于 x 轴的对称性，知 $|A_2B_2|=2\sqrt{15}$．

所以 l_1 过双曲线的一个顶点时，$|A_2B_2|=2\sqrt{15}$． ——12 分