1993年北京高考理科数学真题及答案

一、选择题（共17小题，每小题4分，满分68分）

1. （4分）函数f（x）=sinx+cosx的最小正周期是（　　）

A. 2π　B. $2\sqrt{2}\pi$　C. π　D. $\frac{\pi}{4}$

2. （4分）如果双曲线的焦距为6，两条准线间的距离为4，那么该双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{3}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　D. 2

3. （4分）（2012•北京模拟）和直线3x－4y+5=0关于x轴对称的直线的方程为（　　）

A. 3x+4y－5=0　B. 3x+4y+5=0　C. －3x+4y－5=0　D. －3x+4y+5=0

4. （4分）极坐标方程$\rho=\frac{4}{3-5\cos\theta}$所表示的曲线是（　　）

A. 焦点到准线距离为$\frac{4}{5}$的椭圆

B. 焦点到准线距离为$\frac{4}{5}$的双曲线右支

C. 焦点到准线距离为$\frac{4}{3}$的椭圆

D. 焦点到准线距离为$\frac{4}{3}$的双曲线右支

5. （4分）$y=x^{\frac{3}{5}}$在[－1，1]上是（　　）

A. 增函数且是奇函数　B. 增函数且是偶函数

C. 减函数且是奇函数　D. 减函数且是偶函数

6. （4分）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-1}{2n^2-n+5}$的值为（　　）

A. $-\frac{1}{5}$　B. $-\frac{5}{2}$　C. $\frac{1}{5}$　D. $\frac{5}{2}$

7. （4分）（2002•广东）设集合M=$\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},\ k\in Z\}$，N=$\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},\ k\in Z\}$，则（　　）

A. M=N　B. M⊂N　C. M⊃N　D. M∩N=Φ

8. （4分）sin20°cos70°+sin10°sin50°的值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

9. （4分）参数方程$\begin{cases}x=\left|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right|\\ y=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)\end{cases}$（$0<\theta<2\pi$）表示（　　）

A. 双曲线的一支，这支过点$(1,\frac{1}{2})$

B. 抛物线的一部分，这部分过$(1,\frac{1}{2})$

C. 双曲线的一支，这支过点$(-1,\frac{1}{2})$

D. 抛物线的一部分，这部分过$(-1,\frac{1}{2})$

10. （4分）若a、b是任意实数，且a＞b，则（　　）

A. $a^2>b^2$　B. $\frac{b}{a}<1$　C. $\lg(a-b)>0$　D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

11. （4分）一动圆与两圆$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2-8x+12=0$都外切，则动圆圆心轨迹为（　　）

A. 圆　B. 椭圆　C. 双曲线的一支　D. 抛物线

12. （4分）圆柱轴截面的周长l为定值，那么圆柱体积的最大值是（　　）

A. $(\frac{l}{6})^3\pi$　B. $\frac{1}{9}(\frac{l}{2})^3\pi$　C. $(\frac{l}{4})^3\pi$　D. $2(\frac{l}{4})^3\pi$

13. （4分）$(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$展开式中x^4的系数为（　　）

A. －40　B. 10　C. 40　D. 45

14. （4分）直角梯形的一个内角为45°，下底长为上底长的$\frac{3}{2}$，这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为$(5+\sqrt{2})\pi$，则旋转体的体积为（　　）

A. 2π　B. $\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$　C. $\frac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$　D. $\frac{7}{3}\pi$

15. （4分）已知a_1，a_2，…，a_8为各项都大于零的等比数列，公式$q\neq1$，则（　　）

A. $a_1+a_8>a_4+a_5$

B. $a_1+a_8<a_4+a_5$

C. $a_1+a_8=a_4+a_5$

D. a_1+a_8和a_4+a_5的大小关系不能由已知条件确定

16. （4分）（2014•黄山一模）设有如下三个命题：

甲：相交直线l、m都在平面α内，并且都不在平面β内；

乙：直线l、m中至少有一条与平面β相交；

丙：平面α与平面β相交．

当甲成立时（　　）

A. 乙是丙的充分而不必要条件

B. 乙是丙的必要而不充分条件

C. 乙是丙的充分且必要条件

D. 乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

17. （4分）将数字1，2，3，4填入标号为1，2，3，4的四个方格里，每格填一个数字，则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有（　　）

A. 6种　　B. 9种　　C. 11种　　D. 23种

二、填空题（共6小题，每小题4分，满分24分）

18. （4分）$\sin\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)$ =______.

19. （4分）若双曲线$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$与圆$x^2+y^2=1$没有公共点，则实数k的取值范围为______.

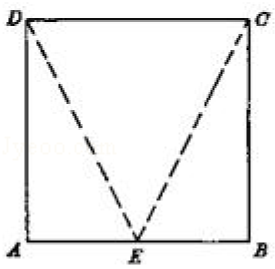
20. （4分）从1，2，…，10这十个数中取出四个数，使它们的和为奇数，共有______种取法（用数字作答）.

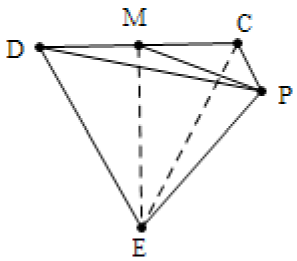
21. （4分）设$f(x)=4^x-2^{x+1}$，则$f^{-1}(0)$=______.

22. （4分）建造一个容积为$8m^3$，深为2m的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元，则水池的最低造价为

______.

23. （4分）如图，ABCD是正方形，E是AB的中点，如将△DAE和△CBE分别沿虚线DE和CE折起，使AE与BE重合，记A与B重合后的点为P，则面PCD与面ECD所成的二面角为______度.





三、解答题（共5小题，满分58分）

24. （10分）已知$f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$（a＞0，a≠1）.

（1）求f（x）的定义域；

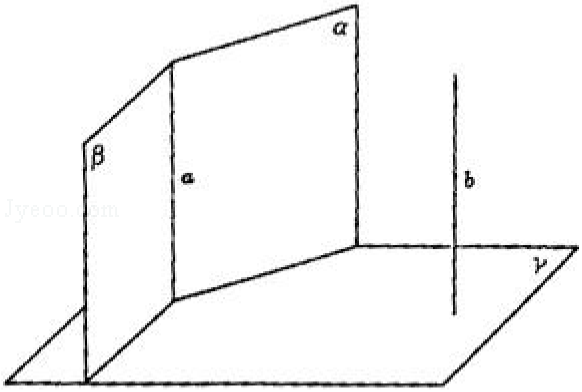
（2）判断f（x）的奇偶性并予以证明；

（3）求使f（x）＞0的x取值范围.

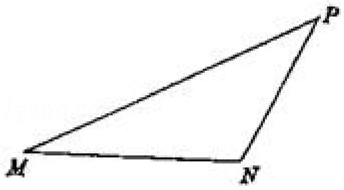
25. （12分）已知数列$\frac{8\cdot1}{1^2\cdot3^2}$，$\frac{8\cdot2}{3^2\cdot5^2}$，…，$\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$，….$S_n$为其前n项和．计算得$S_1=\frac{8}{9}$，$S_2=\frac{24}{25}$，$S_3=\frac{48}{49}$，$S_4=\frac{80}{81}$.观察上述结果，推测出计算$S_n$的公式，并用数学归纳法加以证明.

26. （12分）已知：平面α∩平面β=直线a．α，β同垂直于平面γ，又同平行于直线b.

求证：（1）a⊥γ；（2）b⊥γ.



27. （12 分）在面积为 1 的△PMN 中，$\tan\angle PMN=\frac{1}{2}$，$\tan\angle MNP=-2$．建立适当的坐标系，求以 M，N 为焦点且过点 P 的椭圆方程．



28. （12 分）设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$（$0<\theta<\pi$），$\omega=\frac{1-(\overline{z})^4}{1+z^4}$，并且 $|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg\omega<\frac{\pi}{2}$，求 θ．

1993年全国统一高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共17小题，每小题4分，满分68分）

1．（4分）函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期是（　　）

A．2π　　B．$2\sqrt{2}\pi$　　C．π　　D．$\frac{\pi}{4}$

考点：　三角函数中的恒等变换应用．

分析：　把三角函数式整理变形，变为 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$ 的形式，再用周期公式求出周期，变形时先提出 $\sqrt{2}$，式子中就出现两角和的正弦公式，公式逆用，得到结论．

解答：　解：∵$f(x)=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

∴$T=2\pi$，

故选A

点评：　本题关键是逆用公式，抓住公式的结构特征对提高记忆公式起到至关重要的作用，而且抓住了公式的结构特征，有利于在解题时观察分析题设和结论等三角函数式中所具有的相似性的结构特征，联想到相应的公式，从而找到解题的切入点．

2．（4分）如果双曲线的焦距为6，两条准线间的距离为4，那么该双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．2

考点：　双曲线的简单性质．

专题：　计算题．

分析：　由双曲线的焦距为6，两条准线间的距离为4，能求出a，c，从而得到该双曲线的离心率．

解答：　解：由题意知 $2c=6$，$\frac{2a^2}{c}=4$，

∴$a^2=6$，$c=3$，

∴ $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$．

故选C．

点评：　本题考查双曲线的离心率、准线方程、焦距，要求熟练掌握双曲线的性质．

3．（4分）（2012•北京模拟）和直线 $3x-4y+5=0$ 关于x轴对称的直线的方程为（　　）

A．$3x+4y-5=0$　　B．$3x+4y+5=0$　　C．$-3x+4y-5=0$　　D．$-3x+4y+5=0$

考点：　与直线关于点、直线对称的直线方程．

分析：　求出和直线 $3x-4y+5=0$ 关于x轴对称的直线的斜率，再求出直线 $3x-4y+5=0$ 和x轴的交点，可求答案．

解答：　解：和直线 $3x-4y+5=0$ 关于x轴对称的直线，其斜率与直线 $3x-4y+5=0$ 的斜率相反，

设所求直线为 $3x+4y+b=0$，两直线在x轴截距相等，所以所求直线是 $3x+4y+5=0$．

故选B．

点评：　本题是直线的对称问题，一般要用垂直平分解答；本题方法较多，由于对称轴是坐标轴，所以借助斜率，比较简单．

4．（4分）极坐标方程 $\rho=\dfrac{4}{3-5\cos\theta}$ 所表示的曲线是（　　）

A．焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{5}$ 的椭圆
B．焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{5}$ 的双曲线右支
C．焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{3}$ 的椭圆
D．焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{3}$ 的双曲线右支

考点：　简单曲线的极坐标方程．

专题：　计算题．

分析：　利用圆锥曲线统一的极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，求出圆锥曲线的离心率和焦点到准线距离，从而确定选项．

解答：　解：将原极坐标方程为 $\rho=\dfrac{4}{3-5\cos\theta}$，化成：

极坐标方程为 $\rho=\dfrac{\frac{5}{3}\times\frac{4}{5}}{1-\frac{5}{3}\cos\theta}$，

对照圆锥曲线统一的极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 得：

$e=\dfrac{5}{3}>1$，表示双曲线，且焦点到准线距离为 $\dfrac{4}{5}$．

故选B．

点评：　本题主要考查了圆锥曲线的极坐标方程，属于基础题．

5．（4分）$y=x^{\frac{3}{5}}$ 在[－1，1]上是（　　）

A．增函数且是奇函数
B．增函数且是偶函数
C．减函数且是奇函数
D．减函数且是偶函数

考点：　幂函数的性质．

专题：　数形结合．

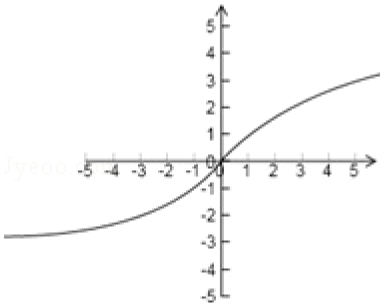
分析：　做出幂函数 $y=x^{\frac{3}{5}}$ 的图象，根据幂函数的图象与性质：可得在[－1，1]上的单调性和奇偶性．

解答：　解：考查幂函数 $y=x^{\frac{3}{5}}$．

$\because\dfrac{3}{5}>0$，根据幂函数的图象与性质

可得在[－1，1]上的单调增函数，是奇函数．

故选A．



点评：　　本题主要考查幂函数的图象与性质，幂函数是重要的基本初等函数模型之一．学习幂函数重点是掌握幂函数的图形特征，即图象语言，熟记幂函数的图象、性质．

6．（4分）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{2n^2-n+5}$的值为（　　）

A．$-\dfrac{1}{5}$　　B．$-\dfrac{5}{2}$　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

考点：　　极限及其运算．

专题：　　计算题．

分析：

分子分母都除以 n^2，原式简化为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}$，由此可得到$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{2n^2-n+5}$的值．

解答：

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{2n^2-n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}=\dfrac{5}{2}$．

点评：　　本题考查数列的极限，解题时要注意正确选用公式．

7．（4分）（2002•广东）设集合 M=$\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},\ k\in Z\}$，N=$\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},\ k\in Z\}$，则（　　）

A．M=N　　B．M⊂N　　C．M⊃N　　D．M∩N=Φ

考点：　　集合的包含关系判断及应用．

分析：　　从元素满足的公共属性的结构入手，首先对集合 N 中的 k 分奇数和偶数讨论，易得两集合的关系．

解答：

解：当 k=2m（为偶数）时，N=$\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},\ k\in Z\}=\{x|x=\frac{m}{2}+\frac{1}{2},\ m\in Z\}$

当 k=2m－1（为奇数）时，N=$\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},\ k\in Z\}=\{x|x=\frac{m}{2}+\frac{1}{4},\ m\in Z\}$=M

∴M⊂N

故选 B

点评：　　本题主要考查集合表示方法中的描述法．

8．（4分）sin20° cos70° +sin10° sin50° 的值是（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

考点：　三角函数中的恒等变换应用．

分析：　从题目的结构形式来看，本题是要逆用两角和或差的正弦余弦公式，但是题目又不完全符合，因此有一个整理的过程，整理发现，刚才直观的认识不准确，要前后两项都用积化和差，再合并同类项．

解答：

解：原式$=\frac{1}{2}[\sin 90° - \sin 50°] - \frac{1}{2}[\cos 60° - \cos 40°]$

$=\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 50° - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 40°$

$=\frac{1}{4}$,

故选 A

点评：　在解题时观察分析题设和结论等三角函数式中所具有的相似性的结构特征，联想到相应的公式，从而找到解题的切入点．本题开始考虑时差点出错，这是解题时好多同学要经历的过程．

9．（4 分）参数方程$\begin{cases}x=|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}|\\ y=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)\end{cases}$（$0<\theta<2\pi$）表示（　　）

A．双曲线的一支，这支过点$(1,\frac{1}{2})$

B．抛物线的一部分，这部分过$(1,\frac{1}{2})$

C．双曲线的一支，这支过点$(-1,\frac{1}{2})$

D．抛物线的一部分，这部分过$(-1,\frac{1}{2})$

考点：　参数方程化成普通方程．

专题：　计算题．

分析：　将参数方程化为普通方程，然后再对 A、B、C、D 进行判断；

解答：

解：∵$x=|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}|$，∴$x^2=1+\sin\theta$，

∵$y=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)$，

∴$y=\frac{1}{2}x^2$，是抛物线；

当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}$；

故选 B．

点评：　此题考查参数方程与普通方程的区别和联系，两者要会互相转化，根据实际情况选择不同的方程进行求解，这也是每年高考必考的热点问题．

10．（4 分）若 a、b 是任意实数，且 a＞b，则（　　）

A．$a^2>b^2$　B．$\frac{b}{a}<1$　C．$\lg(a-b)>0$　D．$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2}$

考点：　不等式比较大小．

专题：　综合题．

分析：　由题意可知 a＞b，对于选项 A、B、C 举出反例判定即可．

解答：　解：a、b 是任意实数，且 a＞b，如果 $a=0$，$b=-2$，显然 A 不正确；

如果 a=0，b=﹣2，显然 B 无意义，不正确；

如果 a=0，b=﹣$\frac{1}{2}$，显然 C，lg$\frac{1}{2}$>0，不正确；

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a}<\left(\frac{1}{2}\right)^{b}$满足指数函数的性质，正确.

故选 D.

点评：本题考查比较大小的方法，考查各种代数式的意义和性质，是基础题.

11.（4 分）一动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2﹣8x+12=0$ 都外切，则动圆圆心轨迹为（　　）

A．圆　B．椭圆　C．双曲线的一支　D．抛物线

考点：双曲线的定义.

专题：计算题.

分析：设动圆 P 的半径为 r，然后根据⊙P 与⊙O：$x^2+y^2=1$，⊙F：$x^2+y^2﹣8x+12=0$ 都外切得|PF|=2+r、|PO|=1+r，再两式相减消去参数 r，则满足双曲线的定义，问题解决.

解答：解：设动圆的圆心为 P，半径为 r，

而圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 O（0，0），半径为 1；

圆 $x^2+y^2﹣8x+12=0$ 的圆心为 F（4，0），半径为 2.

依题意得|PF|=2+r|，|PO|=1+r，

则|PF|﹣|PO|=（2+r）﹣（1+r）=1<|FO|，

所以点 P 的轨迹是双曲线的一支.

故选 C.

点评：本题主要考查双曲线的定义.

12.（4 分）圆柱轴截面的周长 l 为定值，那么圆柱体积的最大值是（　　）

A．$\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\pi$　B．$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\pi$　C．$\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\pi$　D．$2\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\pi$

考点：旋转体（圆柱、圆锥、圆台）.

专题：计算题；综合题.

分析：设出圆柱的底面半径和高，求出体积表达式，通过求导求出体积的最大值.

解答：解：圆柱底面半径 R，高 H，圆柱轴截面的周长 L 为定值：

4R+2H=L，

$H=\frac{L}{2}﹣2R$，

$V=SH=\pi R^2H=\pi R^2\left(\frac{L}{2}﹣2R\right)=\pi R^2\frac{L}{2}﹣2\pi R^3$

求导：

$V'=\pi RL﹣6\pi R^2$ 令 $V'=0$，

$\pi RL﹣6\pi R^2=0$，

$\pi R(L﹣6R)=0$，

$L﹣6R=0$，

$R=\frac{L}{6}$，

当 $R=\frac{L}{6}$，

圆柱体积的有最大值，圆柱体积的最大值是：

$V=\pi R^2\frac{L}{2}﹣2\pi R^3=\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\pi$

故选 A．

点评：本题考查旋转体的体积，导数的应用，是中档题．

13．（4 分）（$\sqrt{x}$+1）^{4}（x－1）^{5}展开式中 x^4的系数为（　　）

A．－40　　B．10　　C．40　　D．45

考点：二项式定理的应用．

专题：计算题．

分析：先将展开式的系数转化成几个二项展开式系数乘积的和，再利用二项展开式的通项公式求出各个二项式的系数．

解答：解：$(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$展开式中 x^4的系数是下列几部分的和：

$(\sqrt{x}+1)^4$的常数项与（x－1）^{5}展开式的含 x^4的项的系数的乘积

$(\sqrt{x}+1)^4$含 x 项的系数与（x－1）^{5}展开式的含 x^3的项的系数的乘积

$(\sqrt{x}+1)^4$含 x^2项的系数与（x－1）^{5}展开式的含 x^2的项的系数的乘积

∵ $(\sqrt{x}+1)^4$展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^r x^{\frac{r}{2}}$

（x－1）^{5}展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^r x^{5-r}(-1)^r=(-1)^r C_5^r x^{5-r}$

∴ $(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$展开式中 x^4的系数为 $C_4^0(-C_5^1)+C_4^2C_5^2+C_4^4(-C_5^3)=45$

故选项为 D

点评：本题考查数学的等价转化的能力和二项展开式的通项公式的应用．

14．（4 分）直角梯形的一个内角为 45°，下底长为上底长的$\frac{3}{2}$，这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为（5+$\sqrt{2}$）π，则旋转体的体积为（　　）

A．2π　　B．$\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$　　C．$\frac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$　　D．$\frac{7}{3}\pi$

考点：旋转体（圆柱、圆锥、圆台）．

专题：计算题．

分析：由题意可知，这个几何体的面积是圆柱中一个圆加一个长方形加一个扇形的面积，而这个几何体的体积是一个圆锥加一个同底圆柱的体积．再根据题目中的条件求解即可．

解答：解：这个几何体的面积是圆柱中一个圆加一个长方形加一个扇形的面积，

圆的面积，直角腰为半径，长方形的面积，圆的周长为长，上底为宽，扇形的面积，圆的周长为弧长，另一腰则为扇形的半径．

设上底为 x，则下底为$\frac{3}{2}x$，直角腰为$\frac{1}{2}x$，另一腰为整个面积式子为

$\frac{1}{4}\pi x^2+\pi x^2+\sqrt{2}\times\frac{1}{4}\pi x^2=(5+\sqrt{2})\pi$，

解得 x=±2，因为 x＞0，所以 x=－2 舍去，x=2．而这个几何体的体积是一个圆锥加一个同底圆柱的体积，圆锥的高，下底减上底得圆锥的高为 1，

圆柱体积=Sh=$\frac{1}{2}\pi r^2h=\pi\times1^2\times2=2\pi$，圆锥体积=$\frac{1}{3}\pi$

所以整个几何体的体积为$\frac{7}{3}\pi$.

故选D.

点评： 本题考查学生的空间想象能力，和逻辑思维能力，等量之间的转换，是中档题.

15. （4分）已知a_1，a_2，…，a_8为各项都大于零的等比数列，公式$q\neq 1$，则（　　）

A. $a_1+a_8>a_4+a_5$

B. $a_1+a_8<a_4+a_5$

C. $a_1+a_8=a_4+a_5$

D. a_1+a_8和a_4+a_5的大小关系不能由已知条件确定

考点： 等比数列.

分析： 用作差法比较即可.

解答： 解：$a_1+a_8-(a_4+a_5)$

$=a1(1+q^7-q^3-q^4)$

$=a1(1+q)(q^2+q+1)(q-1)^2(1+q^2)$

又∵a1>0，a1，a2，…，a8为各项都大于零的等比数列

∴q>0

∴a1+a8-（a4+a5）>0

故选A

点评： 本题考查比较法和等比数列通项公式的应用.

16. （4分）（2014•黄山一模）设有如下三个命题：

甲：相交直线l、m都在平面α内，并且都不在平面β内；

乙：直线l、m中至少有一条与平面β相交；

丙：平面α与平面β相交.

当甲成立时（　　）

A. 乙是丙的充分而不必要条件

B. 乙是丙的必要而不充分条件

C. 乙是丙的充分且必要条件

D. 乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

考点： 空间中直线与平面之间的位置关系；充要条件.

专题： 证明题；压轴题.

分析： 判断乙是丙的什么条件，即看乙⇒丙、丙⇒乙是否成立．当乙成立时，直线l、m中至少有一条与平面β相交，则平面α与平面β至少有一个公共点，故相交相交．反之丙成立时，若l、m中至少有一条与平面β相交，则l∥m，由已知矛盾，故乙成立.

解答： 解：当甲成立，即“相交直线l、m都在平面α内，并且都不在平面β内”时，若“l、m中至少有一条与平面β相交”，则“平面α与平面β相交”成立；若“平面α与平面β相交”，则“l、m中至少有一条与平面β相交”也成立

故选C.

点评： 本题考查空间两条直线、两个平面的位置关系判断、充要条件的判断，考查逻辑推理能力.

17. （4分）将数字1，2，3，4填入标号为1，2，3，4的四个方格里，每格填一个数字，则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有（　　）

A. 6种　　B. 9种　　C. 11种　　D. 23种

考点：　排列、组合及简单计数问题．

专题：　计算题；压轴题．

分析：　首先计算4个数字填入4个空格的所有情况，进而分析计算四个数字全部相同，有1个数字相同的情况，有2个数字相同情况，有3个数字相同的情况数目，由事件间的相互关系，计算可得答案．

解答：　解：根据题意，数字1，2，3，4填入标号为1，2，3，4的四个方格里，共$A_4^4=24$种填法，

其中，四个数字全部相同的有1种，

有1个数字相同的有$4\times2=8$种情况，

有2个数字相同的有$C_4^2\times1=6$种情况，

有3个数字相同的情况不存在，

则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有$24-1-8-6=9$种，

故选B．

点评：　本题考查排列、组合的运用，注意此类题目的操作性很强，必须实际画图操作，认真分析．

二、填空题（共6小题，每小题4分，满分24分）

18．（4分）$\sin\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)=$__$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$__．

考点：　任意角的三角函数的定义．

专题：　计算题．

分析：　利用两角和正弦公式展开，利用反三角函数值的求法，即可求出答案

解答：　解：$\sin\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

故答案为：$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

点评：　本题考查三角函数求值，不过学生对反三角函数不是很理解，希望学生能抓住实质，加大训练量．

19．（4分）若双曲线$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$与圆$x^2+y^2=1$没有公共点，则实数k的取值范围为__$\{k|k>\frac{1}{3}$或$k<-\frac{1}{3}\}$__．

考点：　双曲线的简单性质．

专题：　计算题．

分析：　由双曲线$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$与圆$x^2+y^2=1$没有公共点知圆半径的长小于双曲线的实半轴的长，由此可以求出实数k的取值范围．

解答：　解：∵双曲线$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$与圆$x^2+y^2=1$没有公共点，

∴$|3k|>1$，∴$|k|>\frac{1}{3}$．

解得$k>\frac{1}{3}$或$k<-\frac{1}{3}$．

实数k的取值范围为$\{k|k>\frac{1}{3}$或$k<-\frac{1}{3}\}$．

答案为$\{k|k>\frac{1}{3}或k<-\frac{1}{3}\}$.

点评：　熟练掌握圆和双曲线的图象和性质即可顺利求解.

20．（4分）从1，2，…，10这十个数中取出四个数，使它们的和为奇数，共有＿100＿种取法（用数字作答）.

考点：　组合及组合数公式；排列、组合的实际应用.

分析：　根据题意，将这10个数分为奇数与偶数两个组，每组各5个数；分析可得，若取出的四个数的和为奇数，则取出的四个数必有1个或3个奇数；分别求出两种情况下的取法情况数，相加可得答案.

解答：　解：根据题意，将这10个数分为奇数与偶数两个组，每组各5个数；

若取出的四个数的和为奇数，则取出的四个数必有1个或3个奇数；

若有1个奇数时，有$C_5^1 \bullet C_5^3=50$种取法，

若有3个奇数时，有$C_5^1 \bullet C_5^3=50$种取法，

故符合题意的取法共50+50=100种取法；

故答案为100.

点评：　本题考查利用组合解决常见计数问题的方法，解本题时，注意先分组，进而由组合的方法，结合乘法计数原理进行计算.

21．（4分）设$f(x)=4^x-2^{x+1}$，则$f^{-1}(0)=$＿1＿.

考点：　反函数.

专题：　计算题.

分析：　欲求$f^{-1}(0)$，根据反函数的定义知，只要求出使等式$4^x-2^{x+1}=0$，成立的x的值即可.

解答：　解：$\because 4^x-2^{x+1}=0$，

$2^x(2^x-2)=0$，$\therefore 2^x-2=0$

得：x=1.

$\therefore f^{-1}(0)=1$.

故答案为1.

点评：　本题主要考查了反函数的概念，属于基础题之列.

22．（4分）建造一个容积为8m³，深为2m的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元，则水池的最低造价为

＿1760＿.

考点：　函数模型的选择与应用.

专题：　应用题；压轴题.

分析：　欲求水池的最低造价，先设长x，则宽$\frac{4}{x}$，列出总造价，是一个关于x的函数式，最后利用基本不等式求出此函数式的最小值即可.

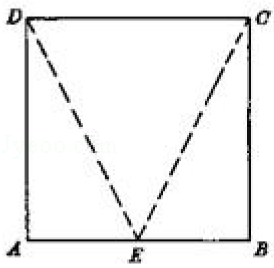
解答：　解：设长x，则宽$\frac{4}{x}$，造价$y=4\times120+4x\times80+\frac{16}{x}\times80\geqslant1760$，

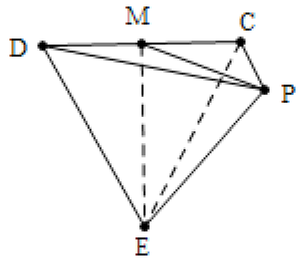
当且仅当：$4x\times80=\frac{16}{x}\times80$，即x=2时取等号.

故答案为：1760.

点评：　本小题主要考查函数模型的选择与应用，属于基础题．解决实际问题通常有四个步骤：（1）阅读理解，认真审题；（2）引进数学符号，建立数学模型；（3）利用数学的方法，得到数学结果；（4）转译成具体问题作出解答，其中关键是建立数学模型.

23．（4分）如图，ABCD是正方形，E是AB的中点，如将△DAE和△CBE分别沿虚线DE和CE折起，使AE与BE重合，记A与B重合后的点为P，则面PCD与面ECD所成的二面角为 30 度．





考点：　与二面角有关的立体几何综合题．

专题：　计算题；压轴题．

分析：　二面角的度量关键在于作出它的平面角，取CD的中点M，连接PM、EM，因为PD=PC，所以PM⊥CD；同理因为ED=EC，所以EM⊥CD，故∠PME即为面PCD与面ECD所成二面角的平面角．

解答：　解：设正方形的边长为2，

取CD的中点M，连接PM、EM，

∵PD=PC，

∴PM⊥CD

∵ED=EC，

∴EM⊥CD

故∠PME即为面PCD与面ECD所成二面角的平面角．

在△PME中：PE=1，PM=$\sqrt{3}$，EM=2，

∴$\cos\angle PME=\frac{PM^2+ME^2-PE^2}{2PM\cdot ME}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴∠PME=30°

故答案为：30．

点评：　本小题主要考查棱锥的结构特征，二面角和线面关系等基本知识，同时考查空间想象能力和推理、运算能力．

三、解答题（共5小题，满分58分）

24．（10分）已知$f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$（a＞0，a≠1）．

（1）求f（x）的定义域；

（2）判断f（x）的奇偶性并予以证明；

（3）求使f（x）＞0的x取值范围．

考点：　对数函数的定义域；函数奇偶性的判断．

分析：　（1）求对数函数的定义域，只要真数大于0即可，转化为解分式不等式．

（2）利用奇偶性的定义，看f（﹣x）和f（x）的关系，注意到$\frac{1+x}{1-x}$和$\frac{1-x}{1+x}$互为倒数，其对数值互为相反数；

也可计算f（﹣x）+f（x）=0得到．

（3）有对数函数的图象可知，要使f （x）＞0，需分a＞0和a＜0两种境况讨论．

解答：　解：（1）由对数函数的定义知$\frac{1+x}{1-x}>0$．如果$\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$，则﹣1＜x＜1；

如果$\begin{cases}1+x<0\\1-x<0\end{cases}$，则不等式组无解．故 f（x）的定义域为（﹣1，1）

（2）∵$f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，

∴f（x）为奇函数．

（3）（ⅰ）对 a>1，$\log_a\frac{1+x}{1-x}>0$等价于$\frac{1+x}{1-x}>1$，①

而从（1）知 1﹣x>0，故①等价于 1+x>1﹣x，又等价于 x>0．故对 a>1，当 x∈（0，1）时有 f（x）>0．（ⅱ）对 0<a<1，$\log_a\frac{1+x}{1-x}>0$等价于

$0<\frac{1+x}{1-x}<1$．②

而从（1）知 1﹣x>0，故②等价于﹣1<x<0．故对 0<a<1，当 x∈（﹣1，0）时有 f（x）>0．

点评：本题考查对数函数的性质：定义域、奇偶性、单调性等知识，难度一般．

25．（12 分）已知数列$\frac{8\cdot1}{1^2\cdot3^2}$，$\frac{8\cdot2}{3^2\cdot5^2}$，…，$\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$，…．$S_n$为其前 n 项和．计算得$S_1=\frac{8}{9}$，$S_2=\frac{24}{25}$，$S_3=\frac{48}{49}$，$S_4=\frac{80}{81}$．观察上述结果，推测出计算$S_n$的公式，并用数学归纳法加以证明．

考点：数列递推式；数学归纳法．

专题：证明题．

分析：

观察分析题设条件可知$S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$　（n∈N）．然后再用数学归纳法进行证明．

解答：

解：观察分析题设条件可知$S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$（n∈N）

证明如下：（1）当 n=1 时，$S_1=\frac{3^2-1}{3^2}=\frac{8}{9}$，等式成立．

（Ⅱ）设当 n=k 时等式成立，即$S_k=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$．则$S_{k+1}=S_k+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

$\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=\frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

$\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

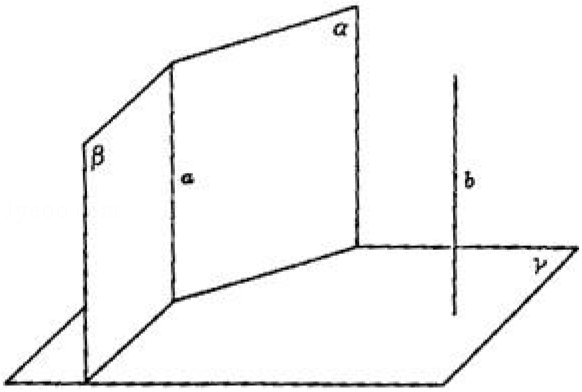
$\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}=\frac{[2(k+1)+1]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}$

由此可知，当 n=k+1 时等式也成立．根据（1）（2）可知，等式对任何 n∈N 都成立

点评：本题考查数列性质的综合应用，解题时要注意数学归纳法的证明步骤，注意培养计算能力．

26．（12 分）已知：平面α∩平面β=直线 a．α，β同垂直于平面γ，又同平行于直线 b．

求证：（1）a⊥γ；（2）b⊥γ．



考点：　直线与平面垂直的判定．

专题：　证明题；压轴题．

分析：　（1）在γ内任取一点P并于γ内作直线PM⊥AB，PN⊥AC，由面面垂直的性质得PM⊥α，PM⊥a；同理证明PN⊥a，这样a垂直于面γ内的2条相交直线，从而a⊥γ．

（2）通过α，β同垂直于平面γ，又同平行于直线b，利用线面平行的性质定理证明，b∥a，由（1）知a⊥γ，从而证得b⊥γ．

解答：　证明：（1）设α∩γ=AB，β∩γ=AC．

在γ内任取一点P并于γ内作直线PM⊥AB，PN⊥AC．

∵γ⊥α，

∴PM⊥α．

而a⊂α，

∴PM⊥a．

同理PN⊥a．又PM⊂γ，PN⊂γ，

∴a⊥γ．

（2）于a上任取点Q，过b与Q作一平面交α于直线a_1，交β于直线a_2．∵b∥α，∴b∥a_1．

同理b∥a_2．∵a_1，a_2同过Q且平行于b，

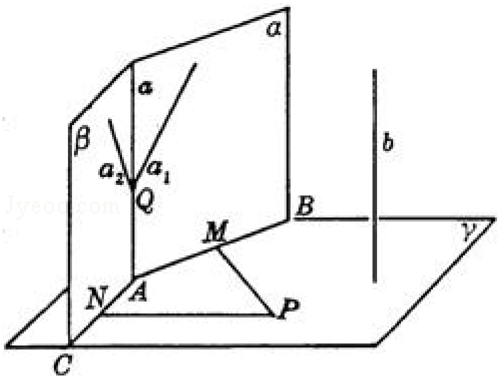
∵a_1，a_2重合．

又a_1⊂α，a_2⊂β，

∴a_1，a_2都是α、β的交线，即都重合于a．∵b∥a_1，∴b∥a．

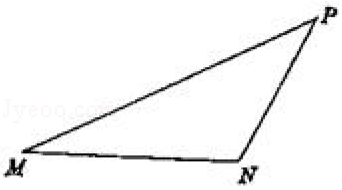
而a⊥γ，

∴b⊥γ．



点评：　本题考查证明线面垂直的证明方法．

27．（12分）在面积为1的△PMN中，tan∠PMN=$\frac{1}{2}$，tan∠MNP=﹣2．建立适当的坐标系，求以M，N为焦点且过点P的椭圆方程．



考点：　椭圆的标准方程．

专题：　计算题；压轴题．

分析：　以MN所在直线为x轴，MN的垂直平分线为y轴建立直角坐标系，设以M，N为焦点且过点P的椭圆方程和焦点坐标，根据$\tan M=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=tg(\pi-\angle MNP)=2$，得直线PM和PN的直线方程，将此二方程联立解得x和y，可知点P的坐标，根据，$|MN|=2c$，MN上的高为点P的纵坐标，根据三角形面积公式表示出出△MNP的面积求得c，则点P的坐标可得．由两点间的距离公式求得$|PM|$和$|PN|$，进而根据椭圆的定义求得a，进而求得b，则椭圆方程可得．

解答：　解：如图，以MN所在直线为x轴，MN的垂直平分线为y轴建立直角坐标系，

设以M，N为焦点且过点P的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

焦点为$M(-c,0)$，$N(c,0)$．

由$\tan\angle PMN=\frac{1}{2}$，$\tan\angle MNP=-2$，$\tan\alpha=\tan(\pi-\angle MNP)=2$，

得直线PM和直线PN的方程分别为$y=\frac{1}{2}(x+c)$和$y=2(x-c)$．

将此二方程联立，解得$x=\frac{5}{3}c$，$y=\frac{4}{3}c$，即P点坐标为$(\frac{5}{3}c,\frac{4}{3}c)$．

在△MNP中，$|MN|=2c$，MN上的高为点P的纵坐标，故$S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot\frac{4}{3}c=\frac{4}{3}c^2$．

由题设条件$S_{\triangle MNP}=1$，$\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即P点坐标为$(\frac{5\sqrt{3}}{6},\ \frac{2\sqrt{3}}{3})$．

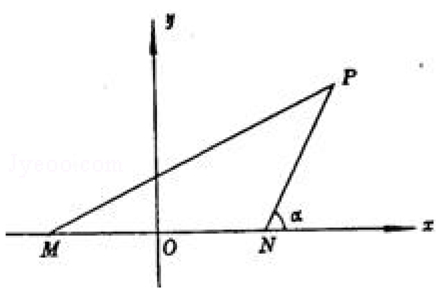
由两点间的距离公式$|PM|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$，

$|PN|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$．

得$a=\frac{1}{2}(|PM|+|PN|)=\frac{\sqrt{15}}{2}$．

又$b^2=a^2-c^2=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}=3$，

故所求椭圆方程为$\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$．



点评：　　本题主要考查坐标系、椭圆的概念和性质、直线方程以及综合应用能力.

28.（12分）设复数z=cosθ+isinθ（0＜θ＜π），$\omega=\frac{1-(\overline{z})^4}{1+z^4}$，并且$|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg\omega<\frac{\pi}{2}$，求θ.

考点：　　复数代数形式的混合运算.

专题：　　压轴题.

分析：　　化简ω，利用$|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求出θ的三角函数值，再用$\arg\omega<\frac{\pi}{2}$，来验证ω，从而求出θ的值.

解答：

解法一 $\omega=\frac{1-[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^4}{1+[\cos\theta+i\sin\theta]^4}=\frac{1-\cos(-4\theta)-i\sin(-4\theta)}{1+\cos4\theta+i\sin4\theta}=$

$\frac{2\sin^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}{2\cos^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}$=tg2θ（sin4θ+icos4

θ）．$|\omega|=|tg2\theta|\cdot|\sin4\theta+i\cos4\theta|=|tg2\theta|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$tg2\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因0＜θ＜π，故有

（i）当$tg2\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，得$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$，这时都有$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，

得$\arg\omega=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，适合题意.

（ii）当$tg2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时，得$\theta=\frac{5\pi}{12}$或$\theta=\frac{11\pi}{12}$，这时都有$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$，

得$\arg\omega=\frac{11\pi}{6}>\frac{\pi}{2}$，不适合题意，舍去.

综合（i）、（ii）知$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$.

解法二 z^4=cos4θ+isin4θ.

记φ=4θ，得$(\overline{z})^4=\overline{(z^4)}=\cos\phi-i\sin\phi$. $\omega=\frac{1-\cos\phi+i\sin\phi}{1+\cos\phi+i\sin\phi}$. $=\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}(\sin\phi+i\cos\phi)=$

$tg\frac{\phi}{2}(\sin\phi+i\cos\phi)$. ∵$|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg\omega<\frac{\pi}{2}$，

①②③

$$\therefore\begin{cases}|tg\frac{\phi}{2}|=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ tg\frac{\phi}{2}\cdot\sin\phi>0\\ tg\frac{\phi}{2}\cdot\cos\phi\geqslant0\end{cases}$$

当①成立时，②恒成立，所以θ应满足

（i）$\begin{cases}0<\theta<\pi\\ tg2\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos4\theta\geqslant0\end{cases}$，或（ii）$\begin{cases}0<\theta<\pi\\ tg2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos4\theta\leqslant0\end{cases}$，

解（i）得$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$.（ii）无解.

综合（i）、（ii）$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$.

点评：本题考查复数的基本概念和运算，三角函数式的恒等变形及综合解题能力；注意分类讨论思想的应用，难度较大．