

2008年辽宁高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题共 60 分）

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P ，那么

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x \mid \frac{x+3}{x-1} < 0\}$, $N = \{x \mid x \leq -3\}$, 则集合 $\{x \mid x \geq 1\} =$ ()

- A. $M \cap N$ B. $M \cup N$ C. $\complement_M(M \cap N)$ D. $\complement_M(M \cup N)$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n(2n+1)} =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

3. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $y = kx + 2$ 没有公共点的充要条件是 ()

- A. $k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ B. $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

- C. $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ D. $k \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

4. 复数 $\frac{1}{-2+i} + \frac{1}{1-2i}$ 的虚部是 ()

- A. $\frac{1}{5}i$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{5}i$ D. $-\frac{1}{5}$

5. 已知 O, A, B 是平面上的三个点，直线 AB 上有一点 C ，满足 $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{0}$ ，则 $\overrightarrow{OC} =$ ()

- A. $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ B. $-\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ D. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

6. 设 P 为曲线 $C: y = x^2 + 2x + 3$ 上的点, 且曲线 C 在点 P 处切线倾斜角的取值范围为

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则点 P 横坐标的取值范围为 ()

- A. $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ B. $[-1, 0]$ C. $[0, 1]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

7. 4张卡片上分别写有数字1, 2, 3, 4, 从这4张卡片中随机抽取2张, 则取出的2张卡片上的数字之和为奇数的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 将函数 $y = 2^x + 1$ 的图象按向量 \mathbf{a} 平移得到函数 $y = 2^{x+1}$ 的图象, 则 ()

- A. $\mathbf{a} = (-1, -1)$ B. $\mathbf{a} = (1, -1)$ C. $\mathbf{a} = (1, 1)$ D. $\mathbf{a} = (-1, 1)$

9. 一生产过程有4道工序, 每道工序需要安排一人照看. 现从甲、乙、丙等6名工人中安排4人分别照看一道工序, 第一道工序只能从甲、乙两工人中安排1人, 第四道工序只能从甲、丙两工人中安排1人, 则不同的安排方案共有 ()

- A. 24种 B. 36种 C. 48种 D. 72种

10. 已知点 P 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $(0, 2)$ 的距离与 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{9}{2}$

11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点, 则在空间中与三条直线 A_1D_1, EF, CD 都相交的直线 ()

- A. 不存在 B. 有且只有两条 C. 有且只有三条 D. 有无数条

12. 设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 且当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的

所有 x 之和为 ()

- A. -3 B. 3 C. -8 D. 8

第II卷 (非选择题共90分)

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题4分, 共16分.

13. 函数 $y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的反函数是_____.

14. 在体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 的球的表面上有 A, B, C 三点, $AB=1, BC=\sqrt{2}$, A, C 两点的球面距离

为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$, 则球心到平面 ABC 的距离为_____.

15. 已知 $(1+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^n$ 的展开式中没有常数项, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $2 \leq n \leq 8$, 则 $n =$ _____.

16. 已知 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 有最小值, 无最大值, 则 $\omega =$ _____.

三、解答题: 本大题共6小题, 共74分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c , 已知 $c = 2, C = \frac{\pi}{3}$.

(I) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b ;

(II) 若 $\sin C + \sin(B - A) = 2\sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分12分)

某批发市场对某种商品的周销售量 (单位: 吨) 进行统计, 最近100周的统计结果如下表所示:

周销售量	2	3	4
频数	20	50	30

(I) 根据上面统计结果, 求周销售量分别为2吨, 3吨和4吨的频率;

(II) 已知每吨该商品的销售利润为2千元, ξ 表示该种商品两周销售利润的和 (单位: 千元). 若以上述频率作为概率, 且各周的销售量相互独立, 求 ξ 的分布列和数学期望.

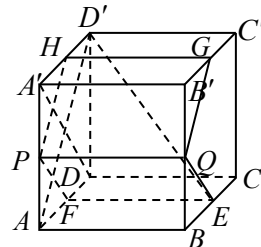
19. (本小题满分12分)

如图, 在棱长为1的正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, $AP = BQ = b$ ($0 < b < 1$), 截面 $PQEF \parallel A'D$, 截面 $PQGH \parallel AD'$.

(I) 证明: 平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直;

(II) 证明: 截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和是定值, 并求出这个值;

(III) 若 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成的角为 45° , 求 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角的正弦值.



20. (本小题满分12分)

在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到两点 $(0, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ 的距离之和等于4, 设点 P 的轨迹

为 C ，直线 $y = kx + 1$ 与 C 交于 A, B 两点.

(I) 写出 C 的方程;

(II) 若 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ，求 k 的值;

(III) 若点 A 在第一象限，证明：当 $k > 0$ 时，恒有 $|\overrightarrow{OA}| > |\overrightarrow{OB}|$.

21. (本小题满分12分)

在数列 $|a_n|, |b_n|$ 中， $a_1=2, b_1=4$ ，且 a_n, b_n, a_{n+1} 成等差数列， b_n, a_{n+1}, b_{n+1} 成等

比数列 ($n \in \mathbf{N}^*$)

(I) 求 a_2, a_3, a_4 及 b_2, b_3, b_4 ，由此猜测 $|a_n|, |b_n|$ 的通项公式，并证明你的结论;

(II) 证明：
$$\frac{1}{a_1 + b_1} + \frac{1}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{1}{a_n + b_n} < \frac{5}{12}.$$

22. (本小题满分14分)

设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} - \ln x + \ln(x+1)$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(II) 是否存在实数 a ，使得关于 x 的不等式 $f(x) \geq a$ 的解集为 $(0, +\infty)$ ？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，试说明理由.

参考答案和评分参考

说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则

二、对解答题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数,选择题和填空题不给中间分.

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分, 共60分.

1. D 2. B 3. C 4. B 5. A 6. A
7. C 8. A 9. B 10. A 11. D 12. C

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分, 满分16分.

13. $y = \begin{cases} x-1, & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$ 14. $\frac{3}{2}$ 15. 5 16. $\frac{14}{3}$

三、解答题

17. 本小题主要考查三角形的边角关系, 三角函数公式等基础知识, 考查综合应用三角函数有关知识的能力. 满分12分.

解: (I) 由余弦定理及已知条件得, $a^2 + b^2 - ab = 4$,

又因为 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{3}$, 得 $ab = 4$. 4分

联立方程组 $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 4, \\ ab = 4, \end{cases}$ 解得 $a = 2, b = 2$. 6分

(II) 由题意得 $\sin(B+A) + \sin(B-A) = 4 \sin A \cos A$,

即 $\sin B \cos A = 2 \sin A \cos A$, 8分

当 $\cos A = 0$ 时, $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$, $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

当 $\cos A \neq 0$ 时, 得 $\sin B = 2 \sin A$, 由正弦定理得 $b = 2a$,

联立方程组 $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 4, \\ b = 2a, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 12分

18. 本小题主要考查频率、概率、数学期望等基础知识, 考查运用概率知识解决实际问题

的能力. 满分12分.

解: (I) 周销售量为2吨, 3吨和4吨的频率分别为0.2, 0.5和0.3. 3分

(II) ξ 的可能值为8, 10, 12, 14, 16, 且

$$P(\xi=8) = 0.2^2 = 0.04,$$

$$P(\xi=10) = 2 \times 0.2 \times 0.5 = 0.2,$$

$$P(\xi=12) = 0.5^2 + 2 \times 0.2 \times 0.3 = 0.37,$$

$$P(\xi=14) = 2 \times 0.5 \times 0.3 = 0.3,$$

$$P(\xi=16) = 0.3^2 = 0.09.$$

ξ 的分布列为

ξ	8	10	12	14	16
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

9分

$$E\xi = 8 \times 0.04 + 10 \times 0.2 + 12 \times 0.37 + 14 \times 0.3 + 16 \times 0.09 = 12.4 \text{ (千元)}$$

12分

19. 本小题主要考查空间中的线面关系, 面面关系, 解三角形等基础知识, 考查空间想象能力与逻辑思维能力. 满分12分.

解法一:

(I) 证明: 在正方体中, $AD' \perp A'D$, $AD' \perp AB$, 又由已知可得

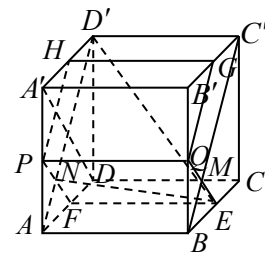
$$PF \parallel A'D, PH \parallel AD', PQ \parallel AB,$$

所以 $PH \perp PF$, $PH \perp PQ$,

所以 $PH \perp$ 平面 $PQEF$.

所以平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直.

4分



(II) 证明: 由 (I) 知

$PF = \sqrt{2}AP$, $PH = \sqrt{2}PA'$, 又截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 都是矩形, 且 $PQ=1$, 所以截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和是

$$(\sqrt{2}AP + \sqrt{2}PA') \times PQ = \sqrt{2}, \text{ 是定值.}$$

8分

(III) 解: 连结 BC' 交 EQ 于点 M .

因为 $PH \parallel AD'$, $PQ \parallel AB$,

所以平面 $ABC'D'$ 和平面 $PQGH$ 互相平行, 因此 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角与 $D'E$ 与平面

$ABC'D'$ 所成角相等.

与 (I) 同理可证 $EQ \perp$ 平面 $PQGH$, 可知 $EM \perp$ 平面 $ABC'D'$, 因此 EM 与 $D'E$ 的比值就是所求的正弦值.

设 AD' 交 PF 于点 N , 连结 EN , 由 $FD = 1 - b$ 知

$$D'E = \sqrt{(1-b)^2 + 2}, \quad ND' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-b).$$

因为 $AD' \perp$ 平面 $PQEF$, 又已知 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 成 45° 角,

$$\text{所以 } D'E = \sqrt{2}ND', \text{ 即 } \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-b) \right] = \sqrt{(1-b)^2 + 2},$$

解得 $b = \frac{1}{2}$, 可知 E 为 BC 中点.

$$\text{所以 } EM = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 又 } D'E = \sqrt{(1-b)^2 + 2} = \frac{3}{2},$$

故 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角的正弦值为 $\frac{EM}{D'E} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

12分

解法二:

以 D 为原点, 射线 DA, DC, DD' 分别为 x, y, z 轴的正半轴建立如图的空间直角坐标系 $D-xyz$ 由已知得 $DF = 1 - b$, 故

$$A(1,0,0), \quad A'(1,0,1), \quad D(0,0,0), \quad D'(0,0,1),$$

$$P(1,0,b), \quad Q(1,1,b), \quad E(1-b,1,0),$$

$$F(1-b,0,0), \quad G(b,1,1), \quad H(b,0,1).$$

(I) 证明: 在所建立的坐标系中, 可得

$$\overrightarrow{PQ} = (0,1,0), \overrightarrow{PF} = (-b,0,-b),$$

$$\overrightarrow{PH} = (b-1,0,1-b),$$

$$\overrightarrow{AD'} = (-1,0,1), \overrightarrow{A'D} = (-1,0,-1).$$

因为 $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{PF} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AD'}$ 是平面 $PQEF$ 的法向量.

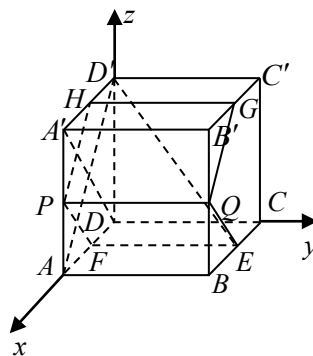
因为 $\overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{PH} = 0$, 所以 $\overrightarrow{A'D}$ 是平面 $PQGH$ 的法向量.

因为 $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{A'D} = 0$, 所以 $\overrightarrow{A'D} \perp \overrightarrow{AD'}$,

所以平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直.

4分

(II) 证明: 因为 $\overrightarrow{EF} = (0,-1,0)$, 所以 $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{PQ}, |\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{PQ}|$, 又 $\overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{PQ}$, 所以 PQE



F 为矩形，同理 $PQGH$ 为矩形.

在所建立的坐标系中可求得 $|\overline{PH}| = \sqrt{2}(1-b)$ ， $|\overline{PF}| = \sqrt{2}b$ ，

所以 $|\overline{PH}| + |\overline{PF}| = \sqrt{2}$ ，又 $|\overline{PQ}| = 1$ ，

所以截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和为 $\sqrt{2}$ ，是定值.

8分

(III) 解：由已知得 $\overline{D'E}$ 与 $\overline{AD'}$ 成 45° 角，又 $\overline{D'E} = (1-b, 1, -1)$ ， $\overline{AD'} = (-1, 0, 1)$ 可得

$$\frac{|\overline{D'E} \cdot \overline{AD'}|}{|\overline{D'E}| |\overline{AD'}|} = \frac{|b-2|}{\sqrt{2}\sqrt{(1-b)^2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

即 $\frac{2-b}{\sqrt{(1-b)^2+2}} = 1$ ，解得 $b = \frac{1}{2}$.

所以 $\overline{D'E} = \left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)$ ，又 $\overline{AD'} = (-1, 0, -1)$ ，所以 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角的正弦值为

$$|\cos \langle \overline{D'E}, \overline{AD'} \rangle| = \frac{\left|-\frac{1}{2} + 1\right|}{\frac{3}{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

12分

20. 本小题主要考查平面向量，椭圆的定义、标准方程及直线与椭圆位置关系等基础知识，考查综合运用解析几何知识解决问题的能力. 满分12分.

解：

(I) 设 $P(x, y)$ ，由椭圆定义可知，点 P 的轨迹 C 是以 $(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ 为焦点，长半轴为2的椭圆. 它的短半轴 $b = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$ ，

故曲线 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

3分

(II) 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，其坐标满足

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + 1. \end{cases}$$

消去 y 并整理得 $(k^2 + 4)x^2 + 2kx - 3 = 0$ ，

故 $x_1 + x_2 = -\frac{2k}{k^2 + 4}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{3}{k^2 + 4}$.

5分

若 $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ ，即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

而 $y_1y_2 = k^2x_1x_2 + k(x_1 + x_2) + 1$,

$$\text{于是 } x_1x_2 + y_1y_2 = -\frac{3}{k^2+4} - \frac{3k^2}{k^2+4} - \frac{2k^2}{k^2+4} + 1 = 0,$$

化简得 $-4k^2 + 1 = 0$, 所以 $k = \pm \frac{1}{2}$. 8分

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad |\overline{OA}|^2 - |\overline{OB}|^2 &= x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2) \\ &= (x_1^2 - x_2^2) + 4(1 - x_1^2 - 1 + x_2^2) \\ &= -3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \\ &= \frac{6k(x_1 - x_2)}{k^2 + 4}. \end{aligned}$$

因为 A 在第一象限, 故 $x_1 > 0$. 由 $x_1x_2 = -\frac{3}{k^2+4}$ 知 $x_2 < 0$, 从而 $x_1 - x_2 > 0$. 又 $k > 0$,

$$\text{故 } |\overline{OA}|^2 - |\overline{OB}|^2 > 0,$$

即在题设条件下, 恒有 $|\overline{OA}| > |\overline{OB}|$. 12分

21. 本小题主要考查等差数列, 等比数列, 数学归纳法, 不等式等基础知识, 考查综合运用数学知识进行归纳、总结、推理、论证等能力. 满分12分.

解:

$$\text{(I)} \quad \text{由条件得 } 2b_n = a_n + a_{n+1}, \quad a_{n+1}^2 = b_n b_{n+1}$$

由此可得

$$a_2 = 6, \quad b_2 = 9, \quad a_3 = 12, \quad b_3 = 16, \quad a_4 = 20, \quad b_4 = 25. \quad \text{2分}$$

$$\text{猜测 } a_n = n(n+1), \quad b_n = (n+1)^2. \quad \text{4分}$$

用数学归纳法证明:

①当 $n=1$ 时, 由上可得结论成立.

②假设当 $n=k$ 时, 结论成立, 即

$$a_k = k(k+1), \quad b_k = (k+1)^2,$$

那么当 $n=k+1$ 时,

$$a_{k+1} = 2b_k - a_k = 2(k+1)^2 - k(k+1) = (k+1)(k+2), \quad b_{k+1} = \frac{a_{k+1}^2}{b_k} = (k+2)^2.$$

所以当 $n=k+1$ 时, 结论也成立.

由①②, 可知 $a_n = n(n+1)$, $b_n = (n+1)^2$ 对一切正整数都成立. 7分

$$(II) \frac{1}{a_1+b_1} = \frac{1}{6} < \frac{5}{12}.$$

$n \geq 2$ 时, 由(I)知 $a_n + b_n = (n+1)(2n+1) > 2(n+1)n$. 9分

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{1}{a_1+b_1} + \frac{1}{a_2+b_2} + \dots + \frac{1}{a_n+b_n} &< \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

综上, 原不等式成立. 12分

22. 本小题主要考查函数的导数, 单调性, 极值, 不等式等基础知识, 考查综合利用数学知识分析问题、解决问题的能力. 满分14分.

解: (I) $f'(x) = \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln x}{(1+x)^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = -\frac{\ln x}{(1+x)^2}$. 2分

故当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$,

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减. 4分

由此知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的极大值为 $f(1) = \ln 2$, 没有极小值. 6分

(II) (i) 当 $a \leq 0$ 时,

$$\text{由于 } f(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x) - x\ln x}{1+x} = \frac{\ln(1+x) + x[\ln(1+x) - \ln x]}{1+x} > 0,$$

故关于 x 的不等式 $f(x) \geq a$ 的解集为 $(0, +\infty)$. 10分

(ii) 当 $a > 0$ 时, 由 $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 知 $f(2^n) = \frac{\ln 2^n}{1+2^n} + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$, 其中 n 为

正整数, 且有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < e^{\frac{a}{2}} - 1 \Leftrightarrow n > -\log_2(e^{\frac{a}{2}} - 1).$$
 12分

$$\text{又 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{\ln 2^n}{1+2^n} = \frac{n \ln 2}{1+(1+1)^n} < \frac{n \ln 2}{n(n-1)} = \frac{2 \ln 2}{n-1}.$$

$$\text{且 } \frac{2\ln 2}{n-1} < \frac{a}{2} \Leftrightarrow n > \frac{4\ln 2}{a} + 1.$$

取整数 n_0 满足 $n_0 > -\log_2(e^{\frac{n}{2}} - 1)$, $n_0 > \frac{4\ln 2}{a} + 1$, 且 $n_0 \geq 2$,

$$\text{则 } f(2^{n_0}) = \frac{n_0 \ln 2}{1+2^{n_0}} + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n_0}}\right) < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a,$$

即当 $a > 0$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq a$ 的解集不是 $(0, +\infty)$.

综合 (i) (ii) 知, 存在 a , 使得关于 x 的不等式 $f(x) \geq a$ 的解集为 $(0, +\infty)$, 且 a 的

取值范围为 $(-\infty, 0]$.

14分