2007年江西高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至4页，共150分．

第Ⅰ卷

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上．考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名、考试科目"与考生本人准考证号、姓名是否一致．
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答．若在试题卷上作答，答案无效．
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回．

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件A、B相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．化简 $\frac{2+4i}{(1+i)^2}$ 的结果是

A．$2+i$　　B．$-2+i$　　C．$2-i$　　D．$-2-i$

2．$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{x-1}$

A．等于0　　B．等于1　　C．等于3　　D．不存在

3．若 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=3$，则 $\cot\alpha$ 等于

A．-2　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

4．已知$(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})^n$展开式中，各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为64，则n等于

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

5．若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则下列命题中正确的是

A. $\sin x<\frac{3}{\pi}x$　　B. $\sin x>\frac{3}{\pi}x$　　C. $\sin x<\frac{4}{\pi^2}x^2$　　D. $\sin x>\frac{4}{\pi^2}x^2$

6. 若集合 $M=\{0,1,2\}, N=\{(x,y)\mid x-2y+1\ge 0$ 且 $x-2y-1\le 0, x,y\in M\}$，则 N 中元素的个数为

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 2

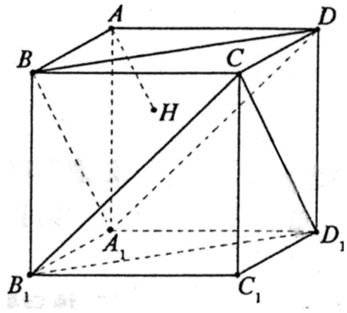
7. 如图，正方体 AC_1 的棱长为 1，过点 A 作平面 A_1BD 的垂线，垂足为点 H. 则以下命题中，错误的命题是

A. 点 H 是△A_1BD 的垂心

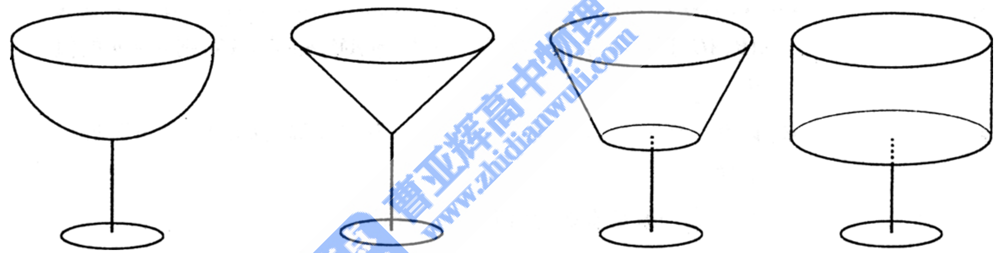
B. AH 垂直平面 CB_1D_1

C. AH 的延长线经过点 C_1

D. 直线 AH 和 BB_1 所成角为 45°



8. 四位好朋友在一次聚会上，他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯，如图所示．盛满酒后他们约定：先各自饮杯中酒的一半．设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1，h_2，h_3，h_4，则它们的大小关系正确的是



A. $h_2>h_1>h_4$　　B. $h_1>h_2>h_3$　　C. $h_3>h_2>h_4$　　D. $h_2>h_4>h_1$

9. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\frac{1}{2}$，右焦点为 $F(c,0)$，方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2，则点 $P(x_1,x_2)$

A. 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内　　B. 必在圆 $x^2+y^2=2$ 上

C. 必在圆 $x^2+y^2=2$ 外　　D. 以上三种情形都有可能

10. 将一个骰子连续抛掷三次，它落地时向上的点数依次成等差数列的概率为

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{15}$　　D. $\frac{1}{18}$

11. 设函数 $f(x)$ 是 R 上以 5 为周期的可导偶函数，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线的斜率为

A. $-\frac{1}{5}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{5}$　　D. 5

12. 设 $p: f(x)=e^x+\ln x+2x^2+mx+1$ 在 (0，+∞) 内单调递增，$q: m\ge -5$，则 p 是 q 的

A．充分不必要条件　　　　　　　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

第Ⅱ卷

注意事项：

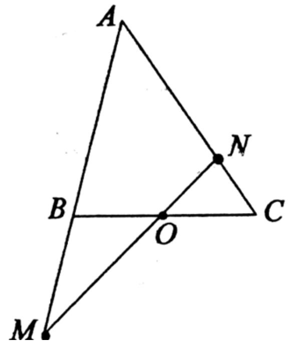
第Ⅱ卷 2 页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答．若在试题卷上作答，答案无效．

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．请把答案填在答题卡上．

13. 设函数 $y=4+\log_2(x-1)(x\geqslant 3)$，则其反函数的定义域为________________.

14. 已知数列$\{a_n\}$对于任意 p，$q\in N^*$，有 $a_p+a_q=a_{p+q}$，若 $a_1=\dfrac{1}{9}$，则 $a_{36}=$______________.

15. 如图，在△ABC中，点 O 是 BC 的中点，过点 O 的直线分别交直线 AB、AC 于不同的两点 M、N，若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，则 $m+n$ 的值为__________.



16. 设有一组圆 $C_k:(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4(k\in N^*)$．下列四个命题：

A．存在一条定直线与所有的圆均相切

B．存在一条定直线与所有的圆均相交

C．存在一条定直线与所有的圆均不相交

D．所有的圆均不经过原点

其中真命题的代号是__________．（写出所有真命题的代号）

三．解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

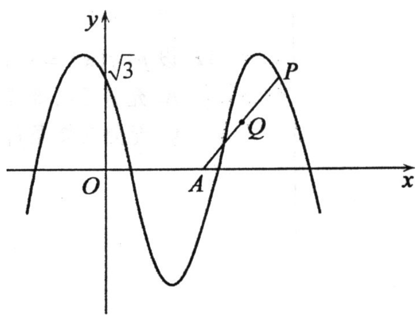
已知函数 $f(x)=\begin{cases} cx+1 & (0<x<c) \\ 2^{-\frac{x}{c^2}}+k & (c\leq x<1) \end{cases}$ 在区间（0，1）内连续，且 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$.

（1）求实数 k 和 c 的值；

（2）解不等式 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$

18．（本小题满分 12 分）

如图，函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)(x\in R,0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2})$ 的图象与 y 轴交于点(0，$\sqrt{3}$)，且在该点处切线的斜率为一 2．



（1）求 θ 和 ω 的值；

（2）已知点 $A(\dfrac{\pi}{2}$，0)，点 P 是该函数图象上一点，点 $Q(x_0$，$y_0)$ 是 PA 的中点，当 $y_0=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x_0\in[\frac{\pi}{2}，\pi]$时，求 x_0的值.

19.（本小题满分 12 分）

某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品，制作过程必须先后经过两次烧制，当第一次烧制合格后方可进入第二次烧制，两次烧制过程相互独立. 根据该厂现有的技术水平，经过第一次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.5，0.6，0.4. 经过第二次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.6，0.5，0.75.

（1）求第一次烧制后恰有一件产品合格的概率；

（2）经过前后两次烧制后，合格工艺品的个数为 ξ，求随机变量 ξ 的期望.

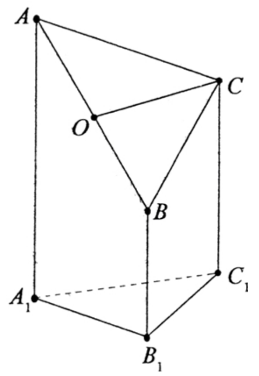
20.（本小题满分 12 分）

右图是一个直三棱柱（以 $A_1B_1C_1$ 为底面）被一平面所截得到的几何体，截面为 ABC. 已知 $A_1B_1=B_1C_1=1$，$\angle A_1B_1C_1=90°$，$AA_1=4$，$BB_1=2$，$CC_1=3$.

（1）设点 O 是 AB 的中点，证明：$OC//$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）求二面角 $B—AC—A_1$ 的大小；

（3）求此几何体的体积.

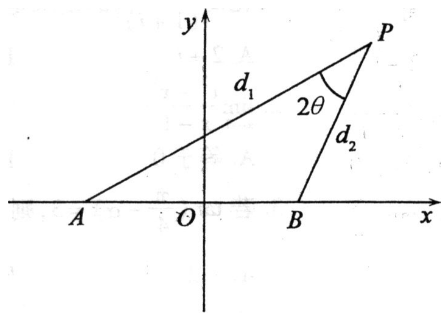


21.（本小题满分 12 分）

设动点 P 到点 $A(-1，0)$ 和 $B(1，0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2，$\angle APB=2\theta$，且存在常数 $\lambda(0<\lambda<1=$，使得 $d_1d_2\sin^2\theta=\lambda$.

（1）证明：动点 P 的轨迹 C 为双曲线，并求出 C 的方程；

（2）过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M、N 两点，试确定 λ 的范围，使 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，其中点 0 为坐标原点.



22.（本小题满分 14 分）

设正整数数列$\{a_n\}$满足：$a_2=4$，且对于任何 $n\in N^*$，有 $2+\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{\frac{1}{a_n+a_{n+1}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}<2+\frac{1}{a_n}$.

（1）求 a_1，a_3；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项 a_n.

参考答案

一、选择题

1．C　　2．B　　3．A　　4．C　　5．D

6．C　　7．D　　8．A　　9．A　　10．B

11．B　　12．B

二、填空题

13．$[5,+\infty)$　　14．4　　15．2　　16．B，D

三、解答题

17．解：（1）因为$0<c<1$，所以$c^2<c$，

由$f(c^2)=\dfrac{9}{8}$，即$c^3+1=\dfrac{9}{8}$，$c=\dfrac{1}{2}$．

又因为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1 & \left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2^{-4x}+k & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x<1\right)\end{cases}$在$x=\dfrac{1}{2}$处连续，

所以$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{-2}+k=\dfrac{5}{4}$，即$k=1$．

（2）由（1）得：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1 & \left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2^{-4x}+1 & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x<1\right)\end{cases}$

由$f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$得，当$0<x<\dfrac{1}{2}$时，解得$\dfrac{\sqrt{2}}{4}<x<\dfrac{1}{2}$．

当$\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$时，解得$\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{5}{8}$，

所以$f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$的解集为$\left\{x\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}<x<\dfrac{5}{8}\right.\right\}$．

18．解：（1）将$x=0$，$y=\sqrt{3}$代入函数$y=2\cos(\omega x+\theta)$得$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{6}$．

又因为 $y'=-2\omega\sin(\omega x+\theta)$，$y'|_{x=0}=-2$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\omega=2$，

因此 $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

（2）因为点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$，$Q(x_0,\ y_0)$ 是 PA 的中点，$y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(2x_0-\dfrac{\pi}{2},\sqrt{3}\right)$.

又因为点 P 在 $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象上，所以 $\cos\left(4x_0-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_0\leqslant\pi$，所以 $\dfrac{7\pi}{6}\leqslant 4x_0-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant\dfrac{19\pi}{6}$，

从而得 $4x_0-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{6}$ 或 $4x_0-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{13\pi}{6}$.

即 $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $x_0=\dfrac{3\pi}{4}$.

19．解：分别记甲、乙、丙经第一次烧制后合格为事件 A_1，A_2，A_3，

（1）设 E 表示第一次烧制后恰好有一件合格，则

$$P(E)=P(A_1\cdot\overrightarrow{A_2}\cdot\overrightarrow{A_3})+(\overrightarrow{A_1}\cdot A_2\cdot\overrightarrow{A_3})+p(\overrightarrow{A_1}\cdot\overrightarrow{A_2}\cdot A_3)$$

$$=0.5\times0.4\times0.6+0.5\times0.6\times0.6+0.5\times0.4\times0.4=0.38.$$

（2）解法一：因为每件工艺品经过两次烧制后合格的概率均为 $p=0.3$，

所以 $\xi\sim B(3,0.3)$，

故 $E\xi=np=3\times0.3=0.9$.

解法二：分别记甲、乙、丙经过两次烧制后合格为事件 A，B，C，则

$P(A)=P(B)=P(C)=0.3$，

所以 $P(\xi=0)=(1-0.3)^3=0.343$，

$P(\xi=1)=3\times(1-0.3)^2\times0.3=0.441$，

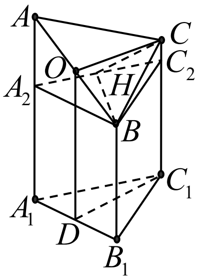
$P(\xi=2)=3\times0.3^2\times0.7=0.189$，

$P(\xi=3)=0.3^3=0.027$.

于是，$E(\xi)=1\times0.441+2\times0.189+3\times0.027=0.9$.

20．解法一：

（1）证明：作 $OD \parallel AA_1$ 交 A_1B_1 于 D，连 C_1D．



则 $OD \parallel BB_1 \parallel CC_1$．

因为 O 是 AB 的中点，

所以 $OD=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1)=3=CC_1$．

则 ODC_1C 是平行四边形，因此有 $OC \parallel C_1D$．

$C_1D \subset$ 平面 $C_1B_1A_1$ 且 $OC \not\subset$ 平面 $C_1B_1A_1$，

则 $OC \parallel$ 面 $A_1B_1C_1$．

（2）如图，过 B 作截面 $BA_2C_2 \parallel$ 面 $A_1B_1C_1$，分别交 AA_1，CC_1 于 A_2，C_2．

作 $BH \perp A_2C_2$ 于 H，连 CH．

因为 $CC_1 \perp$ 面 BA_2C_2，所以 $CC_1 \perp BH$，则 $BH \perp$ 平面 A_1C．

又因为 $AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{3} \Rightarrow AB^2=BC^2+AC^2$．

所以 $BC \perp AC$，根据三垂线定理知 $CH \perp AC$，所以 $\angle BCH$ 就是所求二面角的平面角．

因为 $BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\angle BCH=\frac{BH}{BC}=\frac{1}{2}$，故 $\angle BCH=30^\circ$，

即：所求二面角的大小为 30°．

（3）因为 $BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$V_{B-AA_2C_2C}=\frac{1}{3}S_{AA_2C_2C}\cdot BH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+2)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

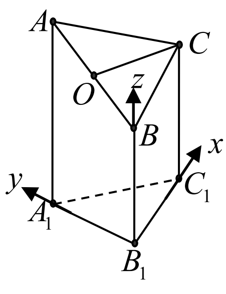
$$V_{A_1B_1C_1-A_2BC_2}=S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot BB_1=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

所求几何体体积为

$$V=V_{B-AA_2C_2C}+V_{A_1B_1C_1-A_2BC_2}=\frac{3}{2}.$$

解法二：

（1）如图，以 B_1 为原点建立空间直角坐标系，



则 $A(0,1,4)$，$B(0,0,2)$，$C(1,0,3)$，因为 O 是 AB 的中点，所以 $O\left(0,\dfrac{1}{2},3\right)$，

$\overrightarrow{OC}=\left(1,-\dfrac{1}{2},0\right)$.

易知，$\vec{n}=(0,0,1)$ 是平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{OC}\cdot\vec{n}=0$，$OC\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 OC // 平面 $A_1B_1C_1$.

（2）$\overrightarrow{AB}=(0,-1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,0,1)$，

设 $\overrightarrow{m}=(x，y，z)$ 是平面 ABC 的一个法向量，则

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{m}=0,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{m}=0$ 得：$\begin{cases}-y-2z=0\\x+z=0\end{cases}$

取 $x=-z=1$，$\overrightarrow{m}=(1,2,-1)$.

显然，$\vec{l}=(1,1,0)$ 为平面 AA_1C_1C 的一个法向量.

则 $\cos<\overrightarrow{m},\vec{l}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\vec{l}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\vec{l}|}=\dfrac{1+2+0}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

结合图形可知所求二面角为锐角.

所以二面角 $B-AC-A_1$ 的大小是 30°.

（3）同解法一.

21．解法一：（1）在 $\triangle PAB$ 中，$\left|AB\right|=2$，即 $2^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos 2\theta$，

$4=(d_1-d_2)^2+4d_1d_2\sin^2\theta$，即 $\left|d_1-d_2\right|=\sqrt{4-4d_1d_2\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\lambda}<2$（常数），

点 P 的轨迹 C 是以 $A，B$ 为焦点，实轴长 $2a=2\sqrt{1-\lambda}$ 的双曲线.

方程为：$\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$.

（2）设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$

①当 MN 垂直于 x 轴时，MN 的方程为 $x=1$，$M(1,1)$，$N(1,-1)$ 在双曲线上.

即 $\dfrac{1}{1-\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，因为 $0<\lambda<1$，所以

$\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

②当 MN 不垂直于 x 轴时，设 MN 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得：$\left[\lambda-(1-\lambda)k^2\right]x^2+2(1-\lambda)k^2x-(1-\lambda)(k^2+\lambda)=0$，

由题意知：$\left[\lambda-(1-\lambda)k^2\right]\neq 0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-2k^2(1-\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-(1-\lambda)(k^2+\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$.

于是：$y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{k^2\lambda^2}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$.

因为 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，且 M，N 在双曲线右支上，所以

$$\begin{cases}x_1x_2+y_1y_2=0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2=\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}\\ k^2>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\\ \lambda^2+\lambda-1>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\lambda<\dfrac{2}{3}.$$

由①②知，$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\lambda<\dfrac{2}{3}$.

解法二：（1）同解法一

（2）设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，MN 的中点为 $E(x_0，y_0)$.

①当 $x_1=x_2=1$ 时，$|MB|^2=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}-\lambda=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda-1=0$，

因为 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；

②当 $x_1\neq x_2$ 时，$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{1-\lambda}-\dfrac{y_1^2}{\lambda}=1\\ \dfrac{x_2^2}{1-\lambda}-\dfrac{y_2^2}{\lambda}=1\end{cases}\Rightarrow k_{MN}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$.

又 $k_{MN}=k_{BE}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$. 所以 $(1-\lambda)y_0^2=\lambda x_0^2-\lambda x_0$；

由$\angle MON=\dfrac{\pi}{2}$得$x_0^2+y_0^2=\left(\dfrac{|MN|}{2}\right)^2$，由第二定义得$\left(\dfrac{|MN|}{2}\right)^2=\left[\dfrac{e(x_1+x_2)-2a}{2}\right]^2$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda}}x_0-\sqrt{1-\lambda}\right)^2=\dfrac{1}{1-\lambda}x_0^2+(1-\lambda)-2x_0$.

所以$(1-\lambda)y_0^2=\lambda x_0^2-2(1-\lambda)x_0+(1-\lambda)^2$.

于是由$\begin{cases}(1-\lambda)y_0^2=\lambda x_0^2-\lambda x_0\\(1-\lambda)y_0^2=\lambda x_0^2-2(1-\lambda)x_0+(1-\lambda)^2\end{cases}$得$x_0=\dfrac{(1-\lambda)^2}{2-3\lambda}$

因为$x_0>1$，所以$\dfrac{(1-\lambda)^2}{2-3\lambda}>1$，又$0<\lambda<1$，

解得：$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\lambda<\dfrac{2}{3}$．由①②知$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\lambda<\dfrac{2}{3}$.

22．解：（1）据条件得$2+\dfrac{1}{a_{n+1}}<n(n+1)\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)<2+\dfrac{1}{a_n}$　　①

当$n=1$时，由$2+\dfrac{1}{a_2}<2\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}\right)<2+\dfrac{1}{a_1}$，即有$2+\dfrac{1}{4}<\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{2}{4}<2+\dfrac{1}{a_1}$，

解得$\dfrac{2}{3}<a_1<\dfrac{8}{7}$．因为$a_1$为正整数，故$a_1=1$.

当$n=2$时，由$2+\dfrac{1}{a_3}<6\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{a_3}\right)<2+\dfrac{1}{4}$，

解得$8<a_3<10$，所以$a_3=9$.

（2）方法一：由$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，猜想：$a_n=n^2$.

下面用数学归纳法证明．

1°当$n=1$，2时，由（1）知$a_n=n^2$均成立；

2°假设$n=k(k\geqslant 2)$成立，则$a_k=k^2$，则$n=k+1$时

由①得$2+\dfrac{1}{a_{k+1}}<k(k+1)\left(\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)<2+\dfrac{1}{k^2}$

$\Rightarrow\dfrac{k^2(k+1)}{k^2-k+1}<a_{k+1}<\dfrac{k(k^2+k-1)}{k-1}$

$\Rightarrow (k+1)^2-\dfrac{(k+1)^2}{k^2+1}<a_{k+1}<(k+1)^2+\dfrac{1}{k-1}$

因为$k\geqslant 2$时，$(k^2+1)-(k+1)^2=k(k+1)(k-2)\geqslant 0$，所以$\dfrac{(k+1)^2}{k^2+1}\in(0,1]$.

$k-1\geqslant 1$，所以$\dfrac{1}{k-1}\in(0,1]$.

又$a_{k+1}\in\mathbf{N}^*$，所以$(k+1)^2\leqslant a_{k+1}\leqslant(k+1)^2$.

故$a_{k+1}=(k+1)^2$，即$n=k+1$时，$a_n=n^2$成立.

由1°，2°知，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=n^2$.

（2）方法二：

由$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，猜想：$a_n=n^2$.

下面用数学归纳法证明.

1°当$n=1$，2时，由（1）知$a_n=n^2$均成立；

2°假设$n=k(k\geqslant 2)$成立，则$a_k=k^2$，则$n=k+1$时

由①得$2+\dfrac{1}{a_{k+1}}<k(k+1)\left(\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)<2+\dfrac{1}{k^2}$

即$2+\dfrac{1}{a_{k+1}}<\dfrac{k+1}{k}+\dfrac{k(k+1)}{a_{k+1}}<2+\dfrac{1}{k^2}$ ②

由②左式，得$\dfrac{k-1}{k}<\dfrac{k^2+k-1}{a_{k+1}}$，即$(k-1)a_{k+1}<k^3+k^2-k$，因为两端为整数，

则$(k-1)a_{k+1}\leqslant k^3+k^2-k-1=(k+1)^2(k-1)$．于是$a_{k+1}\leqslant(k+1)^2$ ③

又由②右式，$\dfrac{k(k+1)}{a_{k+1}}<\dfrac{2k^2+1-k(k+1)}{k^2}=\dfrac{k^2-k+1}{k^2}$.

则$(k^2-k+1)a_{k+1}>k^3(k+1)$.

因为两端为正整数，则$(k^2-k+1)a_{k+1}\geqslant k^4+k^3+1$，

所以$a_{k+1}\geqslant\dfrac{k^4+k^3+1}{k^2-k+1}=(k+1)^2-\dfrac{k}{k^2-k+1}$.

又因$k\geqslant 2$时，a_{k+1}为正整数，则$a_{k+1}\geqslant(k+1)^2$ ④

据③④$a_{k+1}=(k+1)^2$，即$n=k+1$时，$a_n=n^2$成立.

由 1°，2°知，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=n^2$.