

2013年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学文史类

【试卷总评】本试卷共有 24 个问题，其中 1—12 题为选择题，13—16 为填空题，17—21 为必做解答题，22—24 为选做解答题，满分 150 分，具体考点如下：

一、选择题考点一览表：

题号	主要考点
1	复数的基本运算、复数的几何意义
2	充要条件的判定
3	分层抽样的基本运算
4	函数的基本性质
5	正弦定理的应用
6	基本初等函数的图像
7	三视图
8	向量的四则运算
9	几何概型

这 9 道选择题中，第 1-6 为基础题，注重基础知识的考查、基本公式的应用、基本图像的观察以及基本思想的渗透，第 7 题注重空间想象能力的考查，第 8、9 题注重数形结合能力的培养，尤其是第 9 题，与平面几何知识想结合；总体老说，这 9 道问题难度相对较低，无偏题怪题；

二、填空题考点一览表：

题号	主要考点
10	集合的基本运算
11	参数方程
12	算法与程序框图
13	线性规划问题
14	双曲线的定义及性质
15	新定义数列

6道填空题中，10-14注重基本公式的考查，15注重源于平常练习中的习题，但是难度略高于练习，要求学生有一定的创新能力；

三、解答题考点说明表：

题号	主要考点
16	三角函数的计算、三角恒等变换
17	线面垂直的判定及其性质、柱体的体积公式
18	概率的基本计算、互斥事件的概率
19	数列前 n 项和与通项公式关系、错位相减法
20	圆锥曲线定义、直线与圆锥曲线关系
21	导数与函数

第 16 题：本题为三角函数，第（1）问，考查简单的三角函数的计算；第（2）问考查三角恒等变换知识，包括降幂升角，以及解不等式，考查学生的基本功是否扎实；本题难度不大；

第 17 题：本题为立体几何问题，第（1）问考查线线垂直，学生必须对线线垂直进行转化，通过线面垂直来证明线线垂直，进而找到解题思路；第（2）问为柱体体积公式的计算，且边的长度都是熟悉的，平时训练过的；本题难度不大；

第 18 题：本题为概率与统计问题，第（1）小题考查学生的观察能力与数据处理能力，需要学生在读懂问题、读懂图形的基础上加以处理数据，进而得到平均数；第（2）小题需要学生先分析清楚“至少为 48kg”的情况，然后使用互斥事件的加法原理进行运算；本题数据相对简单，总体难度不大；

第 19 题：本题为数列求和问题，试题较为注重基础知识的考查，第（1）问，求通项公式，学生必须利用好前 n 项和公式与通项公式之间的关系进行求解，此时必须注意分类，即对 $n=1, n \geq 2$ 进行分类讨论，进而得到通项公式；第（2）问考查错位相减法，相对比较模式化的解题，且计算也比较简单；本题总体难度不大；

第 20 题：本题为圆锥曲线问题，试题以对称问题为背景，第（1）小题运用点关于直线对称的解题方法进行求解，求出圆心，进而确定半径，强调一个数形结合的能力；第（2）问知识的综合性较强，考查了直线与圆锥曲线的关系以及基本不等式的应用，需要学生有着扎实的基本功以及一定的

处理综合问题的能力，将问题化归与转化，进而得到直线的方程；本题难度相比之前的问题而言有了本质的提升，本题为中难题；

第 21 题，本题为函数与方程问题，第（1）问为基本题，考查学生的基本求导能力以及运算能力；第二问需要学生对问题有一定的转化与化归能力，适当将问题进行转化，进而求解，本题为中难题

总体来说 2013 湖南数学文科卷的难度相比仅在 21、22 出现了相对综合的情况，次试卷注重基础知识与基本能力的考查，这就要求老师们在平日教学的过程中注重培养学生的能力。

本试卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 5 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

一、选择题：本大题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z=i \cdot (1+i)$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B;

【解析】 $z = i(1+i) = i+i^2 = -1+i$ ，故对应的点在第二象限.

【学科网考点定位】 本题考查复数的四则运算以及复数的几何意义，考查学生的基本运算能力.

2. “ $1 < x < 2$ ” 是 “ $x < 2$ ” 成立的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A;

【解析】 “ $1 < x < 2$ ” \Rightarrow “ $x < 2$ ”，反之不成立.

【学科网考点定位】 本题考查充要条件的判定，考查学生的逻辑推理能力.

3. 某工厂甲、乙、丙三个车间生产了同一种产品，数量分别为 120 件，80 件，60 件。为了解它们的产品质量是否存在显著差异，用分层抽样方法抽取了一个容量为 n 的样本进行调查，其中从丙车间的产品中抽取了 3 件，则 $n =$ ()

- A. 9 B. 10 C. 12 D. 13

【答案】 B;

【解析】 由分层抽样定义可知： $\frac{60}{200} = \frac{3}{n}$ ，故 $n=10$.

【学科网考点定位】 本题考查分层抽样，考查学生的基本运算能力.

4. 已知 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，且 $f(-1) + g(1) = 2$ ， $f(1) + g(-1) = 4$ ，则 $g(1)$ 等于 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】 B;

【解析】 因为 $\begin{cases} -f(1) + g(1) = 2 \\ f(1) + g(1) = 4 \end{cases}$ ，两式相加可得 $g(1) = 3$.

【学科网考点定位】 本题考查函数的奇偶性，考查学生的化归与转化能力.

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B 所对的边长分别为 a, b. 若 $2a \sin B = \sqrt{3} b$ ，则角 A 等于 ()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$

【答案】 A;

【解析】 因为 $2a \sin B = \sqrt{3} b$ ，所以 $\frac{\sin B}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a}$ ，所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

【学科网考点定位】 本题考查正弦定理的运用，考查学生的化归与转化能力.

6. 函数 $f(x) = \ln x$ 的图像与函数 $g(x) = x^2 - 4x + 4$ 的图像的交点个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 C;

【解析】 在同一直角坐标系中分别作出两个函数的图像，可知有两个交点.



【学科网考点定位】 本题考查基本初等函数的图像，考查学生数形结合的能力.

7. 已知正方体的棱长为 1，其俯视图是一个面积为 1 的正方形，侧视图是一个面积为 $\sqrt{2}$ 的矩形，则该正方体的正视图的面积等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】 D;

【解析】 依题意，正视图面积为 $S = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$.

【学科网考点定位】 本题考查三视图，考查学生的空间想象能力.

8. 已知 a, b 是单位向量， $a \cdot b = 0$. 若向量 c 满足 $|c - a - b| = 1$, 则 $|c|$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$

【答案】 C;

【解析】 因为 $|\bar{c} - \bar{a} - \bar{b}| = 1$, $|\bar{c} - (\bar{a} + \bar{b})| = 1$, 做出图形可知, 当且仅当 \bar{c} 与 $(\bar{a} + \bar{b})$ 方向相反且 $|\bar{c}| - |\bar{a} + \bar{b}| = 1$ 时, $|\bar{c}|$ 取到最大值, 最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

【学科网考点定位】 本题考查向量的基本运算，考查学生数形结合的能力.

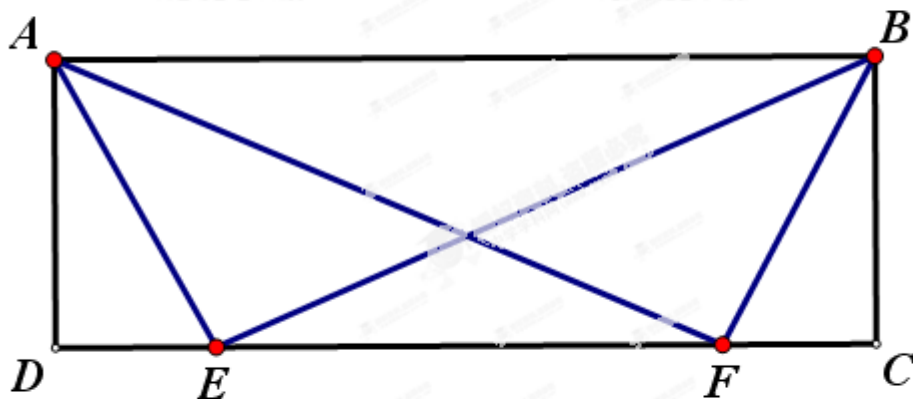
9. 已知事件“在矩形 ABCD 的边 CD 上随机取一点 P, 使 $\triangle APB$ 的最大边是 AB”发生的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{AD}{AB} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】D;

【解析】如图所示, 设 $AB=4$, 因为使 $\triangle APB$ 的最大边是“AB”发生的概率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $EF=2$, $CF=DE=1$,

所以根据勾股定理 $DF = \sqrt{AF^2 - AD^2} = \sqrt{16 - AD^2} = 3$, 所以 $AD = \sqrt{7}$, 所以 $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.



【学科网考点定位】 本题考查几何概型以及基本的几何计算, 考查学生的数形结合能力.

本解析为学科网名师解析团队原创, 授权学科网独家使用, 如有盗用, 依法追责!

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

10. 已知集合 $U = \{2, 3, 6, 8\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 6, 8\}$, 则 $(C_U A) \cap B =$ _____

【答案】 $\{6, 8\}$;

【解析】 $C_U A = \{6, 8\}$, $(C_U A) \cap B = \{6, 8\}$.

【学科网考点定位】 本题考查集合的基本运算, 考查学生的逻辑推理能力.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $l_1: \begin{cases} x = 2s + 1, \\ y = s \end{cases}$ (s 为参数) 和直线 $l_2: \begin{cases} x = at, \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ (t 为参数)

平行, 则常数 a 的值为 _____

【答案】 $a = 4$;

【解析】 $l_1: y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $l_2: y = \frac{2x}{a} - 1$, 因为两直线平行, 所以 $a = 4$.

【学科网考点定位】 本题考查直线的参数方程以及两直线平行的充要条件, 考查学生的化归与转化能力.

12. 执行如图 1 所示的程序框图，如果输入 $a=1, b=2$ ，则输出的 a 的值为_____

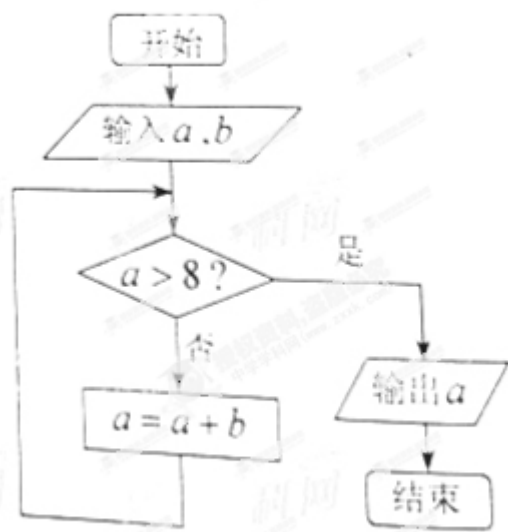


图 1

【答案】 9;

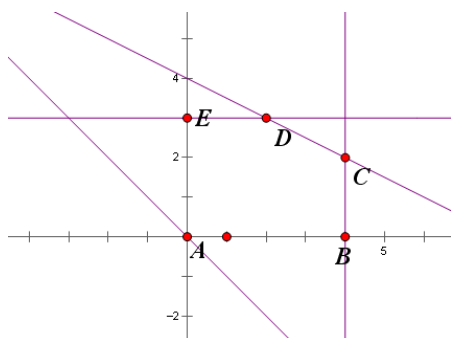
【解析】 第一步， $a=1+2=3$ ；第二步， $a=3+2=5$ ；第三步， $a=5+2=7$ ；第四步， $a=7+2=9$

【学科网考点定位】 本题考查算法与程序框图，考查学生的逻辑推理能力.

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 8, \\ 0 \leq x \leq 4, \\ 0 \leq y \leq 3, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值为_____

【答案】 6;

【解析】 如图所示，当直线 $y = -x + z$ 过 $C(4,2)$ 时， $x+y$ 有最大值，最大值为 6.



【学科网考点定位】 本题考查线性规划知识，考查学生的数形结合的能力.

14. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的两个焦点。若在 C 上存在一点 P 。使

$PF_1 \perp PF_2$, 且 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 则 C 的离心率为_____.

【答案】 $\sqrt{3} + 1$;

【解析】 $|PF_2| = x, |PF_1| = \sqrt{3}x, |F_1F_2| = 2x$, 所以 $2c = 2x, 2a = (\sqrt{3} - 1)x$, 故 $e = \frac{2c}{2a} = \sqrt{3} + 1$.

【学科网考点定位】 本题考查双曲线的基本性质, 考查学生数形结合的能力.

15. 对于 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ 的子集 $X = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$, 定义 X 的“特征数列”

为 x_1, x_2, \dots, x_{100} , 其中 $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 1$. 其余项均为 0, 例如子集 $\{a_2, a_3\}$ 的

“特征数列”为 0, 1, 0, 0, ..., 0

(1) 子集 $\{a_1, a_3, a_5\}$ 的“特征数列”的前三项和等于_____;

(2) 若 E 的子集 P 的“特征数列” p_1, p_2, \dots, p_{100} 满足 $p_1 + p_{i+1} = 1, 1 \leq i \leq 99$;

E 的子集 Q 的“特征数列” q_1, q_2, \dots, q_{100} 满足 $q_1 = 1, q_1 + q_{j+1} + q_{j+2} = 1,$

$1 \leq j \leq 98$, 则 $P \cap Q$ 的元素个数为_____.

【答案】 2; 17

【解析】 (1) 子集 $\{a_1, a_3, a_5\}$ 的“特征数列”为 1, 0, 1, 0, 1, 0, ..., 0, 故前 3 项和为 2; (2) 依题意, E 的子集 P 的“特征数列”为 1, 0, 1, 0, 1, 0, ..., 1; E 的子集 Q 的“特征数列”为 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, ..., 1, 0; 将目标转化为求数列 $M_n = 2n - 1$ 与数列 $L_n = 3n - 2$ 在 $1 \leq n \leq 100, n \in N$ 时有几个公共元素, 可知有 17 个.

【学科网考点定位】 本题考查创新型题, 考查学生的化归与转化能力.

本解析为学科网名师解析团队原创, 授权学科网独家使用, 如有盗用, 依法追责!

三、解答题; 本大题共 6 小题, 共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$

(1) 求 $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值;

(2) 求使 $f(x) < \frac{1}{4}$ 成立的 x 的取值集合

【答案】(1) $f(\frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{4}$;

(2) $f(x) = \cos x (\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x) = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x$
 $= \frac{1}{2} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{4}$, 因为 $f(x) < \frac{1}{4}$, 所以 $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) < 0$, 故 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$,

所以 $\frac{5\pi}{12} + k\pi < x < \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in Z$; 所以 x 的取值集合为 $\{x | \frac{5\pi}{12} + k\pi < x < \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in Z\}$

【解析】(1) 将 $x = \frac{2\pi}{3}$ 带入函数即可; (2) 先利用三角恒等变换化简 $f(x)$, 再解不等式.

【学科网考点定位】 本题主要考查三角函数的求值、三角恒等变换以及三角函数与不等式, 考查学生的基本运算能力以及化归与转化能力.

17.(本小题满分 12 分)

如图 2.在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=\sqrt{2}$, $AA_1=3$, D 是 BC 的中点, 点 E 在菱 BB_1 上运动.

(I) 证明: $AD \perp C_1E$;

(II) 当异面直线 AC, C_1E 所成的角为 60° 时,

求三棱锥 $C_1-A_1B_1E$ 的体积

【答案】(1) 因为直棱柱, 所以 $B_1B \perp$ 平面 ABC , 所以

$B_1B \perp AD$, 因为 $AB=AC$, 所以 $AD \perp BC$, 因为

$BC \cap BB_1 = B$, 所以 $AD \perp$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $AD \perp C_1E$;

(2) 因为 $CA // C_1A_1$, 所以 $\angle EC_1A_1 = 60^\circ$, 故 $A_1E = \sqrt{6}$,

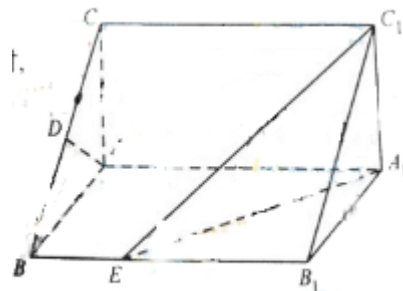
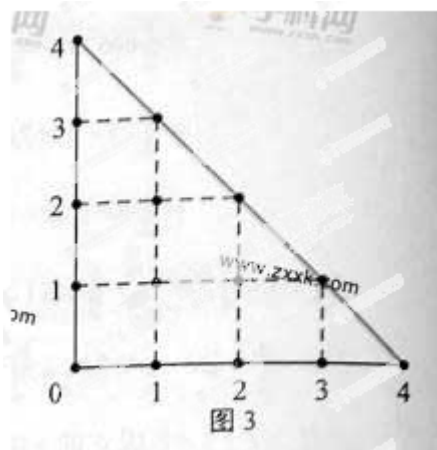


图 2

$$A_1B_1 = \sqrt{2}, \text{ 所以 } B_1E = 2, \text{ 所以 } V_{C-A_1B_1E} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1B_1E} \cdot A_1C_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3}.$$

【解析】(1) 先证明线面垂直，再证明线线垂直；(3) 利用勾股定理确定 $A_1B_1 = \sqrt{2}$ ，进而利用体积公式求出三棱锥的体积.

【学科网考点定位】 本题考查线面垂直的判定、线面垂直的性质、锥体的体积公式，考查学生的基本运算能力以及空间想象能力.



18. (本小题满分 12 分)

某人在如图 3 所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点（指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点）处都种了一株相同品种的作物。根据历年的种植经验，一株该种作物的年收获量 Y (单位: kg) 与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里，两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米。

(I) 完成下表,并求所种作物的平均年收获量;

Y	51	48	45	42
频数		4		

(II) 在所种作物中随机选取一株,求它的年收获量至少为 48kg 的概率.

【答案】(1) 所种作物的总株数为 15，其中相近作物株数为 1 的作物有 2 株，相近作物株数 2 的作物有 4 株，相近作物株数为 3 的作物有 6 株，相近作物株数为 4 的作物有 3 株，列表如下：

Y	51	48	45	42
频数	2	4	6	3

故平均数为 $\frac{51 \times 2 + 48 \times 4 + 42 \times 3}{15} = 46$ ；

(2) $P(Y = 51) = \frac{2}{15}$, $P(Y = 48) = \frac{4}{15}$ ，故在所选作物中选取一株，它的年收获量至少为 48Kg 的概率为 $P(Y \geq 48) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$ 。

【解析】(1) 先根据题意完成表格，再根据平均数的计算公式进行计算；(2) 根据互斥事件的加法法则进行计算。

【学科网考点定位】本题考查概率的基本运算，互斥事件的加法法则，考查学生的逻辑推理能力和基本计算能力。

19. (本小题满分 13 分)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 \neq 0$ ， $2a_n - a_1 = S_1 \cdot S_n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$

(I) 求 a_1 ， a_2 ，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和。

【答案】(I) 令 $n=1$ ，所以 $a_1 = a_1^2$ ，因为 $a_1 \neq 0$ ，所以 $a_1 = 1$ ；因为 $2a_2 - a_1 = a_1 \cdot (a_1 + a_2)$ ，

所以 $a_2 = 2$ ； $2a_n - 1 = S_n$ ，当 $n \geq 2$ 时， $2a_{n-1} - 1 = S_{n-1}$ ，两式对减， $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ ，所以 $a_n = 2^{n-1}$ ；

(II) $na_n = n2^{n-1}$ ，记 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 B_n ，

$$B_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}；$$

$$2B_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$\text{两式对减 } B_n = 1 + (n-1) \cdot 2^n.$$

【解析】(I) 令 $n=1, 2$ 分别求出 a_1, a_2 , 再利用数列前 n 项和与通项公式之间的关系求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (II) 使用错位相减法求出数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

【学科网考点定位】 本题考查数列的基本运算、数列前 n 项和与通项公式之间的关系、错位相减法, 考查学生的基本运算能力以及化归与转化能力.

20. (本小题满分 13 分)

已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的左、右焦点 F_1, F_2 关于直线 $x + y - 2 = 0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点.

(I) 求圆 C 的方程;

(II) 设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a, b . 当 ab 最大时, 求直线 l 的方程.

【答案】(I) $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 左、右焦点 F_1, F_2 关于直线 $x + y - 2 = 0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点, 即左、右焦点 F_1, F_2 的重点关于直线的对称点即为圆心, 设圆心的坐标为

$$(x_0, y_0), \text{ 有 } \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 \\ \frac{x_0}{2} + \frac{y_0}{2} - 2 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases}, \text{ 所以圆的方程为 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4;$$

(II) 依题意, 设直线的方程为 $x = my + 2$, 则圆心到直线的距离 $d = \frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}$, 所以

$$b = 2\sqrt{2^2 - d^2} = \frac{4}{\sqrt{1+m^2}}, \text{ 由 } \begin{cases} x = my + 2 \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (m^2 + 5)y^2 + 4my - 1 = 0, \text{ 设 } l \text{ 与 } E \text{ 的两个交点坐}$$

标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-4m}{m^2 + 5}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 5}$, 所以

$$a = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \frac{2\sqrt{5}(m^2+1)}{m^2+5}, \text{ 从而 } ab = \frac{8\sqrt{5}\sqrt{(m^2+1)}}{m^2+5} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{m^2+1} + \frac{4}{\sqrt{m^2+1}}} \leq 2\sqrt{5}, \text{ 当}$$

且仅当 $\sqrt{m^2+1} = \frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$ 时等号成立, 即 $m = \pm\sqrt{3}$, 故直线方程为 $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ 或

$$x + \sqrt{3}y - 2 = 0.$$

【解析】(1) 利用点关于直线的对称确定圆心, 进而确定半径; (2) 联立直线与椭圆的方程求出弦长, 再使用基本不等式求出最小值的时候直线的情况.

【学科网考点定位】 本题考查点的对称性、直线与椭圆的基本关系、弦长公式, 考查学生的化归与转化思想以及运算化简能力.

21. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2} e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 证明: 当 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 时, $x_1 + x_2 < 0$.

【答案】(1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = \frac{-x[(x-1)^2+2]}{(1+x^2)^2} e^x$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$; 所以单调增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调减区间为 $(0, +\infty)$;

(2) 当 $x < 1$ 时, 由于 $\frac{1-x}{1+x^2} > 0$, $e^x < 0$, 故 $f(x) > 0$; 同理当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$;

当 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 时, 不妨设 $x_1 < x_2$, 由 (1) $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, 1)$,

下面证明: $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) < f(-x)$, 即证 $\frac{1-x}{1+x^2} e^x < \frac{1+x}{1+x^2} e^{-x}$, 此不等式等价于

$$(1-x)e^x - \frac{1+x}{e^x} < 0, \text{ 令 } g(x) = (1-x)e^x - \frac{1+x}{e^x}, \text{ 则 } g'(x) = -xe^{-x}(e^{2x}-1);$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < f(-x)$; 而 $x_2 \in (0, 1)$, $f(x_2) < f(-x_2)$, 从而 $f(x_1) < f(-x_1)$, 由于

$x_1, -x_2 \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $x_1 < -x_2$, 即 $x_1 + x_2 < 0$.

【解析】(1) 利用导数与函数的单调性进行求解; (2) 先证明 “ $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) < f(-x)$ ”, 进

而得到结论.

【学科网考点定位】 本题考查函数与导数问题，考查导数法求函数的单调性，构造函数的思想，考查学生的化归与转化能力.