2001年天津高考文科数学真题及答案

第Ⅰ卷 (选择题共60分)

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

P（A+B）=P（A）+P（B）

如果事件A、B相互独立，那么

P（A·B）=P（A）·P（B）

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$S_{锥侧}=\frac{1}{2}cl$

其中c表示底面周长，l表示斜高或母线长.

棱锥、圆锥的体积公式

$V_{锥体}=\frac{1}{3}sh$

其中s表示底面积，h表示高.

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设A=$\{x|x^2-x=0\},B=\{x|x^2+x=0\}$,则$A\cap B$等于

（A）0　（B）{0}　（C）ϕ　（D）{－1，0，1}

（2）若S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_n=n^2$,则$\{a_n\}$是

（A）等比数列，但不是等差数列　（B）等差数列，但不是等比数列

（C）等差数列，而且也是等比数列　（D）既非等比数列又非等差数列

（3）过点A（1，－1）、B（－1，1）且圆心在直线x+y-2=0上的圆的方程是

（A）$(x-3)^2+(y+1)^2=4$　（B）$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

（4）若定义在区间（-1，0）内的函数$f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足$f(x)>0$,则a的取值范围是

（A）$(0,\frac{1}{2})$　（B）$(0,\frac{1}{2}]$　（C）$(\frac{1}{2},+\infty)$　（D）$(0,+\infty)$

(5) 若向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$, $\boldsymbol{b}=(0,-1)$, 则向量 $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的坐标是

(A) $(3,-4)$　　(B) $(-3,4)$　　(C) $(3,4)$　　(D) $(-3,-4)$

(6) 设 A、B 是 x 轴上的两点, 点 P 的横坐标为 2 且 $|PA|=|PB|$. 若直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$, 则直线 PB 的方程是

(A) $x+y-5=0$　　(B) $2x-y-1=0$

(C) $2y-x-4=0$　　(D) $2x+y-7=0$

(7) 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$, 则

(A) $a<b$　　(B) $a>b$　　(C) $ab<1$　　(D) $ab>2$

(8) 若椭圆经过原点, 且焦点为 $F_1(1,0)$, $F_2(3,0)$, 则其离心率为

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{4}$

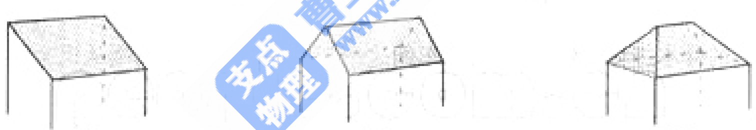
(9) 某赛季足球比赛的计分规则是: 胜一场, 得 3 分; 平一场, 得 1 分; 负一场, 得 0 分. 一球队打完 15 场, 积 33 分. 若不考虑顺序, 该队胜、负、平的可能情况共有

(A) 3 种　　(B) 4 种　　(C) 5 种　　(D) 6 种

(10) 设坐标原点为 O, 抛物线 $y^2=2x$ 与过焦点的直线交于 A、B 两点, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $-\frac{3}{4}$　　(C) 3　　(D) -3

(11) 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ① 单向倾斜; ② 双向倾斜; ③ 四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1、P_2、P_3.



①　　②　　③

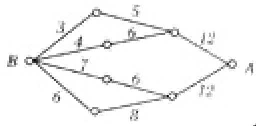
若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α, 则

(A) $P_3>P_2>P_1$　　(B) $P_3>P_2=P_1$　　(C) $P_3=P_2>P_1$　　(D) $P_3=P_2=P_1$

(12) 如图, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量为

(A) 26　　(B) 24

(C) 20　　(D) 19



第Ⅱ卷(非选择题共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上.

（13）定义在 R 上的函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的最大值是__________.

（14）一个工厂在若干个车间，今采用分层抽样方法从全厂某天的 2048 件产品中抽取一个容量为 128 的样本进行质量检查，若一车间这一天生产 256 件产品，则从该车间抽取的产品件数为____________.

（15）在空间中，

①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线.

②若两条直线没有共点，则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中，逆命题为真命题的是________.

(把符合要求的命题序号都填上)

（16）设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和，若 $\{S_n\}$ 是等差数列，则 q=_____________.

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（17）（本小题满分 12 分）

已知等差数列前三项为 $a,4,3a$，前 n 项的和为 S_n，$S_k=2550$.

（Ⅰ）求 a 及 k 的值；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}\right)$.

得分	评卷人

（18）（本小题满分 12 分）

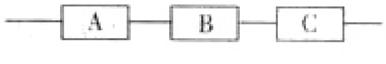
设计一幅宣传画，要求画面面积为 4840 cm^2，画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$，画面的上、下各有 8 cm 空白，左、右各有 5 cm 空白. 怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传画所用纸张的面积最小?

得分	评卷人

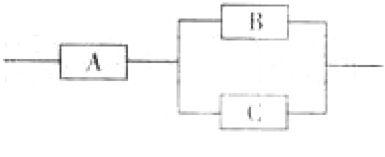
（19）（本小题满分 12 分）

如图，用 A、B、C 三类不同的元件连接成两个系统 N_1、N_2. 当元件 A、B、C 都正常工作时，系统 N_1 正常工作；当元件 A 正常工作且元件 B、C 至少有一个正常工作时，系统 N_2 正常工作. 已知元件 A、B、C 正常工作的概率依次为0. 80，0. 90，0. 90. 分别求系统 N_1、N_2 正常工作的概率 P_1、P_2.

(N_1)



(N_2)



注意:考生在(20甲)、(20乙)两题中选一题作答,如果两题都答,只以(20甲)计分.

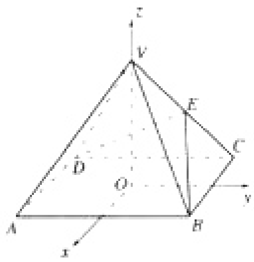
得分	评卷人

(20甲)(本小题满分12分)

如图,以正四棱锥$V-ABCD$底面中心O为坐标原点建立空间直角坐标系$O-xyz$,其中$Ox \parallel BC$,$Oy \parallel AB$. E为VC中点,正四棱锥底面边长为$2a$,高为h.

(Ⅰ)求$\cos\langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} \rangle$;

(Ⅱ)记面BCV为α,面DCV为β,若$\angle BED$是二面角$\alpha-VC-\beta$的平面角,求$\cos\angle BED$的值.



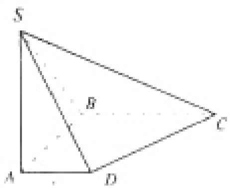
得分	评卷人

(20乙)(本小题满分12分)

如图,在底面是直角梯形的四棱锥$S—ABCD$中,$\angle ABC=90°$,$SA\perp$面$ABCD$,$SA=AB=BC=1$,$AD=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求四棱锥$S—ABCD$的体积;

(Ⅱ)求面SCD与面SBA所成的二面角的正切值.



（21）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2bx$ 在点 x=1 处有极小值-1．试确定 a、b 的值．并求出 f（x）的单调区间．

（22）（本小题满分 14 分）

设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 曲线 $x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1$ 和 $x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1$ 有 4 个不同的交点．

（Ⅰ）求 θ 的取值范围；

（Ⅱ）证明这 4 个交点共圆，并求圆半径的取值范围．

绝密★启用前

2001年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

数学试题(文史类)参考解答及评分标准

说明:

一. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二. 对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三. 解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一. 选择题:本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分,满分60分.

(1) B　　(2) B　　(3) C　　(4) A　　(5) D

(6) A　　(7) A　　(8) C　　(9) A　　(10) B

(11) D　　(12) D

二. 填空题:本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分,满分16分.

(13) 2　　(14) 16　　(15) ②　　(16) 1

三. 解答题

(17) 本小题考查数列求和以及极限的基本概念和运算,考查综合分析的能力. 满分12分.

解:(Ⅰ) 设该等差数列为$\{a_n\}$,则 $a_1 = a, a_2 = 4, a_3 = 3a, S_k = 2550$.

由已知有 $a+3a=2\times4$，解得首项 $a_1=a=2$，

公差 $d=a_2-a_1=4-2=2$. ……2 分

代入公式 $S_k=k\cdot a_1+\frac{k(k-1)}{2}\cdot d$ 得

$$k\cdot2+\frac{k(k-1)}{2}\cdot2=2550.$$

即 $k^2+k-2550=0$，

解得 $k=50$，$k=-51$（舍去）.

$\therefore$ $a=2,k=50$ ……6 分

（Ⅱ）由 $S_n=n\cdot a_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d$ 得 $S_n=n(n+1)$，

$$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$ ……9 分

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n})=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1.$$ ……12 分

18）本小题考查建立函数关系式，求函数最小值的方法和运用数学知识解决问题的能力. 满分 12 分.

解：设画面高为 x cm，宽为 λx cm，则 $\lambda x^2=4840$. ……1 分

设纸张面积为 S，有

$$S=(x+16)(\lambda x+10)$$
$$=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160,$$ ……3 分

将 $x=\frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$ 代入上式得

$$S=5000+44\sqrt{10}(8\sqrt{\lambda}+\frac{5}{\sqrt{\lambda}}).$$ ……6 分

当 $8\sqrt{\lambda}=\frac{5}{\sqrt{\lambda}}$，即 $\lambda=\frac{5}{8}(\frac{5}{8}<1)$ 时，S 取得取小值. ……8 分

此时，高：$x=\sqrt{\dfrac{4840}{\lambda}}=88$ cm，

宽：$\lambda x=\dfrac{5}{8}\times 88=55$ cm.

答：画面高为 88 cm，宽为 55 cm 时，能使所用纸张面积最小. ……12 分

(19) 本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法，考查运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

解：分别记元件 A、B、C 正常工作为事件 A、B、C，由已知条件

$$P(A)=0.80, P(B)=0.90, P(C)=0.90.$$

(Ⅰ) 因为事件 A、B、C 是相互独立的，所以，系统 N_1 正常工作的概率

$$\begin{aligned}P_1&=P(A\cdot B\cdot C)\\&=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\\&=0.80\times 0.90\times 0.90=0.648.\end{aligned}$$

故系统 N_1 正常工作的概率为 0.648. ……5 分

(Ⅱ) 系统 N_2 正常工作的概率

$$P_2=P(A)\cdot[1-P(\bar{B}\cdot\bar{C})]=P(A)\cdot[1-P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})],$$

$\because$ $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.90=0.10,$

$P(\bar{C})=1-P(C)=1-0.90=0.10,$ ……10 分

$\therefore$ $P_2=0.80\times[1-0.10\times 0.10]=0.80\times 0.99=0.792.$

故系统 N_2 正常工作的概率为 0.792. ……12 分

注意：考生在(20 甲)、(20 乙)两题中选一题作答，如果两题都答，只以(20 甲)计分.

(20 甲) 本小题考查空间直角坐标的概念、空间点和向量的坐标表示以及两个向量夹角的计算方法；考查运用向量研究空间图形的数学思想方法. 满分 12 分.

解：(Ⅰ) 由题意知 $B(a,a,0)$，$C(-a,a,0)$，$D(-a,-a,0)$，$E\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{h}{2}\right)$.

由此得 $\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{3a}{2},-\dfrac{a}{2},\dfrac{h}{2}\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{3a}{2},\dfrac{h}{2}\right)$，

$\therefore$ $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(-\dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\right)+\left(-\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{3a}{2}\right)+\dfrac{h}{2}\cdot\dfrac{h}{2}=-\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{h^2}{4}$,

$|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\left(-\dfrac{3a}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}$. ……3 分

由向量的数量积公式有

$$\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}$$

$$=\frac{-\frac{3a^2}{2}+\frac{h^2}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}}$$

$$=\frac{-6a^2+h^2}{10a^2+h^2}.$$ ……6 分

（Ⅱ）若 $\angle BED$ 是二面角 $\alpha-VC-\beta$ 的平面角，则$\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{CV}$，即有

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CV}=0.$$

又 $C(-a,a,0)$，$V(0,0,h)$，那么$\overrightarrow{CV}=(a,-a,h)$，且$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3a}{2},-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)$，

$\therefore$ $$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CV}=-\frac{3a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{2}=0,$$

即 $h=\sqrt{2}a$，这时有 ……9 分

$$\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{-6a^2+h^2}{10a^2+h^2}=\frac{-6a^2+(\sqrt{2}a)^2}{10a^2+(\sqrt{2}a)^2}=-\frac{1}{3}.$$

即 $\cos\angle BED=-\frac{1}{3}$. ……12 分

（20 乙）本小题考查线面关系和棱锥体积计算，考查空间想象能力和逻辑推理能力. 满分 12 分.

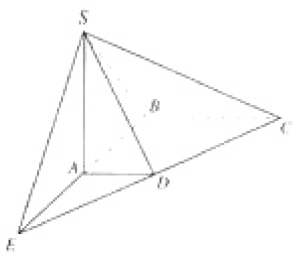
解：（Ⅰ）直角梯形 $ABCD$ 的面积是

$$M_{底面}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot AB=\frac{1+0.5}{2}\times 1=\frac{3}{4},$$ ……2 分

$\therefore$ 四棱锥 S—$ABCD$ 的体积是

$$V=\frac{1}{3}\times SA\times M_{底面}$$

$$=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$ ……4 分



（Ⅱ）延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE，则 SE 是所求二面角的棱. ……6 分

$\because AD\parallel BC$，$BC=2AD$，

$\therefore EA=AB=SA$，$\therefore SE\perp SB$，

$\because SA\perp$ 面 $ABCD$，得 面 $SEB\perp$ 面 EBC，EB 是交线，

又 $BC\perp EB$，$\therefore BC\perp$ 面 SEB，故 SB 是 CS 在面 SEB 上的射影，$\therefore CS\perp SE$，

所以 $\angle BSC$ 是所求二面角的平面角. ……10 分

$\because SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{2}$, $BC=1$, $BC\perp SB$,

$\therefore \tan\angle BSC=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

即所求二面角的正切值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……12 分

(21) 本小题考查函数和函数极值概念,考查运用导数研究函数性质的方法,以及分析和解决数学问题的能力. 满分 12 分.

解:由已知,可得

$$f(1)=1-3a+2b=-1, \qquad ①$$

又 $$f'(x)=3x^2-6ax+2b,$$

$\therefore$ $$f'(1)=3-6a+2b=0. \qquad ②$$ ……4 分

由 ①,②,可解得

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{3},\\ b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$ ……6 分

故函数的解析式为 $f(x)=x^3-x^2-x$.

由此得 $f'(x)=3x^2-2x-1$. ……8 分

根据二次函数的性质,当 $x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $x>1$ 时,$f'(x)>0$;

当 $-\dfrac{1}{3}<x<1$ 时,$f'(x)<0$. ……10 分

因此,在区间 $(-\infty,-\dfrac{1}{3})$ 和 $(1,+\infty)$ 上,函数 $f(x)$ 为增函数;在区间 $(-\dfrac{1}{3},1)$ 内,函数 $f(x)$ 为减函数. ……12 分

(22) 本小题主要考查坐标法、曲线的交点和三角函数性质等基础知识,以及逻辑推理能力和运算能力. 满分 14 分.

解:(Ⅰ) 两曲线的交点坐标 (x,y) 满足方程组

$$\begin{cases}x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1,\\ x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x^2=\sin\theta+\cos\theta,\\ y^2=\cos\theta-\sin\theta.\end{cases}$$ ……4 分

有4个不同交点等价于 $x^2>0$ 且 $y^2>0$，即

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta>0,\\ \cos\theta-\sin\theta>0.\end{cases}$$

又因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以得 θ 的取值范围为 $(0,\frac{\pi}{4})$. ……8分

（Ⅱ）由（Ⅰ）的推理知4个交点的坐标 (x,y) 满足方程 $x^2+y^2=2\cos\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{4})$，

即得4个交点共圆，该圆的圆心在原点，半径为 $r=\sqrt{2\cos\theta}\ (0<\theta<\frac{\pi}{4})$. ……11分

因为 $\cos\theta$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上是减函数，所以由 $\cos 0=1$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 知 r 的取值范围是

$(\sqrt[4]{2},\sqrt{2})$. ……14分