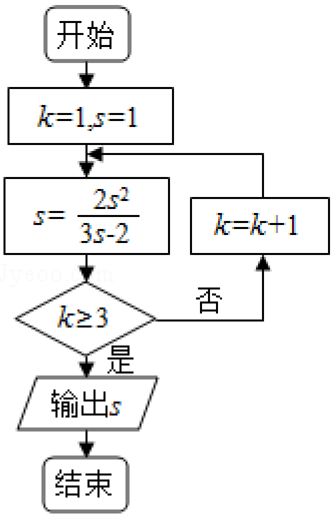
2019年北京市高考数学试卷（理科）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．（5分）已知复数$z=2+i$，则$z\cdot \overline{z}=$（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．3　　D．5

2．（5分）执行如图所示的程序框图，输出的s值为（　　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．（5分）已知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\end{cases}$，（$t$为参数），则点（1，0）到直线$l$的距离是（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．$\dfrac{6}{5}$

4．（5分）已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\dfrac{1}{2}$，则（　　）

A．$a^2=2b^2$　　B．$3a^2=4b^2$　　C．$a=2b$　　D．$3a=4b$

5．（5分）若x，y满足$|x|\leqslant 1-y$，且$y\geqslant -1$，则$3x+y$的最大值为（　　）

A．-7　　B．1　　C．5　　D．7

6．（5分）在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足$m_2-m_1=\dfrac{5}{2}lg\dfrac{E_1}{E_2}$，其中星等为$m_k$的星的亮度为$E_k$（$k=1$，2）．已知太阳的星等是$-26.7$，天狼星的星等是$-1.45$，则太阳与天狼星的亮度的比值为（　　）

A．$10^{10.1}$　　B．10.1　　C．$lg10.1$　　D．$10^{-10.1}$

7．（5分）设点A，B，C不共线，则“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

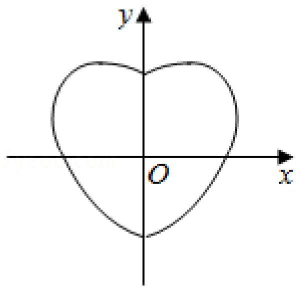
8．（5分）数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线C：$x^2+y^2=1+|x|y$就是其中之一（如图）．给出下列三个结论：

①曲线C恰好经过6个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线C上任意一点到原点的距离都不超过$\sqrt{2}$；

③曲线C所围成的“心形”区域的面积小于3．

其中，所有正确结论的序号是（　　）



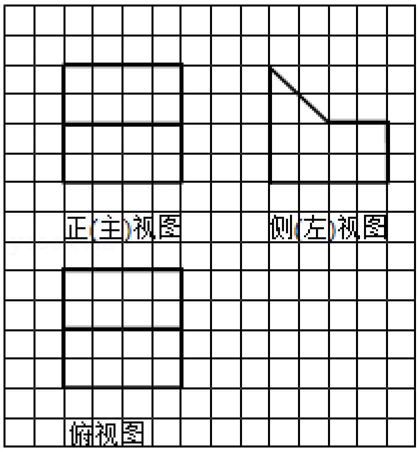
A．①　　B．②　　C．①②　　D．①②③

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

9．（5分）函数$f(x)=\sin^2 2x$的最小正周期是______．

10．（5分）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=-3$，$S_5=-10$，则$a_5=$______，S_n的最小值为______．

11．（5分）某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为1，那么该几何体的体积为______．



12．（5分）已知l，m是平面α外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①$l\perp m$；②m∥α；③$l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：______

．

13．（5分）设函数$f(x)=e^x+ae^{-x}$（a为常数）．若$f(x)$为奇函数，则$a=$______

；若$f(x)$是R上的增函数，则a的取值范围是______．

14．（5分）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为60元/盒、65元/盒、80元/盒、90元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到120元，顾客就少付x元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的80%．

①当$x=10$时，顾客一次购买草莓和西瓜各1盒，需要支付______元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则x的最大值为______．

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15．（13分）在△ABC中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\frac{1}{2}$．

（Ⅰ）求b，c的值；

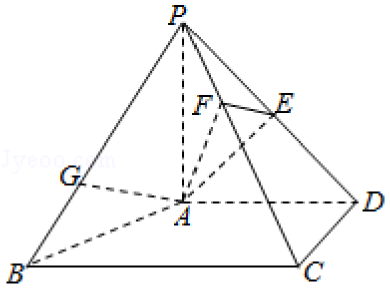
（Ⅱ）求$\sin(B-C)$的值．

16．（14分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AD\perp CD$，$AD\parallel BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$．E为PD的中点，点F在PC上，且$\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$.

（Ⅰ）求证：$CD\perp$平面PAD；

（Ⅱ）求二面角$F-AE-P$的余弦值；

（Ⅲ）设点G在PB上，且$\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$．判断直线$AG$是否在平面$AEF$内，说明理由．



17．（13分）改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月A，B两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了100人，发现样本中A，B两种支付方式都不使用的有5人，样本中仅使用A和仅使用B的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额（元） 支付方式	（0，1000]	（1000，2000]	大于2000
仅使用A	18人	9人	3人
仅使用B	10人	14人	1人

（Ⅰ）从全校学生中随机抽取1人，估计该学生上个月A，B两种支付方式都使用的概率；

（Ⅱ）从样本仅使用A和仅使用B的学生中各随机抽取1人，以X表示这2人中上个月支付金额大于1000元的人数，求X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用A的学生中，随机抽查3人，发现他们本月的支付金额都大于2000元．根据抽查结果，能否认为样本

仅使用A的学生中本月支付金额大于2000元的人数有变化？说明理由．

18．（14分）已知抛物线C：$x^2=-2py$经过点（2，﹣1）．

（Ⅰ）求抛物线C的方程及其准线方程；

（Ⅱ）设O为原点，过抛物线C的焦点作斜率不为0的直线l交抛物线C于两点M，N，直线$y=-1$分别交直线OM，ON于点A和点B．求证：以AB为直径的圆经过y轴上的两个定点．

19．（13分）已知函数$f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$．

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

（Ⅱ）当$x\in[-2,4]$时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

（Ⅲ）设$F(x)=|f(x)-(x+a)|$（$a\in\mathbf{R}$），记$F(x)$在区间$[-2,4]$上的最大值为$M(a)$．当$M(a)$最小时，求a的值．

20．（13分）已知数列$\{a_n\}$，从中选取第i_1项、第i_2项、…、第i_m项（$i_1<i_2<\cdots<i_m$），若$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列$a_{i_1}$，$a_{i_2}$，…，$a_{i_m}$为$\{a_n\}$的长度为$m$的递增子列．规定：数列$\{a_n\}$的任意一项都是$\{a_n\}$的长度为1的递增子列．

（Ⅰ）写出数列1，8，3，7，5，6，9的一个长度为4的递增子列；

（Ⅱ）已知数列$\{a_n\}$的长度为p的递增子列的末项的最小值为a_{m_0}，长度为q的递增子列的末项的最小值为a_{n_0}．若$p<q$，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$；

（Ⅲ）设无穷数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若$\{a_n\}$的长度为s的递增子列末项的最小值为$2s-1$，且长度为s末项为$2s-1$的递增子列恰有2^{s-1}个（$s=1$，2，…），求数列$\{a_n\}$的通项公式．