

2024 年上海市高考数学试卷（网络回忆版）

2024.06

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分.其中第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题满分 5 分）

考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果.

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A = \{2, 4\}$ ，则 $\bar{A} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知 $x \in \mathbf{R}$ ，则不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 $f(x) = x^3 + a$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，且 $f(x)$ 是奇函数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 $k \in \mathbf{R}$ ， $\vec{a} = (2, 5)$ ， $\vec{b} = (6, k)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 k 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 在 $(x+1)^n$ 的二项展开式中，若各项系数和为 32，则 x^2 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

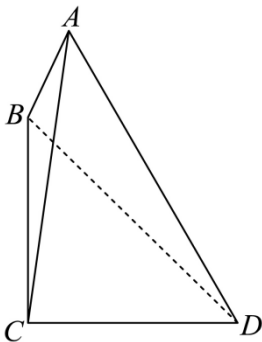
7. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 上有一点 P 到准线的距离为 9，那么点 P 到 x 轴的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 某校举办科学竞技比赛，有 A 、 B 、 C 3 种题库， A 题库有 5000 道题， B 题库有 4000 道题， C 题库有 3000 道题. 小申已完成所有题，他 A 题库的正确率是 0.92， B 题库的正确率是 0.86， C 题库的正确率是 0.72. 现他从所有的题中随机选一题，正确率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知虚数 z ，其实部为 1，且 $z + \frac{2}{z} = m (m \in \mathbf{R})$ ，则实数 m 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设集合 A 中的元素皆为无重复数字的三位正整数，且元素中任意两者之积皆为偶数，求集合中元素个数的最大值 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知点 B 在点 C 正北方向，点 D 在点 C 的正东方向， $BC = CD$ ，存在点 A 满足 $\angle BAC = 16.5^\circ$ ， $\angle DAC = 37^\circ$ ，则 $\angle BCA = \underline{\hspace{2cm}}$ (精确到 0.1 度)



12. 无穷等比数列 $\{a_n\}$ 满足首项 $a_1 > 0, q > 1$, 记 $I_n = \{x-y \mid x, y \in [a_1, a_2] \cup [a_n, a_{n+1}]\}$, 若对任意正整数 n 集合 I_n 是闭区间, 则 q 的取值范围是_____.

二、选择题 (本大题共有 4 题, 满分 18 分, 其中第 13-14 题每题满分 4 分, 第 15-16 题每题满分 5 分) 每题有且只有一个正确答案, 考生应在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得满分, 否则一律得零分.

13. 已知气候温度和海水表层温度相关, 且相关系数为正数, 对此描述正确的是 ()

- A. 气候温度高, 海水表层温度就高
- B. 气候温度高, 海水表层温度就低
- C. 随着气候温度由低到高, 海水表层温度呈上升趋势
- D. 随着气候温度由低到高, 海水表层温度呈下降趋势

14. 下列函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π 的是 ()

- A. $\sin x + \cos x$
- B. $\sin x \cos x$
- C. $\sin^2 x + \cos^2 x$
- D. $\sin^2 x - \cos^2 x$

15. 定义一个集合 Ω , 集合中的元素是空间内的点集, 任取 $P_1, P_2, P_3 \in \Omega$, 存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$. 已知 $(1, 0, 0) \in \Omega$, 则 $(0, 0, 1) \notin \Omega$ 的充分条件是 ()

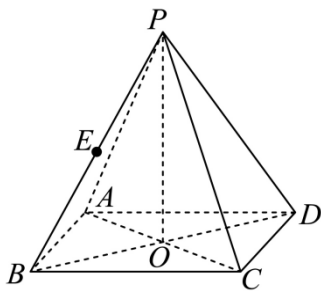
- A. $(0, 0, 0) \in \Omega$
- B. $(-1, 0, 0) \in \Omega$
- C. $(0, 1, 0) \in \Omega$
- D. $(0, 0, -1) \in \Omega$

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 定义集合 $M = \{x_0 \mid x_0 \in \mathbf{R}, x \in (-\infty, x_0), f(x) < f(x_0)\}$, 在使得 $M = [-1, 1]$ 的所有 $f(x)$ 中, 下列成立的是 ()

- A. 存在 $f(x)$ 是偶函数
- B. 存在 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取最大值
- C. 存在 $f(x)$ 是严格增函数
- D. 存在 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到极小值

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 78 分) 解下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤

17. 如图为正四棱锥 $P-ABCD$, O 为底面 $ABCD$ 的中心.



- (1) 若 $AP = 5, AD = 3\sqrt{2}$, 求 $\triangle POA$ 绕 PO 旋转一周形成的几何体的体积;
- (2) 若 $AP = AD, E$ 为 PB 的中点, 求直线 BD 与平面 AEC 所成角的大小.

18. 若 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$.

- (1) $y = f(x)$ 过 $(4, 2)$, 求 $f(2x-2) < f(x)$ 的解集;
- (2) 存在 x 使得 $f(x+1), f(ax), f(x+2)$ 成等差数列, 求 a 的取值范围.

19. 为了解某地初中学生体育锻炼时长与学业成绩的关系, 从该地区 29000 名学生中抽取 580 人, 得到日均体育锻炼时长与学业成绩的数据如下表所示:

时间范围 \ 学业成绩	时间范围				
	$[0, 0.5)$	$[0.5, 1)$	$[1, 1.5)$	$[1.5, 2)$	$[2, 2.5)$
优秀	5	44	42	3	1
不优秀	134	147	137	40	27

- (1) 该地区 29000 名学生中体育锻炼时长不少于 1 小时人数约为多少?
- (2) 估计该地区初中学生日均体育锻炼的时长 (精确到 0.1)
- (3) 是否有 95% 的把握认为学业成绩优秀与日均体育锻炼时长不小于 1 小时且小于 2 小时有关?

(附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$, $P(\chi^2 \geq 3.841) \approx 0.05$.)

20. 已知双曲线 $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1, (b > 0)$, 左右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $M(-2, 0)$ 的直线 l 交双曲线 Γ 于 P, Q

两点.

- (1) 若离心率 $e = 2$ 时, 求 b 的值.
- (2) 若 $b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形时, 且点 P 在第一象限, 求点 P 的坐标.

(3) 连接 OQ 并延长, 交双曲线 Γ 于点 R , 若 $\overline{A_1R} \cdot \overline{A_2P} = 1$, 求 b 的取值范围.

21. 对于一个函数 $f(x)$ 和一个点 $M(a, b)$, 令 $s(x) = (x-a)^2 + (f(x)-b)^2$, 若 $P(x_0, f(x_0))$ 是 $s(x)$ 取到最小值的点, 则称 P 是 M 在 $f(x)$ 的“最近点”.

(1) 对于 $f(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$, 求证: 对于点 $M(0, 0)$, 存在点 P , 使得点 P 是 M 在 $f(x)$ 的“最近点”;

(2) 对于 $f(x) = e^x, M(1, 0)$, 请判断是否存在一个点 P , 它是 M 在 $f(x)$ 的“最近点”, 且直线 MP 与 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线垂直;

(3) 已知 $y = f(x)$ 在定义域 \mathbf{R} 上存在导函数 $f'(x)$, 且函数 $g(x)$ 在定义域 \mathbf{R} 上恒正, 设点 $M_1(t-1, f(t)-g(t)), M_2(t+1, f(t)+g(t))$. 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 存在点 P 同时是 M_1, M_2 在 $f(x)$ 的“最近点”, 试判断 $f(x)$ 的单调性.