

2011年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）设集合 $U=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $M=\{1, 2, 3\}$ ， $N=\{2, 3, 4\}$ ，则 $C_U(M \cap N) = (\quad)$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{1, 4\}$

【考点】1H: 交、并、补集的混合运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】先根据交集的定义求出 $M \cap N$ ，再依据补集的定义求出 $C_U(M \cap N)$.

【解答】解： $\because M=\{1, 2, 3\}$ ， $N=\{2, 3, 4\}$ ， $\therefore M \cap N=\{2, 3\}$ ，则 $C_U(M \cap N) = \{1, 4\}$ ，

故选：D.

【点评】本题考查两个集合的交集、补集的定义，以及求两个集合的交集、补集的方法.

2. （5分）函数 $y=2\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) 的反函数为 ()

- A. $y=\frac{x}{4}$ ($x \in \mathbb{R}$) B. $y=\frac{x^2}{4}$ ($x \geq 0$) C. $y=4x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) D. $y=4x^2$ ($x \geq 0$)

【考点】4R: 反函数.

【专题】11: 计算题.

【分析】由原函数的解析式解出自变量 x 的解析式，再把 x 和 y 交换位置，注明反函数的定义域（即原函数的值域）.

【解答】解： $\because y=2\sqrt{x}$ ($x \geq 0$)，

$$\therefore x = \frac{y^2}{4}, \quad y \geq 0,$$

故反函数为 $y=\frac{x^2}{4}$ ($x\geq 0$) .

故选: B.

【点评】 本题考查函数与反函数的定义, 求反函数的方法和步骤, 注意反函数的定义域是原函数的值域.

3. (5分) 设向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=(\quad)$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

【考点】 91: 向量的概念与向量的模; 90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 由 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}$, 代入已知可求

【解答】 解: $\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$,

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{1-2+4}=\sqrt{3}$$

故选: B.

【点评】 本题主要考查了向量的数量积性质的基本应用, 属于基础试题

4. (5分) 若变量 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y < 6 \\ x-3y \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$, 则 $z=2x+3y$ 的最小值为 (

)

- A. 17 B. 14 C. 5 D. 3

【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 我们先画出满足约束条件 $\begin{cases} x+y < 6 \\ x-3y \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 的平面区域, 然后求出平面区域

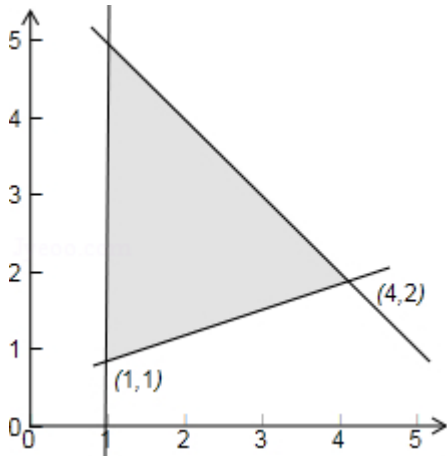
内各个顶点的坐标, 再将各个顶点的坐标代入目标函数, 比较后即可得到目

标函数的最值.

【解答】解: 约束条件 $\begin{cases} x+y < 6 \\ x-3y \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 的平面区域如图所示:

由图可知, 当 $x=1, y=1$ 时, 目标函数 $z=2x+3y$ 有最小值为5

故选: C.



【点评】 本题考查的知识点是线性规划, 其中画出满足约束条件的平面区域是解答本题的关键.

5. (5分) 下面四个条件中, 使 $a > b$ 成立的充分而不必要的条件是 ()

- A. $a > b+1$ B. $a > b-1$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$

【考点】 29: 充分条件、必要条件、充要条件.

【专题】 5L: 简易逻辑.

【分析】 利用不等式的性质得到 $a > b+1 \Rightarrow a > b$; 反之, 通过举反例判断出 $a > b$ 推不出 $a > b+1$; 利用条件的定义判断出选项.

【解答】解: $a > b+1 \Rightarrow a > b$;

反之, 例如 $a=2, b=1$ 满足 $a > b$, 但 $a=b+1$ 即 $a > b$ 推不出 $a > b+1$,

故 $a > b+1$ 是 $a > b$ 成立的充分而不必要的条件.

故选: A.

【点评】 本题考查不等式的性质、考查通过举反例说明某命题不成立是常用方法.

6. (5分) 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=1$, 公差 $d=2$, $S_{k+2} - S_k=24$, 则 $k=$ ()
- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

【考点】85: 等差数列的前 n 项和.

【专题】11: 计算题.

【分析】先由等差数列前 n 项和公式求得 S_{k+2} , S_k , 将 $S_{k+2} - S_k=24$ 转化为关于 k 的方程求解.

【解答】解: 根据题意:

$$S_{k+2} = (k+2)^2, S_k = k^2$$

$\therefore S_{k+2} - S_k = 24$ 转化为:

$$(k+2)^2 - k^2 = 24$$

$$\therefore k = 5$$

故选: D.

【点评】本题主要考查等差数列的前 n 项和公式及其应用, 同时还考查了方程思想, 属中档题.

7. (5分) 设函数 $f(x) = \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则 ω 的最小值等于 ()
- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. 6 D. 9

【考点】HK: 由 $y=A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象确定其解析式.

【专题】56: 三角函数的求值.

【分析】函数图象平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 说明函数平移整数个周期, 容易得到结果.

【解答】解: $f(x)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 函数图象平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 说明函数平移整数个周期, 所以 $\frac{\pi}{3} = k \cdot \frac{2\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$. 令 $k=1$, 可得 $\omega=6$.

故选：C.

【点评】 本题是基础题，考查三角函数的图象的平移，三角函数的周期定义的理解，考查技术能力，常考题型.

8. (5分) 已知直二面角 $\alpha - l - \beta$ ，点 $A \in \alpha$ ， $AC \perp l$ ，C为垂足，点 $B \in \beta$ ， $BD \perp l$ ，D为垂足，若 $AB=2$ ， $AC=BD=1$ ，则 $CD= (\quad)$
- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

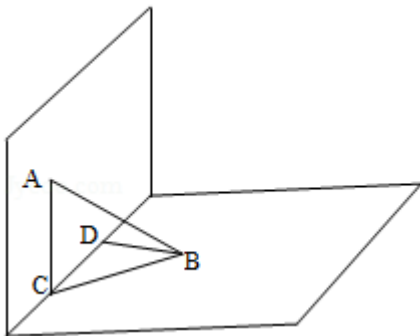
【考点】 MK：点、线、面间的距离计算.

【专题】 11：计算题.

【分析】 根据线面垂直的判定与性质，可得 $AC \perp CB$ ， $\triangle ACB$ 为直角三角形，利用勾股定理可得 BC 的值；进而在 $Rt\triangle BCD$ 中，由勾股定理可得 CD 的值，即可得答案.

【解答】 解：根据题意，直二面角 $\alpha - l - \beta$ ，点 $A \in \alpha$ ， $AC \perp l$ ，可得 $AC \perp$ 面 β ，则 $AC \perp CB$ ， $\triangle ACB$ 为 $Rt\triangle$ ，且 $AB=2$ ， $AC=1$ ，由勾股定理可得， $BC=\sqrt{3}$ ；在 $Rt\triangle BCD$ 中， $BC=\sqrt{3}$ ， $BD=1$ ，由勾股定理可得， $CD=\sqrt{2}$ ；

故选：C.



【点评】 本题考查两点间距离的计算，计算时，一般要把空间图形转化为平面图形，进而构造直角三角形，在直角三角形中，利用勾股定理计算求解.

9. (5分) 4位同学每人从甲、乙、丙3门课程中选修1门，则恰有2人选修课程

甲的不同选法共有 ()

- A. 12种 B. 24种 C. 30种 D. 36种

【考点】 D3: 计数原理的应用.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 本题是一个分步计数问题, 恰有2人选修课程甲, 共有 C_4^2 种结果, 余下的两个人各有两种选法, 共有 2×2 种结果, 根据分步计数原理得到结果.

【解答】 解: 由题意知本题是一个分步计数问题,

∵恰有2人选修课程甲, 共有 $C_4^2=6$ 种结果,

∵余下的两个人各有两种选法, 共有 $2 \times 2=4$ 种结果,

根据分步计数原理知共有 $6 \times 4=24$ 种结果

故选: B.

【点评】 本题考查分步计数问题, 解题时注意本题需要分步来解, 观察做完这件事一共有几步, 每一步包括几种方法, 这样看清楚把结果数相乘得到结果.

10. (5分) 设 $f(x)$ 是周期为2的奇函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x(1-x)$, 则

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = (\quad)$$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【考点】 3I: 奇函数、偶函数; 3Q: 函数的周期性.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 由题意得 $f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$, 代入已知条件进行运算.

【解答】 解: ∵ $f(x)$ 是周期为2的奇函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x(1-x)$,

$$\therefore f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

故选: A.

【点评】 本题考查函数的周期性和奇偶性的应用, 以及求函数的值.

11. (5分) 设两圆 C_1 、 C_2 都和两坐标轴相切，且都过点 $(4, 1)$ ，则两圆心的距离 $|C_1C_2| = (\quad)$
- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. 8 D. $8\sqrt{2}$

【考点】 J1: 圆的标准方程.

【专题】 5B: 直线与圆.

【分析】 圆在第一象限内，设圆心的坐标为 (a, a) ， (b, b) ，利用条件可得 a 和 b 分别为 $x^2 - 10x + 17 = 0$ 的两个实数根，再利用韦达定理求得两圆心的距离 $|C_1C_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(a-b)^2}$ 的值.

【解答】 解: \because 两圆 C_1 、 C_2 都和两坐标轴相切，且都过点 $(4, 1)$ ，故圆在第一象限内，

设两个圆的圆心的坐标分别为 (a, a) ， (b, b) ，由于两圆都过点 $(4, 1)$ ，

$$\text{则有 } \sqrt{(a-4)^2 + (a-1)^2} = |a|, \quad \sqrt{(b-4)^2 + (b-1)^2} = |b|,$$

故 a 和 b 分别为 $(x-4)^2 + (x-1)^2 = x^2$ 的两个实数根，

即 a 和 b 分别为 $x^2 - 10x + 17 = 0$ 的两个实数根， $\therefore a+b=10$ ， $ab=17$ ，

$$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 32, \quad \therefore \text{两圆心的距离 } |C_1C_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(a-b)^2} = 8,$$

故选: C.

【点评】 本题考查直线和圆相切的性质，两点间的距离公式、韦达定理的应用，属于基础题.

12. (5分) 已知平面 α 截一球面得圆 M ，过圆心 M 且与 α 成 60° 二面角的平面 β 截该球面得圆 N ，若该球的半径为4，圆 M 的面积为 4π ，则圆 N 的面积为 ()
- A. 7π B. 9π C. 11π D. 13π

【考点】 MJ: 二面角的平面角及求法.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】先求出圆M的半径，然后根据勾股定理求出OM的长，找出二面角的平面角，从而求出ON的长，最后利用垂径定理即可求出圆N的半径，从而求出面积.

【解答】解：∵圆M的面积为 4π

∴圆M的半径为2

根据勾股定理可知 $OM=2\sqrt{3}$

∵过圆心M且与 α 成 60° 二面角的平面 β 截该球面得圆N

∴ $\angle OMN=30^\circ$ ，在直角三角形OMN中， $ON=\sqrt{3}$

∴圆N的半径为 $\sqrt{13}$

则圆的面积为 13π

故选：D.



【点评】本题主要考查了二面角的平面角，以及解三角形知识，同时考查空间想象能力，分析问题解决问题的能力，属于基础题.

二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

13. （5分） $(1-x)^{10}$ 的二项展开式中， x 的系数与 x^9 的系数之差为：0.

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题.

【分析】利用二项展开式的通项公式求出展开式的通项，令 x 的指数分别取1；9求出展开式的 x 的系数与 x^9 的系数；求出两个系数的差.

【解答】解：展开式的通项为 $T_{r+1} = (-1)^r C_{10}^r x^r$

所以展开式的 x 的系数 - 10

x^9 的系数 - 10

x 的系数与 x^9 的系数之差为 $(-10) - (-10) = 0$

故答案为：0

【点评】 本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题.

14. (5分) 已知 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\tan\alpha=2$, 则 $\cos\alpha=$ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【考点】 GG: 同角三角函数间的基本关系.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 先利用 α 的范围确定 $\cos\alpha$ 的范围, 进而利用同角三角函数的基本关系, 求得 $\cos\alpha$ 的值.

【解答】 解: $\because \alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$,

$\therefore \cos\alpha < 0$

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

故答案为: $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【点评】 本题主要考查了同角三角函数基本关系的应用. 解题的关键是利用那个角的范围确定三角函数符号.

15. (5分) 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E为 C_1D_1 的中点, 则异面直线AE与BC所成的角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

【考点】 LM: 异面直线及其所成的角.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题; 31: 数形结合; 35: 转化思想.

【分析】 根据题意知 $AD \parallel BC$, $\therefore \angle DAE$ 就是异面直线AE与BC所成角, 解三角形即可求得结果.

【解答】 解: 连接DE, 设 $AD=2$

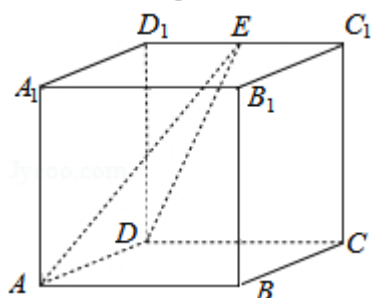
易知 $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAE$ 就是异面直线AE与BC所成角,

在 $\triangle RtADE$ 中, 由于 $DE=\sqrt{5}$, $AD=2$, 可得 $AE=3$

$$\therefore \cos \angle DAE = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3},$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.



【点评】 此题是个基础题. 考查异面直线所成角问题, 求解方法一般是平移法, 转化为平面角问题来解决, 体现了数形结合和转化的思想.

16. (5分) 已知 F_1 、 F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ 的左、右焦点, 点 $A \in C$, 点

M 的坐标为 $(2, 0)$, AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线, 则 $|AF_2| = \underline{6}$.

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 利用双曲线的方程求出双曲线的参数值; 利用内角平分线定理得到两条焦半径的关系, 再利用双曲线的定义得到两条焦半径的另一条关系, 联立求出焦半径.

【解答】 解:

不妨设 A 在双曲线的右支上

$\therefore AM$ 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线

$$\therefore \frac{|AF_1|}{|AF_2|} = \frac{|F_1M|}{|MF_2|} = \frac{8}{4} = 2$$

又 $\therefore |AF_1| - |AF_2| = 2a = 6$

解得 $|AF_2| = 6$

故答案为6

【点评】 本题考查内角平分线定理; 考查双曲线的定义; 解有关焦半径问题常用双曲线的定义.

三、解答题（共6小题，满分70分）

17. （10分）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $a_2=6$ ， $6a_1+a_3=30$ ，求 a_n 和 S_n

【考点】88：等比数列的通项公式；89：等比数列的前 n 项和.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】设出等比数列的公比为 q ，然后根据等比数列的通项公式化简已知得两等式，得到关于首项与公比的二元一次方程组，求出方程组的解即可得到首项和公比的值，根据首项和公比写出相应的通项公式及前 n 项和的公式即可

【解答】解：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，由题意得：

$$\begin{cases} a_1 q = 6 \\ 6a_1 + a_1 q^2 = 30 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases},$$

当 $a_1=3$ ， $q=2$ 时： $a_n=3 \times 2^{n-1}$ ， $S_n=3 \times (2^n - 1)$ ；

当 $a_1=2$ ， $q=3$ 时： $a_n=2 \times 3^{n-1}$ ， $S_n=3^n - 1$.

【点评】此题考查学生灵活运用等比数列的通项公式及前 n 项和的公式化简求值，是一道基础题.

18. （12分） $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c . 已知 $a \sin A + c \sin C -$

$$\sqrt{2} a \sin C = b \sin B,$$

(I) 求 B ;

(II) 若 $A=75^\circ$ ， $b=2$ ，求 a ， c .

【考点】HU：解三角形.

【专题】11：计算题.

【分析】(I) 利用正弦定理把题设等式中的角的正弦转换成边的关系，代入

余弦定理中求得 $\cos B$ 的值，进而求得 B .

(II) 利用两角和公式先求得 $\sin A$ 的值，进而利用正弦定理分别求得 a 和 c .

【解答】解：(I) 由正弦定理得 $a^2+c^2-\sqrt{2}ac=b^2$,

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2accosB$,

$$\text{故}\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}, B=45^\circ$$

$$(II) \sin A=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{故}a=b\times\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{3}$$

$$\therefore c=b\times\frac{\sin C}{\sin B}=2\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$$

【点评】本题主要考查了解三角形问题. 考查了对正弦定理和余弦定理的灵活运用.

19. (12分) 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为0.3, 设各车主购买保险相互独立.

(I) 求该地1位车主至少购买甲、乙两种保险中的1种的概率;

(II) 求该地的3位车主中恰有1位车主甲、乙两种保险都不购买的概率.

【考点】C5: 互斥事件的概率加法公式; CN: 二项分布与 n 次独立重复试验的模型.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】(I) 设该车主购买乙种保险的概率为 p , 由相互独立事件概率公式可得 $P(1-0.5)=0.3$, 解可得 p , 先求出该车主甲、乙两种保险都不购买的概率, 由对立事件的概率性质计算可得答案.

(II) 该地的3位车主中恰有1位车主甲、乙两种保险都不购买, 是一个 n 次独立重复试验恰好发生 k 次的概率, 根据上一问的结果得到该地的一位车主甲、乙两种保险都不购买的概率, 代入公式得到结果.

【解答】解：(I) 设该车主购买乙种保险的概率为 p , 根据题意可得 $p\times(1-0.5)=0.3$, 解可得 $p=0.6$,

该车主甲、乙两种保险都不购买的概率为 $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$,

由对立事件的概率该车主至少购买甲、乙两种保险中的1种的概率 $1 - 0.2 = 0.8$

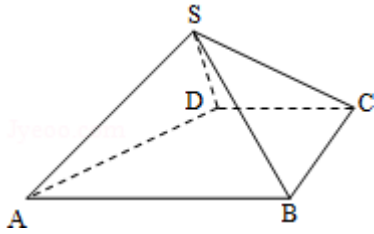
(II) 每位车主甲、乙两种保险都不购买的概率为0.2, 则该地的3位车主中恰有1位车主甲、乙两种保险都不购买的概率 $P = C_3^1 \times 0.2 \times 0.8^2 = 0.384$.

【点评】 本题考查互斥事件的概率公式加法公式, 考查n次独立重复试验恰好发生k次的概率, 考查对立事件的概率公式, 是一个综合题目.

20. (12分) 如图, 四棱锥S - ABCD中, $AB \parallel CD$, $BC \perp CD$, 侧面SAB为等边三角形, $AB = BC = 2$, $CD = SD = 1$.

(I) 证明: $SD \perp$ 平面SAB;

(II) 求AB与平面SBC所成的角的大小.



【考点】 LW: 直线与平面垂直; MI: 直线与平面所成的角.

【专题】 11: 计算题; 14: 证明题.

【分析】 (1) 利用线面垂直的判定定理, 即证明SD垂直于面SAB中两条相交的直线SA, SB; 在证明SD与SA, SB的过程中运用勾股定理即可

(II) 求AB与平面SBC所成的角的大小即利用平面SBC的法向量

\vec{n} 与 \vec{AB} 间的夹角关系即可, 当 \vec{n} 与 \vec{AB} 间的夹角为锐角时, 所求的角即为它的余角; 当 \vec{n} 与 \vec{AB} 间的夹角为钝角时, 所求的角为 $\langle \vec{n}, \vec{AB} \rangle - \frac{\pi}{2}$

【解答】 (I) 证明: 在直角梯形ABCD中,

$$\because AB \parallel CD, BC \perp CD, AB = BC = 2, CD = 1$$

$$\therefore AD = \sqrt{(AB - CD)^2 + BC^2} = \sqrt{5}$$

$$\because \text{侧面SAB为等边三角形, } AB = 2$$

$$\therefore SA = 2$$

$$\therefore SD = 1$$

$$\therefore AD^2 = SA^2 + SD^2$$

$$\therefore SD \perp SA$$

同理：SD ⊥ SB

$$\therefore SA \cap SB = S, SA, SB \subset \text{面} SAB$$

$$\therefore SD \perp \text{平面} SAB$$

(II) 建立如图所示的空间坐标系

则A(2, -1, 0), B(2, 1, 0), C(0, 1, 0),

作出S在底面上的投影M, 则由四棱锥S-ABCD中, AB ∥ CD, BC ⊥ CD, 侧面SAB为

等边三角形知, M点一定在x轴上, 又AB=BC=2, CD=SD=1. 可解得MD = $\frac{1}{2}$,

从而解得SM = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故可得S($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$$\text{则 } \vec{SB} = (\frac{3}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \vec{SC} = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

设平面SBC的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\text{则 } \vec{SB} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{SC} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{3}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } x=0, y=\frac{\sqrt{3}}{2}, z=1$$

即平面SBC的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z) = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

$$\text{又 } \vec{AB} = (0, 2, 0)$$

$$\cos \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{n}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\therefore \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = \arccos \frac{\sqrt{21}}{7}$$

即AB与平面SBC所成的角的大小为 $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$

①当 $-\sqrt{2}-1 \leq a \leq \sqrt{2}-1$ 时, 函数 $f(x)$ 没有极小值

②当 $a < -\sqrt{2}-1$ 或 $a > \sqrt{2}-1$ 时,

由 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -a - \sqrt{a^2 + 2a - 1}$, $x_2 = -a + \sqrt{a^2 + 2a - 1}$

故 $x_0 = x_2$, 由题设可知 $1 < -a + \sqrt{a^2 + 2a - 1} < 3$

(i) 当 $a > \sqrt{2}-1$ 时, 不等式 $1 < -a + \sqrt{a^2 + 2a - 1} < 3$ 没有实数解;

(ii) 当 $a < -\sqrt{2}-1$ 时, 不等式 $1 < -a + \sqrt{a^2 + 2a - 1} < 3$

化为 $a+1 < \sqrt{a^2 + 2a - 1} < a+3$,

解得 $-\frac{5}{2} < a < -\sqrt{2}-1$

综合①②, 得 a 的取值范围是 $(-\frac{5}{2}, -\sqrt{2}-1)$

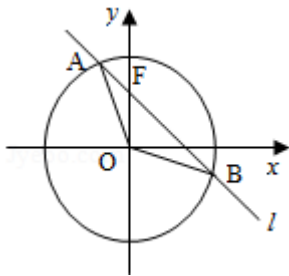
【点评】 将字母 a 看成常数, 讨论关于 x 的三次多项式函数的极值点, 是解决本题的难点, 本题中处理关于 a 的无理不等式, 计算也比较繁, 因此本题对能力的要求比较高.

22. (12分) 已知 O 为坐标原点, F 为椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 在 y 轴正半轴上的焦点,

过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A 、 B 两点, 点 P 满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP} = \vec{0}$.

(I) 证明: 点 P 在 C 上;

(II) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q , 证明: A 、 P 、 B 、 Q 四点在同一圆上.



【考点】 9S: 数量积表示两个向量的夹角; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题; 35: 转化思想.

【分析】(1) 要证明点P在C上, 即证明P点的坐标满足椭圆C的方程 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

, 根据已知中过F且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线l与C交于A、B两点, 点P满足

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP} = \vec{0}$, 我们求出点P的坐标, 代入验证即可.

(2) 若A、P、B、Q四点在同一圆上, 则我们可以先求出任意三点确定的圆的方程, 然后将第四点坐标代入验证即可.

【解答】证明: (I) 设A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2)

椭圆C: $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ ①, 则直线AB的方程为: $y = -\sqrt{2}x + 1$ ②

联立方程可得 $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 \times x_2 = -\frac{1}{4}$

则 $y_1 + y_2 = -\sqrt{2}(x_1 + x_2) + 2 = 1$

设P (p_1, p_2) ,

则有: $\vec{OA} = (x_1, y_1)$, $\vec{OB} = (x_2, y_2)$, $\vec{OP} = (p_1, p_2)$;

$\therefore \vec{OA} + \vec{OB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$; $\vec{OP} = (p_1, p_2) = -(\vec{OA} + \vec{OB}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$

\therefore p的坐标为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ 代入①方程成立, 所以点P在C上.

(II) 设点P关于点O的对称点为Q, 证明: A、P、B、Q四点在同一圆上.

设线段AB的中点坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$, 即 $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2})$,

则过线段AB的中点且垂直于AB的直线方程为: $y - \frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{4})$, 即 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4}$; ③

\therefore P关于点O的对称点为Q, 故O(0,0)为线段PQ的中点,

则过线段PQ的中点且垂直于PQ的直线方程为: $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ④;

③④联立方程组, 解之得: $x = -\frac{\sqrt{2}}{8}$, $y = \frac{1}{8}$

③④的交点就是圆心 $O_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{1}{8} \right)$,

$$r^2 = |O_1P|^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \right) \right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{99}{64}$$

故过P Q两点圆的方程为: $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{8} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{99}{64} \dots \textcircled{5}$,

把 $y = -\sqrt{2}x + 1 \dots \textcircled{2}$ 代入 $\textcircled{5}$,

$$\text{有 } x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_1 + y_2 = 1$$

\therefore A, B 也是在圆 $\textcircled{5}$ 上的.

\therefore A、P、B、Q 四点在同一圆上.

【点评】 本题考查的知识点是直线与圆锥曲线的关系, 向量在几何中的应用, 其中判断点与曲线关系时, 所使用的坐标代入验证法是解答本题的关键.