

2003年青海高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. (5分) 直线 $y=2x$ 关于 x 轴对称的直线方程为 ()

- A. $y=-\frac{1}{2}x$ B. $y=\frac{1}{2}x$ C. $y=-2x$ D. $y=2x$

2. (5分) 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x$ 等于 ()

- A. $\frac{7}{24}$ B. $-\frac{7}{24}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $-\frac{24}{7}$

3. (5分) 抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 $y=2$, 则 a 的值为 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. 8 D. -8

4. (5分) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()

- A. 48 B. 49 C. 50 D. 51

5. (5分) 双曲线虚轴的一个端点为 M , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. (5分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}} & x > 0 \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

7. (5分) 已知 $f(x^5) = \lg x$, 则 $f(2) =$ ()

- A. $\lg 2$ B. $\lg 32$ C. $\lg \frac{1}{32}$ D. $\frac{1}{5} \lg 2$

8. (5分) 函数 $y = \sin(x + \phi)$ ($0 \leq \phi \leq \pi$) 是 R 上的偶函数, 则 $\phi =$ ()

- A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

9. (5分) 已知点 $(a, 2)$ ($a > 0$) 到直线 $l: x - y + 3 = 0$ 的距离为 1, 则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2 - \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{2} + 1$

10. (5分) 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 它的内接圆柱的底面半径为 $\frac{3}{4}R$, 该圆柱的全面积为 ()

- A. $2\pi R^2$ B. $\frac{9}{4}\pi R^2$ C. $\frac{8}{3}\pi R^2$ D. $\frac{5}{2}\pi R^2$

11. (5分) 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角) 若 P_4 与 P_0 重合, 则 $\tan\theta =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

12. (5分) 棱长都为 $\sqrt{2}$ 的四面体的四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

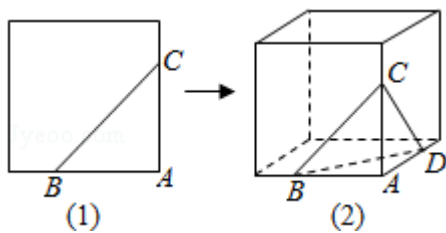
- A. 3π B. 4π C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 6π

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

13. (4分) 不等式 $\sqrt{4x - x^2} < 1$ 的解集是_____.

14. (4分) 在 $(x - \frac{1}{2x})^9$ 的展开式中, x^3 的系数是_____ (用数字作答)

15. (4分) 在平面几何里, 有勾股定理 “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB , AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”, 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出正确的结论是: “设三棱锥 $A - BCD$ 的三个侧面 ABC 、 ACD 、 ADB 两两互相垂直, 则_____.”



16. (4分) 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻区域不得使用同一颜色. 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有_____种. (以数字作答)

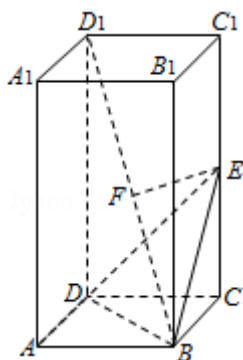


三、解答题（共6小题，满分74分）

17. (12分) 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$. $AB=1$, $AA_1=2$, 点 E 为 CC_1 中点, 点 F 为 BD_1 中点.

(1) 证明 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



18. (12分) 已知复数 z 的辐角为 60° , 且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项. 求 $|z|$.

19. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$ ($n \geq 2$).

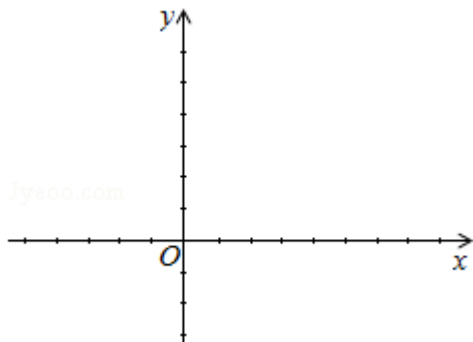
(I) 求 a_2, a_3 ;

(II) 证明 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = 2\sin x (\sin x + \cos x)$.

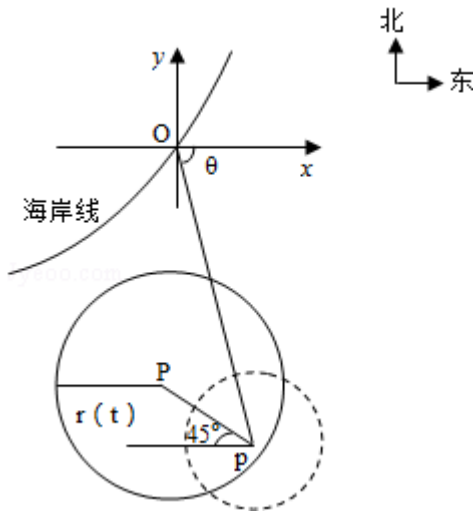
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象.



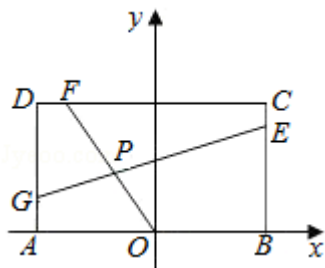
21. (12分) 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图)

的东偏南 θ ($\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300km 的海面 P 处, 并以 20km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60km , 并以 10km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



22. (14分) 已知常数 $a > 0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=4a$, O 为 AB 的中点, 点 E 、 F 、 G

分别在 BC 、 CD 、 DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



2003 年全国统一高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 直线 $y=2x$ 关于 x 轴对称的直线方程为 ()

- A. $y=-\frac{1}{2}x$ B. $y=\frac{1}{2}x$ C. $y=-2x$ D. $y=2x$

【解答】解：∵ 直线 $y=f(x)$ 关于 x 对称的直线方程为 $y=-f(x)$,

∴ 直线 $y=2x$ 关于 x 对称的直线方程为：

$$y=-2x.$$

故选：C.

2. (5 分) 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x$ 等于 ()

- A. $\frac{7}{24}$ B. $-\frac{7}{24}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $-\frac{24}{7}$

【解答】解：∵ $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$,

$$\therefore \sin x = -\frac{3}{5}, \therefore \tan x = -\frac{3}{4}.$$

$$\therefore \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = -\frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = -\frac{24}{7}.$$

故选：D.

3. (5 分) 抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 $y=2$, 则 a 的值为 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. 8 D. -8

【解答】解：抛物线 $y=ax^2$ 的标准方程是 $x^2 = \frac{1}{a}y$,

$$\text{则其准线方程为 } y = -\frac{1}{4a} = 2,$$

所以 $a = -\frac{1}{8}$.

故选: B.

4. (5分) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()

A. 48

B. 49

C. 50

D. 51

【解答】解: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\therefore a_1 = \frac{1}{3}, a_2 + a_5 = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{3} + d + \frac{1}{3} + 4d = 4, \text{ 即 } \frac{2}{3} + 5d = 4,$$

$$\text{解得 } d = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3},$$

$$\text{令 } a_n = 33,$$

$$\text{即 } \frac{2}{3}n - \frac{1}{3} = 33,$$

$$\text{解得 } n = 50.$$

故选: C.

5. (5分) 双曲线虚轴的一个端点为 M , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解答】解: 根据双曲线对称性可知 $\angle OMF_2 = 60^\circ$,

$$\therefore \tan \angle OMF_2 = \frac{OF_2}{OM} = \frac{c}{b} = \sqrt{3}, \text{ 即 } c = \sqrt{3}b,$$

$$\therefore a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2}b,$$

当 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 时, $y = \sin(x + \phi) = \cos x$, 为偶函数, 满足条件.

当 $\phi = \pi$ 时, $y = \sin(x + \phi) = -\sin x$, 为奇函数,

故选: C.

9. (5分) 已知点 $(a, 2)$ ($a > 0$) 到直线 $l: x - y + 3 = 0$ 的距离为 1, 则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2 - \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{2} + 1$

$$1 = \frac{|a - 2 + 3|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} = |a + 1|,$$

【解答】解: 由点到直线的距离公式得:

$\because a > 0,$

$$\therefore a = \sqrt{2} - 1.$$

故选: C.

10. (5分) 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 它的内接圆柱的底面半径为 $\frac{3}{4}R$, 该圆柱的全面积为 ()

- A. $2\pi R^2$ B. $\frac{9}{4}\pi R^2$ C. $\frac{8}{3}\pi R^2$ D. $\frac{5}{2}\pi R^2$

【解答】解: 设圆锥内接圆柱的高为 h , 则 $\frac{\frac{3R}{4}}{R} = \frac{3R-h}{3R}$, 解得 $h = \frac{3}{4}R$,

$$\text{所以圆柱的全面积为: } s = 2 \times \left(\frac{3}{4}R\right)^2 \pi + \left(\frac{3}{2}R\right) \pi \times \frac{3}{4}R = \frac{9}{4}\pi R^2.$$

故选: B.

11. (5分) 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角) 若 P_4 与 P_0 重合, 则 $\tan \theta =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【解答】解: 由于若 P_4 与 P_0 重合,

故 P_2 、 P_3 也都是所在边的中点,

因为 $ABCD$ 是长方形,

根据对称性可知 P_0P_1 的斜率是 $\frac{1}{2}$,

则 $\tan \theta = \frac{1}{2}$.

故选: C.

12. (5分) 棱长都为 $\sqrt{2}$ 的四面体的四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

- A. 3π B. 4π C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 6π

【解答】解: 借助立体几何的两个熟知的结论:

(1) 一个正方体可以内接一个正四面体;

(2) 若正方体的顶点都在一个球面上, 则正方体的体对角线就是球的直径.

则球的半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

\therefore 球的表面积为 3π ,

故选: A.

二、填空题 (共4小题, 每小题4分, 满分16分)

13. (4分) 不等式 $\sqrt{4x-x^2} < x$ 的解集是 $(2, 4]$.

【解答】解: $\because x > \sqrt{4x-x^2} \geq 0$,

$\therefore x > 0$,

\therefore 不等式 $\sqrt{4x-x^2} < x$, 两边平方得,

$4x - x^2 < x^2$,

$\therefore 2x^2 - 4x > 0$,

解得, $x > 2$, $x < 0$ (舍去),

$\therefore 4x - x^2 \geq 0$,

$\therefore 0 \leq x \leq 4$,

\therefore 综上得: 不等式的解集为: $(2, 4]$,

故答案为 $(2, 4]$.

14. (4分) 在 $(x - \frac{1}{2x})^9$ 的展开式中, x^3 的系数是 $-\frac{21}{2}$ (用数字作答)

【解答】解：根据题意，对于 $(x - \frac{1}{2x})^9$,

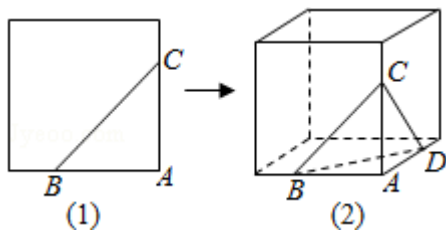
有 $T_{r+1} = C_9^r \cdot x^{9-r} \cdot (-\frac{1}{2x})^r = (-\frac{1}{2})^r \cdot C_9^r \cdot x^{9-2r}$,

令 $9 - 2r = 3$, 可得 $r = 3$,

当 $r = 3$ 时, 有 $T_4 = -\frac{21}{2}x^3$,

故答案 $-\frac{21}{2}$.

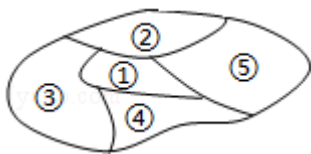
15. (4分) 在平面几何里, 有勾股定理“设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”, 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出正确的结论是: “设三棱锥 $A - BCD$ 的三个侧面 ABC, ACD, ADB 两两互相垂直, 则 $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ACD}^2 + S_{\triangle ADB}^2 = S_{\triangle BCD}^2$.”



【解答】解：建立从平面图形到空间图形的类比, 于是作出猜想: $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ACD}^2 + S_{\triangle ADB}^2 = S_{\triangle BCD}^2$.

故答案为: $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ACD}^2 + S_{\triangle ADB}^2 = S_{\triangle BCD}^2$.

16. (4分) 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻区域不得使用同一颜色. 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有 72 种. (以数字作答)



【解答】解：由题意, 选用 3 种颜色时: 涂色方法 $C_4^3 \cdot A_3^3 = 24$ 种

4 色全用时涂色方法: $C_2^1 \cdot A_4^4 = 48$ 种

所以不同的着色方法共有 72 种.

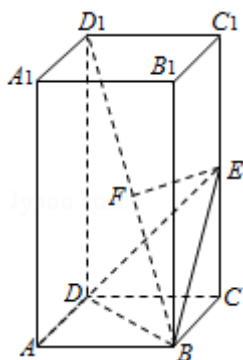
故答案为: 72

三、解答题 (共 6 小题, 满分 74 分)

17. (12分) 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$. $AB=1$, $AA_1=2$, 点 E 为 CC_1 中点, 点 F 为 BD_1 中点.

(1) 证明 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



【解答】解: (1) 取 BD 中点 M .

连接 MC , FM .

$\because F$ 为 BD_1 中点,

$$\therefore FM \parallel D_1D \text{ 且 } FM = \frac{1}{2} D_1D.$$

又 $EC = \frac{1}{2} CC_1$ 且 $EC \perp MC$,

\therefore 四边形 $EFMC$ 是矩形

$\therefore EF \perp CC_1$. 又 $FM \perp$ 面 DBD_1 .

$\therefore EF \perp$ 面 DBD_1 .

$\because BD_1 \subset$ 面 DBD_1 . $\therefore EF \perp BD_1$.

故 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线.

(II) 解: 连接 ED_1 , 有 $V_{E-DBD_1} = V_{D_1-DBE}$.

由 (I) 知 $EF \perp$ 面 DBD_1 ,

设点 D_1 到面 BDE 的距离为 d .

$$\text{则 } S_{\triangle DBE} \cdot d = S_{\triangle DBD_1} \cdot EF.$$

$\because AA_1=2$, $AB=1$.

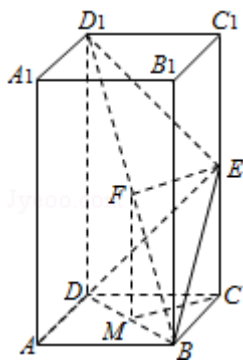
$$\therefore BD = BE = ED = \sqrt{2}, \quad EF = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle DDD_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{2} \quad S_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d = \frac{\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

\therefore

故点 D_1 到平面 DBE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



18. (12分) 已知复数 z 的辐角为 60° , 且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项. 求 $|z|$.

【解答】 解: 设 $z = (r\cos 60^\circ + r\sin 60^\circ i)$,

则复数 z 的实部为 $\frac{r}{2}$. $z - \bar{z} = r$, $z\bar{z} = r^2$

由题设 $|z-1|^2 = |z| \cdot |z-2|$,

$$\text{即: } (z-1)(\bar{z}-1) = |z| \sqrt{(z-2)(\bar{z}-2)}$$

$$\therefore r^2 - r + 1 = r \sqrt{r^2 - 2r + 4},$$

整理得 $r^2 + 2r - 1 = 0$.

$$\text{解得 } r = \sqrt{2} - 1,$$

$$r = -\sqrt{2} - 1 \text{ (舍去).}$$

$$\text{即 } |z| = \sqrt{2} - 1.$$

19. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$).

(I) 求 a_2 , a_3 ;

(II) 证明 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

【解答】解：（I） $\because a_1=1$,

$$\therefore a_2=3+1=4,$$

$$\therefore a_3=3^2+4=13;$$

（II）证明：由已知 $a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$, $n \geq 2$

$$\text{故 } a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3 + 1 = \frac{3^n - 1}{2}, \quad n \geq 2$$

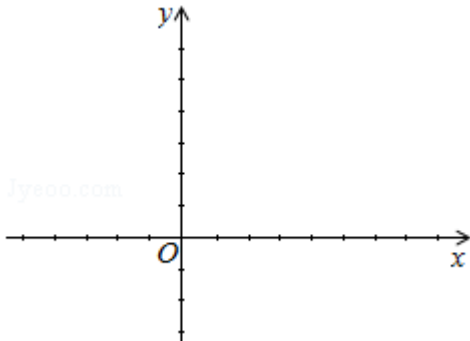
当 $n=1$ 时, 也满足上式.

所以
$$a_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

20. (12分) 已知函数 $f(x) = 2\sin x (\sin x + \cos x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象.

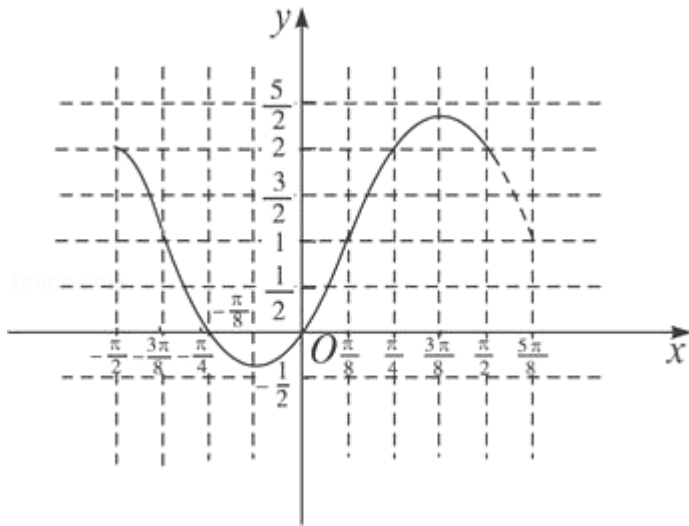


【解答】解：（1） $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 1 - \cos 2x + \sin 2x$

$$= 1 + \sqrt{2}(\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= 1 + \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

所以函数的最小正周期为 π , 最大值为 $1 + \sqrt{2}$;



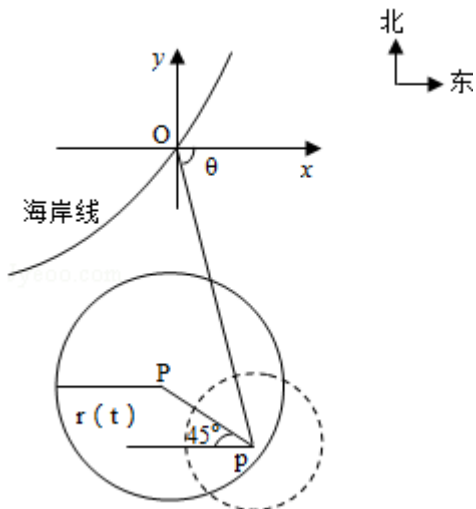
(2) 由 (1) 列表得:

| | | | | | |
|-----|-------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|
| x | $-\frac{3\pi}{8}$ | $-\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{5\pi}{8}$ |
| y | 1 | $1-\sqrt{2}$ | 1 | $1+\sqrt{2}$ | 1 |

故函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象是:

21. (12分) 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图)

的东偏南 θ ($\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300km 的海面 P 处, 并以 20km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60km , 并以 10km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



【解答】解: 如图建立坐标系: 以 O 为原点, 正东方向为 x 轴正向.

在时刻: t (h) 台风中心 $P(x, y)$ 的坐标为

$$\begin{cases} x = 300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y = -300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t. \end{cases}$$

令 (x', y') 是台风边缘线上一点, 则此时台风侵袭的区域是 $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 \leq [r(t)]^2$,

其中 $r(t) = 10t + 60$,

若在 t 时, 该城市受到台风的侵袭,

则有 $(0 - x)^2 + (0 - y)^2 \leq (10t + 60)^2$,

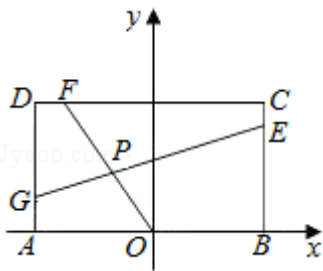
即 $(300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t)^2 + (-300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t)^2 \leq (10t + 60)^2$,

即 $t^2 - 36t + 288 \leq 0$, 解得 $12 \leq t \leq 24$.

答: 12 小时后该城市开始受到台风侵袭.

22. (14 分) 已知常数 $a > 0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 4a$, O 为 AB 的中点, 点 E, F, G

分别在 BC, CD, DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



【解答】 解: 根据题设条件, 首先求出点 P 坐标满足的方程, 据此再判断是否存在两定点, 使得点 P 到定点距离的和为定值. 按题意有 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 4a)$, $D(-2, 4a)$

设 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA} = k$ ($0 \leq k \leq 1$),

由此有 $E(2, 4ak)$, $F(2 - 4k, 4a)$, $G(-2, 4a - 4ak)$.

直线 OF 的方程为: $2ax + (2k - 1)y = 0$, ①

直线 GE 的方程为: $-a(2k - 1)x + y - 2a = 0$. ②

从①, ②消去参数 k ,

得点 $P(x, y)$ 坐标满足方程 $2a^2x^2 + y^2 - 2ay = 0$,

整理得
$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1$$

当 $a^2 = \frac{1}{2}$ 时, 点 P 的轨迹为圆弧, 所以不存在符合题意的两点;

当 $a^2 \neq \frac{1}{2}$ 时, 点 P 轨迹为椭圆的一部分, 点 P 到该椭圆焦点的距离的和为定长;

当 $a^2 < \frac{1}{2}$ 时, 点 P 到椭圆两个焦点 $(-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a), (\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a)$ 的距离之和为定值 $\sqrt{2}$;

当 $a^2 > \frac{1}{2}$ 时, 点 P 到椭圆两个焦点 $(0, a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}}), (0, a + \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}})$ 的距离之和为定值 $2a$.