

绝密★启用前

2004年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

(满分150分, 考试时间120分钟)

考生注意

1. 本场考试时间120分钟, 试卷共4页, 满分150分, 答题纸共2页.
2. 作答前, 在答题纸正面填写姓名、准考证号, 反面填写姓名, 将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域, 不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题, 用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题(本大题满分48分, 每小题4分)

1. 若 $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, 则 $\operatorname{tg}(a + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

2. 设抛物线的顶点坐标为 $(2, 0)$, 准线方程为 $x = -1$, 则它的焦点坐标为 _____.

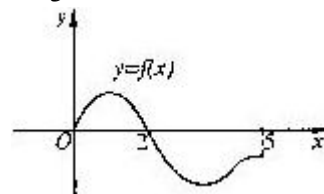
3. 设集合 $A = \{5, \log_2(a+3)\}$, 集合 $B = \{a, b\}$. 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) 的公比 $q = -\frac{1}{2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}) = \frac{8}{3}$, 则 $a_1 =$ _____.

5. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$. 若当 $x \in [0, 5]$ 时,

$f(x)$ 的图象如右图, 则不等式 $f(x) < 0$ 的

解是 _____.



6. 已知点 $A(-1, -5)$ 和向量 $\vec{a} = \{2, 3\}$, 若 $\vec{AB} = 3\vec{a}$, 则点B的坐

标为 _____.

7. 当 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ y \geq 3 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$ 时, 目标函数 $k = 3x - 2y$ 的最大值为 _____.

8. 圆心在直线 $x = 2$ 上的圆C与y轴交于两点 $A(0, -4)$, $B(0, -2)$, 则圆C的方程为 _____.

9. 若在二项式 $(x+1)^{10}$ 的展开式中任取一项, 则该项的系数为奇数的概率是 _____.

(结果用分数表示)

10. 若函数 $f(x) = a|x - b| + 2$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 则实数 a, b 的取值范围是 _____.

11. 教材中“坐标平面上的直线”与“圆锥曲线”两章内容体现出解析几何的本质是_____。

12. 若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的“基本量”. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列, 下列 $\{a_n\}$ 的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第_____组. (写出所有符合要求的组号)

- ① S_1 与 S_2 ; ② a_2 与 S_3 ; ③ a_1 与 a_n ; ④ q 与 a_n .

其中 n 为大于 1 的整数, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

二、选择题(本大题满分16分, 每小题4分)

13. 在下列关于直线 l 、 m 与平面 α 、 β 的命题中, 真命题是 ()

- A. 若 $l \subset \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp \alpha$. B. 若 $l \perp \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $l \perp \alpha$.
 C. 若 $l \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \parallel \alpha$. D. 若 $\alpha \cap \beta = m$ 且 $l \parallel m$, 则 $l \parallel \alpha$.

14. 三角方程 $2\sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1$ 的解集为 ()

- A. $\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\{x \mid x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\{x \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\{x \mid x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

15. 若函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = \lg(x+1)$ 的图象关于直线 $x - y = 0$ 对称, 则 $f(x) =$ ()

- A. $10^x - 1$. B. $1 - 10^x$. C. $1 - 10^{-x}$. D. $10^{-x} - 1$.

16. 某地2004年第一季度应聘和招聘人数排行榜前5个行业的情况列表如下

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215830	200250	154676	74570	65280

行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124620	102935	89115	76516	70436

若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况,则根据表中数据,就业形势一定是 ()

- A. 计算机行业好于化工行业.
- B. 建筑行业好于物流行业.
- C. 机械行业最紧张.
- D. 营销行业比贸易行业紧张.

三、解答题(本大题满分86分)

17. (本题满分12分)

已知复数 z_1 满足 $(1+i)z_1 = -1+5i$, $z_2 = a-2-i$, 其中 i 为虚数单位, $a \in \mathbb{R}$, 若 $|z_1 - \overline{z_2}| < |z_1|$,

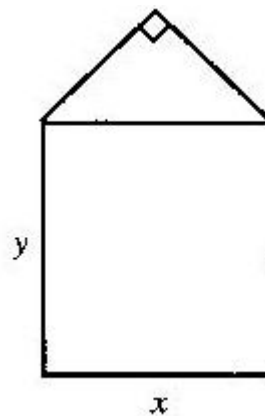
求 a 的取值范围.

18. (本题满分12分)

某单位用木料制作如图所示的框架,

框架的下部是边长分别为 x 、 y (单位: m)的矩形. 上部是等腰直角三角形. 要求框架围成的总面积 8m^2 . 问 x 、 y 分别为多少(精确到 0.001m)
时用料最省?

问 x 、 y 分别为多少(精确到 0.001m)



19. (本题满分14分) 第1小题满分6分, 第2小题满分8分

记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为A,

$$g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)] \quad (a < 1)$$

的定义域为B.

- (1) 求A;
- (2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

20. (本题满分14分) 第1小题满分6分, 第2小题满分8分

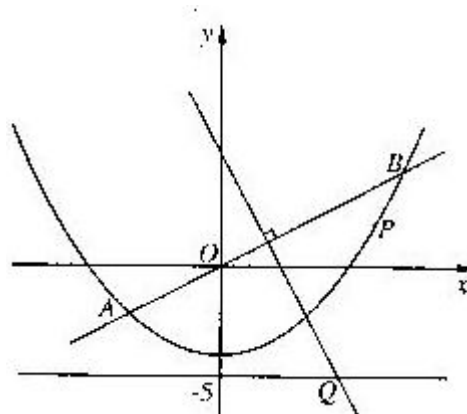
如图,

直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2 - 4$ 交于A、B两点,

线段AB的垂直平分线与直线 $y = -5$ 交于Q点.

(1) 求点Q的坐标;

(2) 当P为抛物线上位于线段AB下方(含点A、B)的动点时, 求 $\triangle OPQ$ 面积的最大值.



21. (本题满分16分) 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分

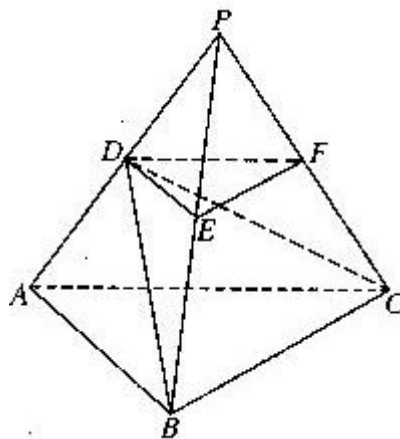
如图, $P-ABC$ 是底面边长为1的正三棱锥, D 、 E 、 F 分别为棱长 PA 、 PB 、 PC 上的点, 截面 $DEF \parallel$ 底面 ABC , 且棱台 $DEF-ABC$ 与棱锥 $P-ABC$ 的棱长和相等. (棱长和是指多面体中所有棱的长度之和)

(1) 证明: $P-ABC$ 为正四面体;

(2) 若 $PD = \frac{1}{2} PA$, 求二面角 $D-BC-A$ 的大小; (结果用反三角函数值表示)

(3) 设棱台 $DEF-ABC$ 的体积为 V , 是否存在体积为 V 且各棱长均相等的直平行六面体, 使得它与棱台 $DEF-ABC$ 有相同的棱长和?

若存在, 请具体构造出这样的一个直平行六面体, 并给出证明; 若不存在, 请说明理由.



22. (本题满分18分) 第1小题满分6分, 第2小题满分4分, 第3小题满分8分

设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) 是二次曲线 C 上的点, 且 $a_1 = |OP_1|^2$,

$a_2 = |OP_2|^2, \dots, a_n = |OP_n|^2$ 构成了一个公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列, 其中 O 是坐标原点.

记 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

(1) 若 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1, n=3$.

点 $P_1(3, 0)$

及 $S_3 = 162$,

求点 P_3 的坐标：(只需写出一个)

(2) 若C的方程为 $y^2=2px(p \neq 0)$. 点 $P_1(0, 0)$, 对于给定的自然数 n , 证明: $(x_1+p)^2, (x_2+p)^2, \dots, (x_n+p)^2$ 成等差数列;

(3) 若C的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. 点 $P_1(a, 0)$, 对于给定的自然数 n ,

当公差 d 变化时, 求 S_n 的最小值.

符号意义	本试卷所用符号	等同于《实验教材》符号
向量坐标	$\vec{a} = \{x, y\}$	$\vec{a} = (x, y)$
正切	tg	tan

2004年普通高等学校招生全国统一考试 数学参考答案（文史类）（上海卷）

一、填空题(本大题满分48分, 每小题4分)

1. 3 2. (5, 0) 3. {1, 2, 5} 4. 2 5. (-2, 0) ∪ (2, 5] 6. (5, 4)

7. 6 8. $(x-2)^2+(y+3)^2=5$ 9. $\frac{4}{11}$ 10. $a>0$ 且 $b\leq 0$

11. 用代数的方法研究图形的几何性质 12. ①、④

二、选择题(本大题满分16分, 每小题4分)

13. B 14. C 15. A 16. B

三、解答题(本大题满分86分)

17. 【解】由题意得 $z_1 = \frac{-1+5i}{1+i} = 2+3i$,

$$\text{于是 } |z_1 - z_2| = |4-a+2i| = \sqrt{(4-a)^2 + 4}, \quad |z_1| = \sqrt{13}.$$

$$\text{由 } \sqrt{(4-a)^2 + 4} < \sqrt{13}, \text{ 得 } a^2 - 8a + 7 < 0, \quad 1 < a < 7.$$

18. 【解】由题意得 $xy + \frac{1}{4}x^2 = 8$, $\therefore y = \frac{8 - \frac{x^2}{4}}{x} = \frac{8}{x} - \frac{x}{4}$ ($0 < x < 4\sqrt{2}$).

$$\text{于是, 框架用料长度为 } l = 2x + 2y + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{16\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)} = 4$$

$$\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}.$$

$$\text{当 } \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)x = \frac{16}{x}, \text{ 即 } x = 8 - 4\sqrt{2} \text{ 时等号成立.}$$

此时, $x \approx 2.343$, $y = 2\sqrt{2} \approx 2.828$. 故当 x 为 2.343m, y 为 2.828m 时, 用料最省.

19. 【解】(1) $2 - \frac{x+3}{x+1} \geq 0$, 得 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, $x < -1$ 或 $x \geq 1$ 即 $A = (-\infty, -1) \cup [1, +$

$\infty)$

(2) 由 $(x-a-1)(2a-x) > 0$, 得 $(x-a-1)(x-2a) < 0$.

$\therefore a < 1, \therefore a+1 > 2a, \therefore B = (2a, a+1)$.

$\therefore B \subseteq A, \therefore 2a \geq 1$ 或 $a+1 \leq -1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 或 $a \leq -2$, 而 $a < 1$,

$\therefore \frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $a \leq -2$, 故当 $B \subseteq A$ 时, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

20. 【解】(1) 解方程组 $y = \frac{1}{2}x$ 得 $\begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = 8 \end{cases}$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - 4 \quad y_1 = -2, \quad y_2 = 4$$

即A(-4, -2), B(8, 4), 从而AB的中点为M(2, 1).

由 $k_{AB} = \frac{1}{2}$, 直线AB的垂直平分线方程 $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$.

令 $y = -5$, 得 $x = 5$, $\therefore Q(5, -5)$

(2) 直线OQ的方程为 $x + y = 0$, 设 $P(x, \frac{1}{8}x^2 - 4)$.

$$\therefore \text{点P到直线OQ的距离} d = \frac{\left| x + \frac{1}{8}x^2 - 4 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} |x^2 + 8x - 32|,$$

$$|OQ| = 5\sqrt{2}, \therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |OQ| d = \frac{5}{16} |x^2 + 8x - 32|.$$

$\therefore P$ 为抛物线上位于线段AB下方的点, 且P不在直线OQ上,

$\therefore -4 \leq x < 4\sqrt{3} - 4$ 或 $4\sqrt{3} - 4 < x \leq 8$. \therefore 函数 $y = x^2 + 8x - 32$ 在区间 $[-4, 8]$ 上单调递增,

且当 $x = -4$ 时, $|x^2 + 8x - 32| = 48$ 当 $x = 8$ 时, $|x^2 + 8x - 32| = 96$

\therefore 当 $x = 8$ 时, $\triangle OPQ$ 的面积取到最大值 $\frac{5}{16} \times 96 = 30$.

21. 【证明】(1) \therefore 棱台DEF-ABC与棱锥P-ABC的棱长和相等,

$\therefore DE + EF + FD = PD + PE + PF$. 又 \therefore 截面DEF // 底面ABC,

$\therefore DE = EF = FD = PD = PE = PF$, $\angle DPE = \angle EPF = \angle FPD = 60^\circ$, $\therefore P-ABC$ 是正四面体.

【解】(2) 取BC的中点M, 连接PM, DM, AM.

$\therefore BC \perp PM, BC \perp AM$, $\therefore BC \perp$ 平面PAM, $BC \perp DM$,

则 $\angle DMA$ 为二面角D-BC-A的平面角. 由(1)知, P-ABC的各棱长均为1,

$$\therefore PM = AM = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{由D是PA的中点, 得} \sin \angle DMA = \frac{AD}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \angle DMA = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3) 存在满足条件的直平行六面体. 棱台DEF-ABC的棱长和为定值6, 体积为V.

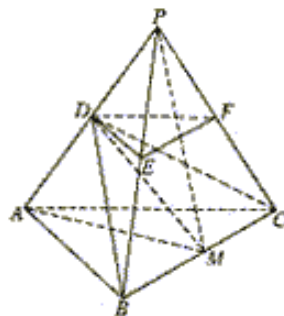
设直平行六面体的棱长均为 $\frac{1}{2}$, 底面相邻两边夹角为 α ,

则该六面体棱长和为6, 体积为 $\frac{1}{8} \sin \alpha = V$.

\therefore 正四面体P-ABC的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{12}$,

$$\therefore 0 < V < \frac{\sqrt{2}}{12}, 0 < 8V < 1. \text{可知 } \alpha = \arcsin(8V)$$

故构造棱长均为 $\frac{1}{2}$, 底面相邻两边夹角为 $\arcsin(8V)$ 的直平行六面体即满足要求.



22. 【解】(1) $a_1 = |OP_1|^2 = 9$, 由 $S_3 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) = 162$, 得 $a_3 = |OP_3|^2 = 99$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{9} - y^2 = 1 \\ x_3^2 + y_3^2 = 99 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_3^2 = 90 \\ y_3^2 = 9 \end{cases} \quad \therefore \text{点 } P_3 \text{ 的坐标可以为 } (3\sqrt{10}, 3).$$

(2) 对每个自然数 $k, 1 \leq k \leq n$, 由题意 $|OP_k|^2 = (k-1)d$, 及

$$\begin{cases} y_k^2 = 2px_k \\ x_k^2 + y_k^2 = (k-1)d \end{cases}, \text{ 得 } x_k^2 + 2px_k = (k-1)d$$

即 $(x_k + p)^2 = p^2 + (k-1)d$,
 $\therefore (x_1 + p)^2, (x_2 + p)^2, \dots, (x_n + p)^2$ 是首项为 p^2 , 公差为 d 的等差数列.

【解法一】原点 O 到二次曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上各点的最小距离为 b , 最大距离为 a .

$$\therefore a_1 = |OP_1|^2 = a^2, \therefore d < 0, \text{ 且 } a_n = |OP_n|^2 = a^2 + (n-1)d \geq b^2,$$

$$\therefore \frac{b^2 - a^2}{n-1} \leq d < 0. \quad \therefore n \geq 3, \frac{n(n-1)}{2} > 0 \quad \therefore S_n = na^2 + \frac{n(n-1)}{2}d \text{ 在 } \left[\frac{b^2 - a^2}{n-1}, 0 \right) \text{ 上递增,}$$

故 S_n 的最小值为 $na^2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{n-1} = \frac{n(a^2 + b^2)}{2}$.

【解法二】对每个自然数 $k (2 \leq k \leq n)$,

$$\begin{aligned} & x_k^2 + y_k^2 = a^2 + (k-1)d \\ \text{由 } & \frac{x_k^2}{a^2} + \frac{y_k^2}{b^2} = 1, \text{ 解得 } y_k^2 = \frac{-b^2(k-1)d}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < y_k^2 \leq b^2, \text{ 得 } \frac{b^2 - a^2}{k-1} \leq d < 0 \quad \therefore \frac{b^2 - a^2}{n-1} \leq d < 0 \quad \text{以下与解法一相同.}$$