

绝密★启用前

2008年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

得分	评卷人

一. 填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 不等式 $|x-1| < 1$ 的解集是_____。
2. 若集合 $A = \{x | x \leq 2\}$ 、 $B = \{x | x \geq a\}$ 满足 $A \cap B = \{2\}$ ，则实数 $a =$ _____。
3. 若复数 z 满足 $z = i(2-z)$ (i 是虚数单位)，则 $z =$ _____。
4. 若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = x^2$ ($x > 0$)，则 $f(4) =$ _____。
5. 若向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ，且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____。
6. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 的最大值是_____。
7. 在平面直角坐标系中，从六个点： $A(0,0)$ 、 $B(2,0)$ 、 $C(1,1)$ 、 $D(0,2)$ 、 $E(2,2)$ 、 $F(3,3)$ 中任取三个，这三点能构成三角形的概率是_____ (结果用分数表示)。
8. 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数。若当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = \lg x$ ，则满足 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围是_____。
9. 已知总体的各个体的值由小到大依次为2, 3, 3, 7, a , b , 12, 13.7, 18.3, 20, 且总体的中位数为10.5。若要使该总体的方差最小，则 a 、 b 的取值分别是_____。

10. 某海域内有一孤岛. 岛四周的海平面 (视为平面) 上有一浅水区 (含边界), 其边界是长轴长为 $2a$ 、短轴长为 $2b$ 的椭圆. 已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为 h_1 、 h_2 , 且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上. 现有船只经过该海域 (船只的大小忽略不计), 在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为 θ_1 、 θ_2 , 那么船只已进入该浅水区的判别条件是_____.

11. 方程 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的解可视为函数 $y = x + \sqrt{2}$ 的图像与函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像交点的横坐标. 若方程 $x^4 + ax - 4 = 0$ 的各个实根 x_1, x_2, \dots, x_k ($k \leq 4$) 所对应的点 $(x_i, \frac{4}{x_i})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 均在直线 $y = x$ 的同侧, 则实数 a 的取值范围是_____.

得分	评卷人

二. 选择题 (本大题满分16分) 本大题共有4题, 每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得4分, 不选、选错或者选出的代号超过一个 (不论是否都写在圆括号内), 一律得零分.

12. 组合数 C_n^r ($n > r \geq 1, n, r \in \mathbb{Z}$) 恒等于 [答]()

(A) $\frac{r+1}{n+1} C_{n-1}^{r-1}$. (B) $(n+1)(r+1) C_{n-1}^{r-1}$. (C) $nr C_{n-1}^{r-1}$. (D) $\frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$.

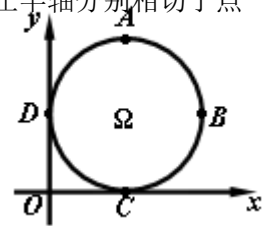
13. 给定空间中的直线 l 及平面 α . 条件 “直线 l 与平面 α 内无数条直线都垂直” 是 “直线 l 与平面 α 垂直” 的 [答]()

(A) 充要条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分又非必要条件.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公比为 $a - \frac{3}{2}$ 的无穷等比数列, 且 $\{a_n\}$ 各项的和为 a , 则 a 的值是 [答]()

(A) 1. (B) 2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{4}$.

15. 如图, 在平面直角坐标系中, Ω 是一个与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴分别相切于点 C 、 D 的定圆所围成的区域 (含边界), A 、 B 、 C 、 D 是该圆的四等分点. 若点 $P(x, y)$ 、点 $P'(x', y')$ 满足 $x \leq x'$ 且 $y \geq y'$, 则称 P 优于 P' . 如果 Ω 中的点 Q 满足: 不存在 Ω 中的其它点优



于 Q ，那么所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧 [答]()

- (A) \widehat{AB} (B) \widehat{BC} (C) \widehat{CD} (D) \widehat{DA}

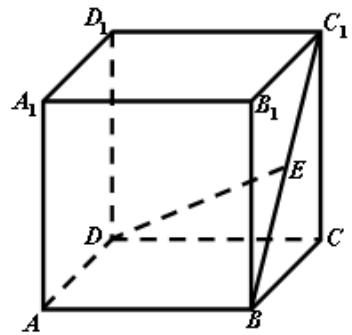
三. 解答题 (本大题满分90分) 本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

得分	评卷人

16. (本题满分12分)

如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是 BC_1 的中点. 求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示).

[解]



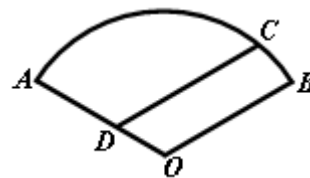
得分	评卷人

17. (本题满分13分)

如图，某住宅小区的平面图呈圆心角为 120° 的扇形 AOB 。小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处，且小区里有一条平行于 BO 的小路 CD 。

已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了10分钟，从 D 沿 DA 走到 A 用了6分钟。

若此人步行的速度为每分钟50米，求该扇形的半径 OA 的长（精确到1米）。



[解]

得分	评卷人

18. (本题满分15分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分9分.

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, P 是 C 上的任意点.

- (1) 求证: 点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积是一个常数;
- (2) 设点 A 的坐标为 $(3, 0)$, 求 $|PA|$ 的最小值.

[证明] (1)

[解] (2)

得分	评卷人

19. (本题满分16分) 本题共有2个小题, 第1小题满分8分, 第2小题满分8分.

已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$.

(1) 若 $f(x) = 2$, 求 x 的值;

(2) 若 $2^t f(2t) + mf(t) \geq 0$ 对于 $t \in [1, 2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

[解] (1)

(2)

得分	评卷人

20. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分8分.

设 $P(a, b)$ ($b \neq 0$) 是平面直角坐标系 xOy 中的点, l 是经过原点与点 $(1, b)$ 的直线. 记 Q 是直线 l 与抛物线 $x^2 = 2py$ ($p \neq 0$) 的异于原点的交点.

(1) 已知 $a=1, b=2, p=2$. 求点 Q 的坐标;

(2) 已知点 $P(a, b)$ ($ab \neq 0$) 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上, $p = \frac{1}{2ab}$. 求证: 点 Q 落在双曲线 $4x^2 - 4y^2 = 1$ 上;

(3) 已知动点 $P(a, b)$ 满足 $ab \neq 0, p = \frac{1}{2ab}$.

若点 Q 始终落在一条关于 x 轴对称的抛物线上, 试问动点 P 的轨迹落在哪种二次曲线上, 并说明理由.

[解] (1)

[证明] (2)

[解] (3)

得分	评卷人

21. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分7分, 第3小题满分8分.

已知以 a_1 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + c, & a_n < 3, \\ \frac{a_n}{d}, & a_n \geq 3. \end{cases}$

(1) 当 $a_1 = 1, c = 1, d = 3$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $0 < a_1 < 1, c = 1, d = 3$ 时, 试用 a_1 表示数列 $\{a_n\}$ 前100项的和 S_{100} ;

(3) 当 $0 < a_1 < \frac{1}{m}$ (m 是正整数), $c = \frac{1}{m}$, 正整数 $d \geq 3m$ 时, 求证: 数列 $a_2 - \frac{1}{m}, a_{3m+2} - \frac{1}{m}, a_{6m+2} - \frac{1}{m}, a_{9m+2} - \frac{1}{m}$ 成等比数列当且仅当 $d = 3m$.

[解] (1)

(2)

[证明] (3)

在 $\triangle CDO$ 中, $CD^2 + OD^2 - 2 \cdot CD \cdot OD \cdot \cos 60^\circ = OC^2$, 6分

即 $500^2 + (r - 300)^2 - 2 \times 500 \times (r - 300) \times \frac{1}{2} = r^2$, 9分

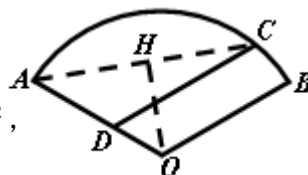
解得 $r = \frac{4900}{11} \approx 445$ (米).

答: 该扇形的半径 OA 的长约为445米. 13分

[解法二] 连接 AC , 作 $OH \perp AC$, 交 AC 于 H 2分

由题意, 得 $CD = 500$ (米), $AD = 300$ (米), $\angle CDA = 120^\circ$ 4分

在 $\triangle ACD$ 中, $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cdot \cos 120^\circ$
 $= 500^2 + 300^2 + 2 \times 500 \times 300 \times \frac{1}{2} = 700^2$,



$\therefore AC = 700$ (米), 6分

$\cos \angle CAD = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2 \cdot AC \cdot AD} = \frac{11}{14}$ 9分

在直角 $\triangle HAO$ 中, $AH = 350$ (米), $\cos \angle HAO = \frac{11}{14}$,

$\therefore OA = \frac{AH}{\cos \angle HAO} = \frac{4900}{11} \approx 445$ (米).

答: 该扇形的半径 OA 的长约为445米. 13分

18. [解] (1) 设 $P(x_1, y_1)$ 是双曲线上任意一点,

该双曲线的两条渐近线方程分别是 $x - 2y = 0$ 和 $x + 2y = 0$ 2分

点 $P(x_1, y_1)$ 到两条渐近线的距离分别是 $\frac{|x_1 - 2y_1|}{\sqrt{5}}$ 和 $\frac{|x_1 + 2y_1|}{\sqrt{5}}$, 4分

它们的乘积是 $\frac{|x_1 - 2y_1|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|x_1 + 2y_1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_1^2 - 4y_1^2|}{5} = \frac{4}{5}$.

\therefore 点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积是一个常数. 6分

(2) 设 P 的坐标为 (x, y) , 则

$|PA|^2 = (x - 3)^2 + y^2$ 8分

$= (x - 3)^2 + \frac{x^2}{4} - 1$

$= \frac{5}{4} \left(x - \frac{12}{5} \right)^2 + \frac{4}{5}$ 11分

$$\because |x| \geq 2, \quad \dots\dots 13\text{分}$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{12}{5} \text{ 时, } |PA|^2 \text{ 的最小值为 } \frac{4}{5},$$

$$\text{即 } |PA| \text{ 的最小值为 } \frac{2\sqrt{5}}{5}. \quad \dots\dots 15\text{分}$$

$$19. [\text{解}] \quad (1) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = 0; \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}. \quad \dots\dots 2\text{分}$$

$$\text{由条件可知 } 2^x - \frac{1}{2^x} = 2, \text{ 即 } 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } 2^x = 1 \pm \sqrt{2}. \quad \dots\dots 6\text{分}$$

$$\because 2^x > 0, \therefore x = \log_2(1 + \sqrt{2}). \quad \dots\dots 8\text{分}$$

$$(2) \text{ 当 } t \in [1, 2] \text{ 时, } 2^t \left(2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}} \right) + m \left(2^t - \frac{1}{2^t} \right) \geq 0, \quad \dots\dots 10\text{分}$$

$$\text{即 } m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1).$$

$$\because 2^{2t} - 1 > 0, \therefore m \geq -(2^{2t} + 1). \quad \dots\dots 13\text{分}$$

$$\because t \in [1, 2], \therefore -(1 + 2^{2t}) \in [-17, -5],$$

$$\text{故 } m \text{ 的取值范围是 } [-5, +\infty). \quad \dots\dots 16\text{分}$$

$$20. [\text{解}] \quad (1) \text{ 当 } a = 1, b = 2, p = 2 \text{ 时,}$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = 2x, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} x = 8, \\ y = 16, \end{cases}$$

$$\text{即点 } Q \text{ 的坐标为 } (8, 16). \quad \dots\dots 3\text{分}$$

$$[\text{证明}] \quad (2) \text{ 由方程组 } \begin{cases} x^2 = \frac{1}{ab}y, \\ y = bx, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} x = \frac{1}{a}, \\ y = \frac{b}{a}, \end{cases}$$

$$\text{即点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(\frac{1}{a}, \frac{b}{a} \right). \quad \dots\dots 5\text{分}$$

$$\because P \text{ 是椭圆上的点, 即 } \frac{a^2}{4} + b^2 = 1,$$

$$\therefore 4 \left(\frac{1}{a} \right)^2 - 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{4}{a^2} (1 - b^2) = 1.$$

因此点 Q 落在双曲线 $4x^2 - 4y^2 = 1$ 上. 8分

(3) 设 Q 所在抛物线的方程为 $y^2 = 2q(x - c)$, $q \neq 0$ 10分

将 $Q\left(\frac{1}{a}, \frac{b}{a}\right)$ 代入方程, 得 $\frac{b^2}{a^2} = 2q\left(\frac{1}{a} - c\right)$, 即 $b^2 = 2qa - 2qca^2$ 12分

当 $qc = 0$ 时, $b^2 = 2qa$, 此时点 P 的轨迹落在抛物线上;

当 $qc = \frac{1}{2}$ 时, $\left(a - \frac{1}{2c}\right)^2 + b^2 = \frac{1}{4c^2}$, 此时点 P 的轨迹落在圆上;

当 $qc > 0$ 且 $qc \neq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{\left(a - \frac{1}{2c}\right)^2}{\frac{1}{4c^2}} + \frac{b^2}{\frac{q}{2c}} = 1$, 此时点 P 的轨迹落在椭圆上;

当 $qc < 0$ 时, $\frac{\left(a - \frac{1}{2c}\right)^2}{\frac{1}{4c^2}} - \frac{b^2}{\left(-\frac{q}{2c}\right)} = 1$, 此时点 P 的轨迹落在双曲线上.

..... 16分

21. [解] (1) 由题意得 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k - 2, \\ 2, & n = 3k - 1, \\ 3, & n = 3k, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ 3分

(2) 当 $0 < a_1 < 1$ 时,

$$a_2 = a_1 + 1, \quad a_3 = a_1 + 2, \quad a_4 = a_1 + 3, \quad a_5 = \frac{a_1}{3} + 1, \quad a_6 = \frac{a_1}{3} + 2, \quad a_7 = \frac{a_1}{3} + 3, \quad \dots,$$

$$a_{3k-1} = \frac{a_1}{3^{k-1}} + 1, \quad a_{3k} = \frac{a_1}{3^{k-1}} + 2, \quad a_{3k+1} = \frac{a_1}{3^{k-1}} + 3, \quad \dots \quad \text{..... 6分}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{100} &= a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{98} + a_{99} + a_{100}) \\ &= a_1 + (3a_1 + 6) + (a_1 + 6) + \left(\frac{a_1}{3} + 6\right) + \dots + \left(\frac{a_1}{3^{31}} + 6\right) \end{aligned}$$

$$= a_1 + a_1 \left(3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{31}}\right) + 6 \times 33$$

$$= \frac{1}{2} \left(11 - \frac{1}{3^{31}}\right) a_1 + 198. \quad \text{..... 10分}$$

(3) 当 $d = 3m$ 时, $a_2 = a_1 + \frac{1}{m}$;

$$\therefore a_{3m} = a_1 + \frac{3m-1}{m} = a_1 - \frac{1}{m} + 3 < 3 < a_1 + 3 = a_{3m+1}, \therefore a_{3m+2} = \frac{a_1}{3m} + \frac{1}{m};$$

$$\therefore a_{6m} = \frac{a_1}{3m} - \frac{1}{m} + 3 < 3 < \frac{a_1}{3m} + 3 = a_{6m+1}, \therefore a_{6m+2} = \frac{a_1}{9m^2} + \frac{1}{m};$$

$$\therefore a_{9m} = \frac{a_1}{9m^2} - \frac{1}{m} + 3 < 3 < \frac{a_1}{9m^2} + 3 = a_{9m+1}, \therefore a_{9m+2} = \frac{a_1}{27m^3} + \frac{1}{m}.$$

$$\therefore a_2 - \frac{1}{m} = a_1, a_{3m+2} - \frac{1}{m} = \frac{a_1}{3m}, a_{6m+2} - \frac{1}{m} = \frac{a_1}{9m^2}, a_{9m+2} - \frac{1}{m} = \frac{a_1}{27m^3}.$$

综上所述, 当 $d = 3m$ 时, 数列 $a_2 - \frac{1}{m}, a_{3m+2} - \frac{1}{m}, a_{6m+2} - \frac{1}{m}, a_{9m+2} - \frac{1}{m}$ 是公比为 $\frac{1}{3m}$ 的等比数列.13分

$$\text{当 } d \geq 3m+1 \text{ 时, } a_{3m+2} = \frac{a_1+3}{d} \in \left(0, \frac{1}{m}\right),$$

$$a_{6m+2} = \frac{a_1+3}{d} + 3 \in \left(3, 3 + \frac{1}{m}\right), a_{6m+3} = \frac{\frac{a_1+3}{d} + 3}{d} \in \left(0, \frac{1}{m}\right),$$

$$a_{9m+2} = \frac{\frac{a_1+3}{d} + 3}{d} + \frac{3m-1}{m} \in \left(3 - \frac{1}{m}, 3\right). \quad \text{.....15分}$$

$$\text{由于 } a_{3m+2} - \frac{1}{m} < 0, a_{6m+2} - \frac{1}{m} > 0, a_{9m+2} - \frac{1}{m} > 0,$$

故数列 $a_2 - \frac{1}{m}, a_{3m+2} - \frac{1}{m}, a_{6m+2} - \frac{1}{m}, a_{9m+2} - \frac{1}{m}$ 不是等比数列.

所以, 数列 $a_2 - \frac{1}{m}, a_{3m+2} - \frac{1}{m}, a_{6m+2} - \frac{1}{m}, a_{9m+2} - \frac{1}{m}$ 成等比数列当且仅当 $d = 3m$.
.....18分

1. 不等式 $|x-1| < 1$ 的解集是_____.

【答案】 (0, 2)

【解析】 由 $-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$.

2. 若集合 $A = \{x|x \leq 2\}$ 、 $B = \{x|x \geq a\}$ 满足 $A \cap B = \{2\}$, 则实数 $a =$ _____.

【答案】 2

【解析】 由 $A \cap B = \{2\} \Rightarrow A, B$ 只有一个公共元素 $2 \Rightarrow a = 2$.

3.若复数 z 满足 $z=i(2-z)$ (i 是虚数单位), 则 $z=$ _____.

【答案】 $1+i$

【解析】 由 $z=i(2-z) \Rightarrow z = \frac{2i}{1+i} = 1+i$.

4.若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=x^2$ ($x>0$), 则 $f(4)=$ _____.

【答案】 2

【解析】 令 $f(4)=t \Rightarrow f^{-1}(t)=4 \Rightarrow t^2=4(t>0) \Rightarrow t=2$.

5.若向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$ _____.

【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=7 \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}.$$

6.函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}+x)$ 的最大值是_____.

【答案】 2

【解析】 由 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow f(x)_{\max}=2$.

7.在平面直角坐标系中, 从六个点: A(0,0)、B(2,0)、C(1,1)、D(0,2)、E(2,2)、F(3,3)中任取三个, 这三点能构成三角形的概率是_____ (结果用分数表示).

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】 已知 A、C、E、F 共线; B、C、D 共线; 六个无共线的点生成三角形总数为:

C_6^3 ; 可构成三角形的个数为: $C_6^3 - C_4^3 - C_3^3 = 15$, 所以所求概率为: $\frac{C_6^3 - C_4^3 - C_3^3}{C_6^3} = \frac{3}{4}$;

8.设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 若当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)=\lg$

x , 则满足 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

【解析】 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$; 由 $f(x)$ 为奇函数得:

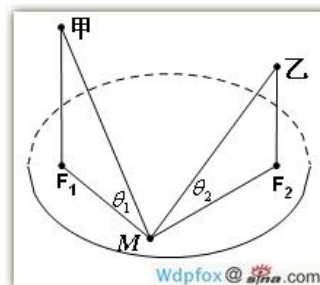
当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow$ 结论;

9.已知总体的各个体的值由小到大依次为2,3,3,7, a , b ,12, 13.7, 18.3, 20, 且总体的中位数为10.5, 若要使该总体的方差最小, 则 a 、 b 的取值分别是_____.

【答案】 $a = 10.5, b = 10.5$

【解析】 根据总体方差的定义知，只需且必须 $a = 10.5, b = 10.5$ 时，总体方差最小；

10. 某海域内有一孤岛，岛四周的海平面（视为平面）上有一浅水区（含边界），其边界是长轴长为 $2a$ ，短轴长为 $2b$ 的椭圆，已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为 h_1, h_2 ，且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上，现有船只经过该海域（船只的大小忽略不计），在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为 θ_1, θ_2 ，那么船只已进入该浅水区的判别条件是_____.



【答案】 $h_1 \cdot \cot \theta_1 + h_2 \cdot \cot \theta_2 \leq 2a$

【解析】 依题意， $|MF_1| + |MF_2| \leq 2a$

$$\Rightarrow h_1 \cdot \cot \theta_1 + h_2 \cdot \cot \theta_2 \leq 2a;$$

11. 方程 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的解可视为函数 $y = x + \sqrt{2}$ 的图像与函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像交点的横坐标，若 $x^4 + ax - 4 = 0$ 的各个实根 x_1, x_2, \dots, x_k ($k \leq 4$) 所对应的点 $(x_i, \frac{4}{x_i})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 均在直线 $y = x$ 的同侧，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$

【解析】 方程的根显然 $x \neq 0$ ，原方程等价于 $x^3 + a = \frac{4}{x}$ ，原方程的实根是曲线

$y = x^3 + a$ 与曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的交点的横坐标；而曲线 $y = x^3 + a$ 是由曲线 $y = x^3$ 向上或向下

平移 $|a|$ 个单位而得到的。若交点 $(x_i, \frac{4}{x_i})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 均在直线 $y = x$ 的同侧，因直线 $y = x$ 与 $y = \frac{4}{x}$ 交点为： $(-2, -2), (2, 2)$ ；

所以结合图象可得：

$$\begin{cases} a > 0 \\ x^3 + a > -2 \\ x \geq -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a < 0 \\ x^3 + a < 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, -6) \cup (6, +\infty);$$

12. 组合数 C_n^r ($n > r \geq 1, n, r \in \mathbb{Z}$) 恒等于 ()

A. $\frac{r+1}{n+1} C_{n-1}^{r-1}$ B. $(n+1)(r+1) C_{n-1}^{r-1}$ C. $nr C_{n-1}^{r-1}$ D. $\frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$

【答案】 D

【解析】由 $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} = \frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$.

13.

给定空间中的直线 l 及平面 α ，条件“直线 l 与平面 α 内无数条直线都垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的 () 条件

- A. 充要 B. 充分非必要 C. 必要非充分 D. 既非充分又非必要

【答案】 C

【解析】直线与平面 α 内的无数条平行直线垂直，但该直线未必与平面 α 垂直，即充分性不成立；

14. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $a - \frac{3}{2}$ 的无穷等比数列，且 $\{a_n\}$ 各项的和为 a ，则 a 的值

- 是 () A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

【答案】 B

【解析】由
$$\begin{cases} S = \frac{a_1}{1-q} \\ |q| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{1 - a + \frac{3}{2}} \\ |a - \frac{3}{2}| < 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2.$$

15. 如图，在平面直角坐标系中， Ω 是一个与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴分别相切于点 C 、

D 的定圆所围成区域（含边界）， A 、 B 、 C 、 D 是该圆的四等分点，若点 $P(x, y)$ 、 $P'(x', y')$ 满足 $x \leq x'$

且 $y \geq y'$ ，则称 P 优于 P' ，如果 Ω 中的点 Q 满足：不存在 Ω 中的其它点优于 Q ，那么所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧 ()

- A. \widehat{AB} B. \widehat{BC} C. \widehat{CD} D. \widehat{DA}

【答案】 D

【解析】依题意，在点 Q 组成的集合中任取一点，过该点分别作平行于两坐标轴的直线，构成的左上方区域（权且称为“第二象限”）与点 Q 组成的集合无公共元素，这样点 Q 组成的集合才为所求. 检验得：D. \widehat{DA}

