2008年普通高等学校招生全国统一考试（海南卷）

理科数学

数学（理）试题头说明：

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，其中第II卷第22－24题为选考题，其它题为必考题．考生作答时，将答案答在答题卡上．在本试卷上答题无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

注意事项：

1．答题前，考生务必先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，认真核对条形码上的姓名、准考证号，并将条形码粘贴在答题卡的指定位置上．

2．选择题答案使用2B铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用0.5毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚．

3．请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效．

4．保持卡面清洁，不折叠，不破损．

5．做选考题时，考生按照题目要求作答，并用2B铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑．

参考公式：

样本数据x_1，x_2，…，x_n的标准参

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2-(x_2-\overline{x})^2+\dots+(x_n-\overline{x})^2\right]}$$

其中$\overline{x}$为样本平均数

柱体体积公式

$$V=Sh$$

其中S为底面面积，h为高

锥体体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

其中S为底面面积，h为高

球的表面积、体积公式

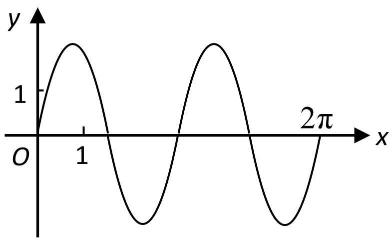
$$S=4\pi R^2，\ V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中R为球的半径

第I卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知函数$y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$)在区间$[0,2\pi]$的图像如下：



那么$\omega=$（　）

A．1　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

2．已知复数$z=1-i$，则$\frac{z^2-2z}{z-1}$=（　）

A．$2i$　　B．$-2i$　　C．2　　D．-2

3．如果等腰三角形的周长是底边长的5倍，那么它的顶角的余弦值为（　）

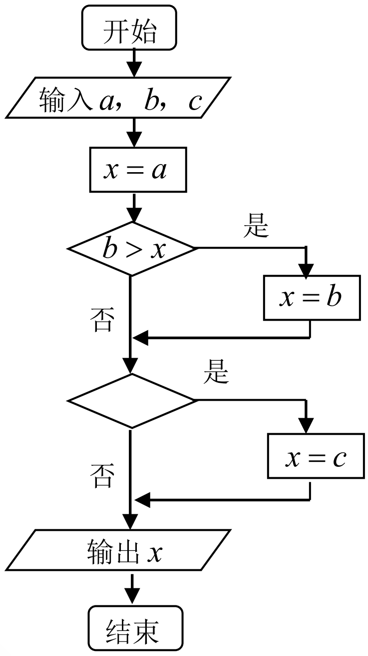
A. $\frac{5}{18}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{7}{8}$

4．设等比数列$\{a_n\}$的公比q=2，前n项和为S_n，则$\frac{S_4}{a_2}$=（　）

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{15}{2}$　　D. $\frac{17}{2}$

5．右面的程序框图，如果输入三个实数a，b，c，要求输出这三个数中最大的数，那么在空白的判断框中，应该填入下面四个选项中的（　）

A. $c>x$　　B. $x>c$　　C. $c>b$　　D. $b>c$



6．已知$a_1>a_2>a_3>0$，则使得$(1-a_ix)^2<1(i=1,2,3)$都成立的x取值范围是（　）

A. $\left(0,\frac{1}{a_1}\right)$　　B. $\left(0,\frac{2}{a_1}\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{a_3}\right)$　　D. $\left(0,\frac{2}{a_3}\right)$

7．$\frac{3-\sin 70^\circ}{2-\cos^2 10^\circ}=$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．平面向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是（　）

A. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$方向相同

B. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$两向量中至少有一个为零向量

C. $\exists\ \lambda\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

D. 存在不全为零的实数λ_1，λ_2，$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$

9．甲、乙、丙3位志愿者安排在周一至周五的5天中参加某项志愿者活动，要求每人参加一天且每天至多安排一人，并要求甲安排在另外两位前面．不同的安排方法共有（　）

A. 20种　　B. 30种　　C. 40种　　D. 60种

10．由直线$x=\frac{1}{2}$，x=2，曲线$y=\frac{1}{x}$及x轴所围图形的面积为（　）

A. $\frac{15}{4}$　　B. $\frac{17}{4}$　　C. $\frac{1}{2}\ln 2$　　D. $2\ln 2$

11．已知点P在抛物线$y^2=4x$上，那么点P到点$Q(2,-1)$的距离与点P到抛物线焦点距离之和取得最小值时，点P的坐标为（　）

A. $\left(\dfrac{1}{4},-1\right)$ B. $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ C. $(1,2)$ D. $(1,-2)$

12．某几何体的一条棱长为$\sqrt{7}$，在该几何体的正视图中，这条棱的投影是长为$\sqrt{6}$的线段，在该几何体的侧视图与俯视图中，这条棱的投影分别是长为a和b的线段，则$a+b$的最大值为（ ）

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{5}$

第II卷

本卷包括必考题和选考题两部分．第13题～第21题为必考题，每个试题考生都必须做答．第22题～第24题为选考题，考生根据要求做答．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分．

13．已知向量$\boldsymbol{a}=(0,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,1,0)$，$|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{29}$且$\lambda>0$，则$\lambda=$________．

14．设双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的右顶点为$A$，右焦点为$F$．过点$F$平行双曲线的一条渐近线的直线与双曲线交于点$B$，则$\triangle AFB$的面积为____________．

15．一个六棱柱的底面是正六边形，其侧棱垂直底面．已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的体积为$\dfrac{9}{8}$，底面周长为3，则这个球的体积为____________．

16．从甲、乙两品种的棉花中各抽测了25根棉花的纤维长度（单位：mm），结果如下：

甲品种：271 273 280 285 285 287 292 294 295 301 303 303 307
308 310 314 319 323 325 325 328 331 334 337 352

乙品种：284 292 295 304 306 307 312 313 315 315 316 318 318
320 322 322 324 327 329 331 333 336 337 343 356

由以上数据设计了如下茎叶图

甲		乙
3 1	27	
7 5 5 0	28	4
5 4 2	29	2 5
8 7 3 3 1	30	4 6 7
9 4 0	31	2 3 5 5 6 8 8
8 5 5 3	32	0 2 2 4 7 9
7 4 1	33	1 3 6 7
	34	3
2	35	6

根据以上茎叶图，对甲、乙两品种棉花的纤维长度作比较，写出两个统计结论：

①________________________________；

②________________________________．

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分12分）

已知$\{a_n\}$是一个等差数列，且$a_2=1$，$a_5=-5$．

（I）求$\{a_n\}$的通项a_n；

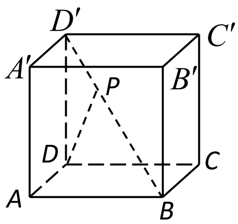
（II）求$\{a_n\}$前n项和S_n的最大值.

18．（本小题满分12分）

如图，已知点P在正方体$ABCD-A'B'C'D'$的对角线BD'上，$\angle PDA=60^\circ$.

（I）求DP与CC'所成角的大小；

（II）求DP与平面$AA'D'D$所成角的大小.



19．（本小题满分12分）

A，B两个投资项目的利润率分别为随机变量X_1和X_2．根据市场分析，X_1和X_2的分布列分别为

X_1	5%	10%
P	0.8	0.2

X_2	2%	8%	12%
P	0.2	0.5	0.3

（I）在A，B两个项目上各投资100万元，Y_1和Y_2分别表示投资项目A和B所获得的利润，求方差DY_1，DY_2；

（II）将$x(0\leqslant x\leqslant 100)$万元投资$A$项目，$100-x$万元投资$B$项目，$f(x)$表示投资$A$项目所得利润的方差与投资$B$项目所得利润的方差的和．求$f(x)$的最小值，并指出$x$为何值时，$f(x)$取到最小值.

（注：$D(aX+b)=a^2DX$）

20．（本小题满分12分）

在直角坐标系xOy中，椭圆C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$．$F_2$也是抛物线$C_2$：$y^2=4x$的焦点，点$M$为$C_1$与$C_2$在第一象限的交点，且$|MF_2|=\dfrac{5}{3}$.

（I）求C_1的方程；

（II）平面上的点N满足$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$，直线$l$∥$MN$，且与$C_1$交于$A$，$B$两点，若$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=0$，求直线$l$的方程．

21．（本小题满分12分）

设函数$f(x)=ax+\dfrac{1}{x+b}(a，b\in\mathbf{Z})$，曲线$y=f(x)$在点$(2，f(2))$处的切线方程为$y=3$．

（I）求$f(x)$的解析式：

（II）证明：函数$y=f(x)$的图像是一个中心对称图形，并求其对称中心；

（III）证明：曲线$y=f(x)$上任一点的切线与直线$x=1$和直线$y=x$所围三角形的面积为定值，并求出此定值．

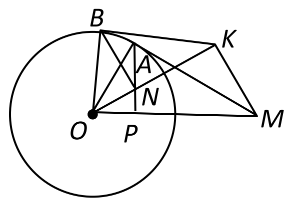
请考生在第22、23、24题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分．做答时，用2B铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑．

22．（本小题满分10分）选修4－1：几何证明选讲

如图，过圆O外一点M作它的一条切线，切点为A，过A点作直线AP垂直直线OM，垂足为P．

（I）证明：$OM\bullet OP=OA^2$；

（II）N为线段AP上一点，直线NB垂直直线ON，且交圆O于B点．过B点的切线交直线ON于K．证明：$\angle OKM=90^\circ$．



23．（本小题满分10分）选修4－4；坐标系与参数方程

已知曲线C_1：$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），曲线$C_2$：$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-\sqrt{2},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$（$t$为参数）．

（I）指出C_1，C_2各是什么曲线，并说明C_1与C_2公共点的个数；

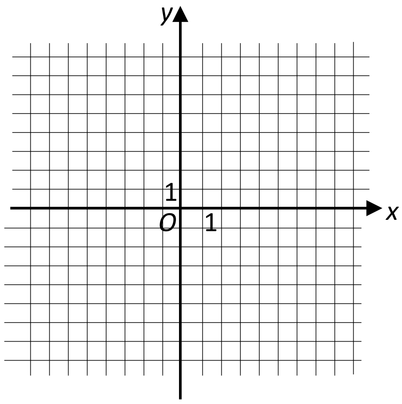
（II）若把C_1，C_2上各点的纵坐标都压缩为原来的一半，分别得到曲线C_1'，C_2'．写出C_1'，C_2'的参数方程．C_1'与C_2'公共点的个数和C_1与C_2公共点的个数是否相同？说明你的理由．

24．（本小题满分10分）选修4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-8|-|x-4|$.

（I）作出函数 $y=f(x)$ 的图像；

（II）解不等式 $|x-8|-|x-4|>2$.



答案

BBDCA　BCDAD　AC

（13）3　（14）$\dfrac{32}{15}$　（15）$\dfrac{4\pi}{3}$

（16）.

1.乙品种棉花的纤维平均长度大于甲品种棉花的纤维平均长度（或：乙品种棉花的纤维长度普遍大于甲品种棉花的纤维长度）。

2

．甲品种棉花的纤维长度较乙品种棉花的纤维长度更分散．（或：乙品种棉花的纤维长度较甲品种棉花的纤维长度更集中（稳定）．甲品种棉花的纤维长度的分散程度比乙品种棉花的纤维长度的分散程度更大）．

3．甲品种棉花的纤维长度的中位效为307mm，乙品种棉花的纤谁长度的中位数为318mm

4　．乙品种棉花的纤堆长度基本上是对称的．而且大多集中在中间（均值附近）．甲品种棉花的纤维长度除一个特殊值（352 ）外．也大致对称．其分布较均匀．

三、解答题

（17）解：

（1）设$\{a_n\}$的公差为d，由已知条件，$\begin{cases} a_1+d=1 \\ a_1+4d=-5 \end{cases}$，解出$a_1=3,d=-2$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=-2n+5$。

（2）$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=-n^2+4n=4-(n-2)^2$

所以$n=2$时，S_n取到最大值4。

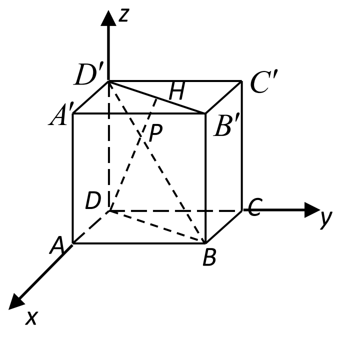
（18）解：

如图，以D为原点，DA为单位长度建立空间直角坐标系$D-xyz$。

则$\overrightarrow{DA}=(1,0,0),\overrightarrow{CC'}=(0,0,1)$.

连结$BD,B'D'$.

在平面$BB'D'D$中，延长DP交$B'D'$于H.



设$\overrightarrow{DH}=(M,M,1)(M>0)$,

由已知$\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\rangle=60^\circ$,

由$\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DH}=|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{DH}|\cos\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\rangle$

可得$2m=\sqrt{2m^2+1}$。

解得$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\overrightarrow{DH}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

（I）因为$\cos < \overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC'} >= \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 0+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 0+1\times 1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$< \overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC'} >= 45^\circ$.

即DP与CC'所成的角为45°.

（II）平面$AA'D'D$的一个法向量是$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$.

因为$\cos < \overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC} >= \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 0+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 1+1\times 0}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$,

所以$< \overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC} >= 60^\circ$.

可得DP与平面$AA'D'D$所成的角为30°.

19．解：

（I）由题设可知Y_1和Y_2的分布列分别为

Y_1	5	10
P	0.8	0.2

Y_2	2	8	12
P	0.2	0.5	0.3

$EY_1=5\times 0.8+10\times 0.2=6$,

$DY_1=(5-6)^2\times 0.8+(10-6)^2\times 0.2=4$,

$EY_2=2\times 0.2+8\times 0.5+12\times 0.3=8$,

$DY_2=(2-8)^2\times 0.2+(8-8)^2\times 0.5+(12-8)^2\times 0.3=12$.

（II）$f(x)=D\left(\dfrac{x}{100}Y_1\right)+D\left(\dfrac{100-x}{100}Y_2\right)$

$=\left(\dfrac{x}{100}\right)^2 DY_1+\left(\dfrac{100-x}{100}\right)^2 DY_2$

$=\dfrac{4}{100^2}\left[x^2+3(100-x)^2\right]$

$=\dfrac{4}{100^2}(4x^2-600x+3\times 100^2)$,

当$x=\dfrac{600}{2\times 4}=75$时，$f(x)=3$为最小值.

20．解：

（I）由C_2：$y^2=4x$知$F_2(1,0)$.

设$M(x_1,\ y_1)$，M在C_2上，因为$|MF_2|=\dfrac{5}{3}$，所以$x_1+1=\dfrac{5}{3}$，

得$x_1=\dfrac{2}{3}$，$y_1=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

M在C_1上，且椭圆C_1的半焦距$c=1$，于是

$\begin{cases}\dfrac{4}{9a^2}+\dfrac{8}{3b^2}=1,\\ b^2=a^2-1.\end{cases}$消去$b^2$并整理得

$9a^4-37a^2+4=0$，

解得$a=2$（$a=\dfrac{1}{3}$不合题意，舍去）.

故椭圆C_1的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（II）由$\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}=\overrightarrow{MN}$知四边形$MF_1NF_2$是平行四边形，其中心为坐标原点$O$，

因为$l\ //\ MN$，所以l与OM的斜率相同，

故l的斜率$k=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$.

设l的方程为$y=\sqrt{6}(x-m)$.

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\ y=\sqrt{6}(x-m),\end{cases}$消去$y$并化简得

$9x^2-16mx+8m^2-4=0$.

设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

$x_1+x_2=\dfrac{16m}{9}$，$x_1x_2=\dfrac{8m^2-4}{9}$.

因为$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，所以$x_1x_2+y_1y_2=0$.

$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+6(x_1-m)(x_2-m)$

$=7x_1x_2-6m(x_1+x_2)+6m^2$

$=7\bullet\dfrac{8m^2-4}{9}-6m\bullet\dfrac{16m}{9}+6m^2$

$=\dfrac{1}{9}(14m^2-28)=0$.

所以$m=\pm\sqrt{2}$.

此时$\Delta=(16m)^2-4\times 9(8m^2-4)>0$，

故所求直线l的方程为$y=\sqrt{6}x-2\sqrt{3}$，或$y=\sqrt{6}x+2\sqrt{3}$.

21．解：

（I）$f'(x)=a-\dfrac{1}{(x+b)^2}$，

于是$\begin{cases}2a+\dfrac{1}{2+b}=1,\\ a-\dfrac{1}{(2+b)^2}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=\dfrac{9}{4},\\ b=-\dfrac{8}{3}.\end{cases}$

因a，$b\in\mathbf{Z}$，故$f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

（II）证明：已知函数$y_1=x$，$y_2=\dfrac{1}{x}$都是奇函数.

所以函数$g(x)=x+\dfrac{1}{x}$也是奇函数，其图像是以原点为中心的中心对称图形.

而$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1$.

可知，函数$g(x)$的图像按向量$\boldsymbol{a}=(1,1)$平移，即得到函数$f(x)$的图像，故函数$f(x)$的图像是以点$(1,1)$为中心的中心对称图形.

（III）证明：在曲线上任取一点$\left(x_0,\ x_0+\dfrac{1}{x_0-1}\right)$.

由$f'(x_0)=1-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$知，过此点的切线方程为

$y-\dfrac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=\left[1-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)$.

令 $x=1$ 得 $y=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，切线与直线 $x=1$ 交点为 $\left(1,\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\right)$.

令 $y=x$ 得 $y=2x_0-1$，切线与直线 $y=x$ 交点为 $(2x_0-1,2x_0-1)$.

直线 $x=1$ 与直线 $y=x$ 的交点为 $(1,1)$.

从而所围三角形的面积为 $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-1\right|\left|2x_0-1-1\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{x_0-1}\right|\left|2x_0-2\right|=2$.

所以，所围三角形的面积为定值 2 .

22．解：

（I）证明：因为 MA 是圆 O 的切线，所以 $OA\perp AM$.

又因为 $AP\perp OM$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAM$ 中，由射影定理知，

$OA^2=OM\bullet OP$.

（II）证明：因为 BK 是圆 O 的切线， $BN\perp OK$.

同（I），有 $OB^2=ON\bullet OK$ ，又 $OB=OA$ ，

所以 $OP\bullet OM=ON\bullet OK$ ，即 $\dfrac{ON}{OP}=\dfrac{OM}{OK}$.

又 $\angle NOP=\angle MOK$ ，

所以 $\triangle ONP\backsim\triangle OMK$ ，故 $\angle OKM=\angle OPN=90^\circ$.

23．解：

（I） C_1 是圆， C_2 是直线.

C_1 的普通方程为 $x^2+y^2=1$，圆心 $C_1(0,0)$，半径 $r=1$.

C_2 的普通方程为 $x-y+\sqrt{2}=0$.

因为圆心 C_1 到直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离为 1，

所以 C_2 与 C_1 只有一个公共点.

（II）压缩后的参数方程分别为

C_1'： $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\dfrac{1}{2}\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）； C_2'： $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-\sqrt{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}t \end{cases}$（$t$ 为参数）.

化为普通方程为：C_1'： $x^2+4y^2=1$， C_2'： $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

联立消元得 $2x^2+2\sqrt{2}x+1=0$，

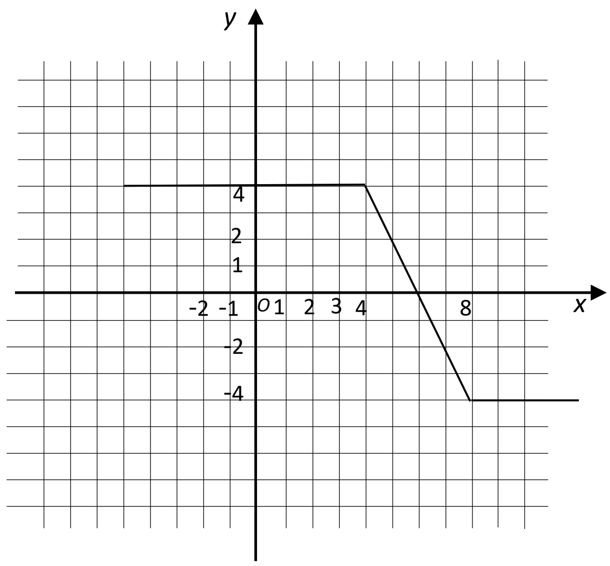
其判别式$\Delta=(2\sqrt{2})^2-4\times2\times1=0$，

所以压缩后的直线C_2'与椭圆C_1'仍然只有一个公共点，和C_1与C_2公共点个数相同.

24．解：

（I）$f(x)=\begin{cases}4, & x\leqslant 4,\\ -2x+12, & 4<x\leqslant 8,\\ -4 & x>8.\end{cases}$

图像如下：



（II）不等式$|x-8|-|x-4|>2$，即$f(x)>2$，

由$-2x+12=2$得$x=5$.

由函数$f(x)$图像可知，原不等式的解集为$(-\infty,5)$.