2007年江苏高考数学真题及答案

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1、本试卷共4页，包含选择题（第1题～第10题，共10题）、填空题（第11题～第16题，共6题）、解答题（第17题～第21题，共5题）三部分。本次考试时间为120分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

2、答题前，请您务必将自己的姓名、考试证号用书写黑色字迹的0.5毫米签字笔填写在试卷及答题卡上。

3、请认真核对监考员所粘贴的条形码上的姓名、考试证号是否与您本人的相符。

4、作答非选择题必须用书写黑色字迹的0.5毫米签字笔写在答题卡上的指定位置，在其它位置作答一律无效。作答选择题必须用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其它答案。

5、如有作图需要，可用2B铅笔作答，并请加黑加粗，描写清楚。

参考公式：

n次独立重复试验恰有k次发生的概率为：$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

一、选择题 本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的。

1．下列函数中，周期为$\dfrac{\pi}{2}$的是（D）

A．$y=\sin\dfrac{x}{2}$　　B．$y=\sin 2x$　　C．$y=\cos\dfrac{x}{4}$　　D．$y=\cos 4x$

2．已知全集$U=Z$，$A=\{-1,0,1,2\},B=\{x\,|\,x^2=x\}$，则$A\bigcap C_U B$为（A）

A．$\{-1,2\}$　　B．$\{-1,0\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{1,2\}$

3．在平面直角坐标系xOy中，双曲线中心在原点，焦点在y轴上，一条渐近线方程为$x-2y=0$，则它的离心率为（A）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

4．已知两条直线m,n，两个平面α,β，给出下面四个命题：（C）

①$m//n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$　　②$\alpha//\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta\Rightarrow m//n$

③$m//n,m//\alpha\Rightarrow n//\alpha$　　④$\alpha//\beta,m//n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\beta$

其中正确命题的序号是

A. ①③　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

5. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x(x\in[-\pi,0])$ 的单调递增区间是（B）

A. $[-\pi,-\frac{5\pi}{6}]$　　B. $[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}]$　　C. $[-\frac{\pi}{3},0]$　　D. $[-\frac{\pi}{6},0]$

6. 设函数 $f(x)$ 定义在实数集上，它的图像关于直线 $x=1$ 对称，且当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=3^x-1$，则有（B）

A. $f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{2}{3})$　　B. $f(\frac{2}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{1}{3})$

C. $f(\frac{2}{3})<f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})$　　D. $f(\frac{3}{2})<f(\frac{2}{3})<f(\frac{1}{3})$

7. 若对于任意实数 x，有 $x^3=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+a_3(x-2)^3$，则 a_2 的值为（B）

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

8. 设 $f(x)=\lg(\frac{2}{1-x}+a)$ 是奇函数，则使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是（A）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

9. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$，$f'(0)>0$，对于任意实数 x 都有 $f(x)\geq 0$，则 $\frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为（C）

A. 3　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$

10. 在平面直角坐标系 xOy，已知平面区域 $A=\{(x,y)\,|\,x+y\leq 1,且\ x\geq 0,y\geq 0\}$，则平面区域 $B=\{(x+y,x-y)\,|\,(x,y)\in A\}$ 的面积为（A）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。不需要写出解答过程，请把答案直接填空在答题卡相应位置上。

11. 若 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5},\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，. 则 $\tan\alpha\tan\beta=$ __1/2__.

12. 某校开设 9 门课程供学生选修，其中 A,B,C 三门由于上课时间相同，至多选一门，学校规定每位同学选修 4 门，共有__75__种不同选修方案。(用数值作答)

13. 已知函数 $f(x)=x^3-12x+8$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值与最小值分别为 M,m，则 $M-m=$ __32__.

14. 正三棱锥 $P-ABC$ 高为 2，侧棱与底面所成角为 45°，则点 A 到侧面 PBC 的距离是__$\frac{6}{5}\sqrt{5}$__.

15．在平面直角坐标系 xOy 中，已知 ΔABC 顶点 $A(-4,0)$ 和 $C(4,0)$，顶点 B 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上，则 $\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=$ ____5/4____.

16．某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 $5cm$，秒针均匀地绕点 O 旋转，当时间 $t=0$ 时，点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合，将 A,B 两点的距离 $d(cm)$ 表示成 $t(s)$ 的函数，则 $d=$ ____$10\left|\sin 3t^\circ\right|$____，其中 $t\in[0,60]$。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 12 分）某气象站天气预报的准确率为 80%，计算（结果保留到小数点后面第 2 位）

（1）5 次预报中恰有 2 次准确的概率；（4 分）

（2）5 次预报中至少有 2 次准确的概率；（4 分）

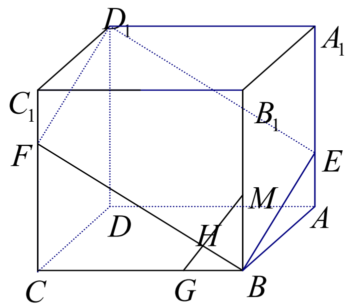
（3）5 次预报中恰有 2 次准确，且其中第 3 次预报准确的概率；（4 分）

解：（1） $p=C_5^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(1-\frac{4}{5}\right)^3=10\times\frac{16}{25}\times\frac{1}{125}\approx 0.05$

（2） $P=1-C_5^1\times\frac{4}{5}\left(1-\frac{4}{5}\right)^4=1-0.0064\approx 0.99$

（3） $P=C_4^1\times\frac{4}{5}\left(1-\frac{4}{5}\right)^3\times\frac{4}{5}\approx 0.02$

18．（本小题满分 12 分）如图，已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 3 的正方体，点 E 在 AA_1 上，点 F 在 CC_1 上，且 $AE=FC_1=1$，



（1）求证：E,B,F,D_1 四点共面；（4 分）

（2）若点 G 在 BC 上，$BG=\frac{2}{3}$，点 M 在 BB_1 上，$GM\perp BF$，垂足为 H，求证：$EM\perp$ 面 BCC_1B_1；（4 分）

（3）用 θ 表示截面 $EBFD_1$ 和面 BCC_1B_1 所成锐二面角大小，求 $\tan\theta$。（4 分）

解：（1）证明：在 DD_1 上取一点 N 使得 DN=1，连接 CN，EN，显然四边形 CFD_1N 是平行四边形，所以 D_1F//CN，同理四边形 DNEA 是平行四边形，所以 EN//AD，且 EN=AD，又 BC//AD，且 AD=BC，所以 EN//BC，EN=BC，所以四边形 CNEB 是平行四边形，所以 CN//BE，所以 D_1F//BE，所以 E,B,F,D_1 四点共面。

（2）因为 $GM \perp BF$ 所以 $\Delta BCF \backsim \Delta$MBG，所以 $\dfrac{MB}{BC}=\dfrac{BG}{CF}$，即 $\dfrac{MB}{3}=\dfrac{\frac{2}{3}}{2}$，所以 MB=1，

因为 AE=1，所以四边形 ABME 是矩形，所以 EM⊥BB_1 又平面 ABB_1A_1 ⊥平面 BCC_1B_1

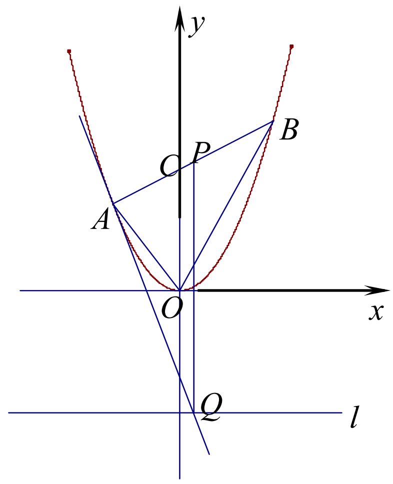
，且 EM 在平面 ABB_1A_1 内，所以 $EM \perp$ 面 BCC_1B_1

（3） $EM \perp$ 面 BCC_1B_1，所以 $EM \perp$BF，$EM \perp$MH，$GM \perp BF$，所以∠MHE 就是截面 $EBFD_1$ 和面 BCC_1B_1 所成锐二面角的平面角，∠EMH= $90°$，所以 $\tan\theta=\dfrac{ME}{MH}$，ME=AB=3，

$\Delta BCF \backsim \Delta$MHB，所以 3：MH=BF：1，BF=$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，所以 MH=$\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，所以

$\tan\theta=\dfrac{ME}{MH}=\sqrt{13}$

19、(本小题满分 14 分)如图，在平面直角坐标系 xOy 中，过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线，与抛物线 $y=x^2$ 相交于 AB 两点，一条垂直于 x 轴的直线，分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于 P,Q，



（1）若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，求 c 的值；（5 分）

（2）若 P 为线段 AB 的中点，求证：QA 为此抛物线的切线；（5 分）

（3）试问（2）的逆命题是否成立？说明理由。（4 分）

解：（1）设过 C 点的直线为 $y=kx+c$，所以 $x^2=kx+c\left(c>0\right)$，即 $x^2-kx-c=0$，设 A$\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，$\overrightarrow{OA}=\left(x_1,y_1\right)$，$\overrightarrow{OB}=\left(x_2,y_2\right)$，因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=2$，即 $x_1x_2+\left(kx_1+c\right)\left(kx_2+c\right)=2$，$x_1x_2+k^2x_1x_2-kc\left(x_1+x_2\right)+c^2=2$

所以 $-c-k^2c+kc\bullet k+c^2=2$，即 $c^2-c-2=0$，所以 $c=2\left(舍去c=-1\right)$

（2）设过 Q 的切线为 $y-y_1=k_1\left(x-x_1\right)$，$y'=2x$，所以 $k_1=2x_1$，即 $y=2x_1x-2x_1{}^2+y_1=2x_1x-x_1{}^2$，它与 $y=-c$ 的交点为 M$\left(\dfrac{x_1}{2}-\dfrac{c}{2x_1},-c\right)$，又 $P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\dfrac{k}{2},\dfrac{k^2}{2}+c\right)$，所以 Q$\left(\dfrac{k}{2},-c\right)$，因为 $x_1x_2=-c$，所以 $-\dfrac{c}{x_1}=x_2$，

所以 M$\left(\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{x_2}{2},-c\right)=\left(\dfrac{k}{2},-c\right)$，所以点 M 和点 Q 重合，也就是 QA 为此抛物线的切线。

（3）（2）的逆命题是成立，由（2）可知Q$\left(\frac{k}{2},-c\right)$，因为PQ⊥$x$轴，所以$P\left(\frac{k}{2},y_P\right)$

因为$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{2}$，所以P为AB的中点。

20．（本小题满分16分）已知 $\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是公比为q的等比数列，

$a_1=b_1,a_2=b_2\neq a_1$，记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，

（1）若$b_k=a_m(m,k$是大于2的正整数$)$，求证：$S_{k-1}=(m-1)a_1$；（4分）

（2）若$b_3=a_i(i$是某一正整数$)$，求证：q是整数，且数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项；（8分）

（3）是否存在这样的正数q，使等比数列$\{b_n\}$中有三项成等差数列？若存在，写出一个q的值，并加以说明；若不存在，请说明理由；（4分）

解：设$\{a_n\}$的公差为d，由$a_1=b_1,a_2=b_2\neq a_1$，知$d\neq 0,q\neq 1$，$d=a_1\left(q-1\right)$（$a_1\neq 0$）

（1）因为$b_k=a_m$，所以$a_1q^{k-1}=a_1+\left(m-1\right)a_1\left(q-1\right)$，

$q^{k-1}=1+\left(m-1\right)\left(q-1\right)=2-m+\left(m-1\right)q$，

所以$S_{k-1}=\frac{a_1\left(1-q^{k-1}\right)}{1-q}=\frac{a_1\left(m-1-\left(m-1\right)q\right)}{q}=\left(m-1\right)a_1$

（2）$b_3=a_1q^2,a_i=a_1+\left(i-1\right)a_1\left(q-1\right)$，由$b_3=a_i$，

所以$q^2=1+\left(i-1\right)\left(q-1\right)$，$q^2-\left(i-1\right)q+\left(i-2\right)=0$，解得，$q=1$或$q=i-2$，但$q\neq 1$，所以$q=i-2$，因为$i$是正整数，所以$i-2$是整数，即$q$是整数，设数列$\{b_n\}$中任意一项为

$b_n=a_1q^{n-1}\left(n\in N^+\right)$，设数列$\{a_n\}$中的某一项$a_m\left(m\in N^+\right)=a_1+\left(m-1\right)a_1\left(q-1\right)$

现在只要证明存在正整数m，使得$b_n=a_m$，即在方程$a_1q^{n-1}=a_1+\left(m-1\right)a_1\left(q-1\right)$中$m$有正整数解即可，$q^{n-1}=1+\left(m-1\right)\left(q-1\right),m-1=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}=1+q+q^2+\cdots q^{n-2}$，所以$m=2+q+q^2+\cdots q^{n-2}$，若$i=1$，则$q=-1$，那么$b_{2n-1}=b_1=a_1,b_{2n}=b_2=a_2$，当$i\geq 3$时，因为$a_1=b_1,a_2=b_2$，只要考虑$n\geq 3$的情况，因为$b_3=a_i$，所以$i\geq 3$，因此$q$是正整数，所以$m$是正整数，因此数列$\{b_n\}$中任意一项为

$b_n=a_1q^{n-1}\left(n\in N^+\right)$与数列$\{a_n\}$的第$2+q+q^2+\cdots q^{n-2}$项相等，从而结论成立。

（3）设数列$\{b_n\}$中有三项$b_m,b_n,b_p\left(m<n<p,m,n,p\in N^+\right)$成等差数列，则有

$2a_1q^{n-1}=a_1q^{m-1}+a_1q^{p-1}$，设$n-m=x,p-n=y,\left(x,y\in N^+\right)$，所以$2=\frac{1}{q^x}+q^y$，令$x=1,y=2$，则$q^3-2q+1=0,\left(q-1\right)\left(q^2+q-1\right)=0$，因为$q\neq 1$，所以

$q^2+q-1=0$，所以 $q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（舍去负值），即存在 $q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 使得 $\{b_n\}$ 中有三项 $b_m,b_{m+1},b_{m+3}\left(m\in N^+\right)$ 成等差数列。

21.（本小题满分 16 分）已知 a,b,c,d 是不全为 0 的实数，函数 $f(x)=bx^2+cx+d$，$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，方程 $f(x)=0$ 有实根，且 $f(x)=0$ 的实数根都是 $g(f(x))=0$ 的根，反之，$g(f(x))=0$ 的实数根都是 $f(x)=0$ 的根，

（1）求 d 的值；（3 分）

（2）若 $a=0$，求 c 的取值范围；（6 分）

（3）若 $a=1, f(1)=0$，求 c 的取值范围。（7 分）

解（1）设 x_0 是 $f\left(x\right)=0$ 的根，那么 $f\left(x_0\right)=0$，则 x_0 是 $g(f(x))=0$ 的根，则 $g\left[f\left(x_0\right)\right]=0,$ 即 $g\left(0\right)=0$，所以 $d=0$。

（2）因为 $a=0$，所以 $f\left(x\right)=bx^2+cx, g\left(x\right)=bx^2+cx$，则 $g(f(x))=f\left(x\right)\left[bf\left(x\right)+c\right]$ $=\left(bx^2+cx\right)\left(b^2x^2+bcx+c\right)$=0 的根也是 $f\left(x\right)=x\left(bx+c\right)=0$ 的根。

（a）若 $b=0$，则 $c\neq 0$，此时 $f\left(x\right)=0$ 的根为 0，而 $g(f(x))=0$ 的根也是 0，所以 $c\neq 0$，

（b）若 $b\neq 0$，当 $c=0$ 时，$f\left(x\right)=0$ 的根为 0，而 $g(f(x))=0$ 的根也是 0，当 $c\neq 0$ 时，$f\left(x\right)=0$ 的根为 0 和 $-\dfrac{c}{b}$，而 $bf\left(x\right)+c=0$ 的根不可能为 0 和 $-\dfrac{c}{b}$，所以 $bf\left(x\right)+c=0$ 必无实数根，所以 $\Delta=\left(bc\right)^2-4b^2c<0,$ 所以 $c^2-4c<0, 0<c<4$，从而 $0\le c<4$

所以当 $b=0$ 时，$c\neq 0$；当 $b\neq 0$ 时，$0\le c<4$。

（3）$a=1, f(1)=0$，所以 $b+c=0$，即 $f\left(x\right)=0$ 的根为 0 和 1，

所以 $\left(-cx^2+cx\right)^2-c\left(-cx^2+cx\right)+c$ =0 必无实数根，

（a）当 $c>0$ 时，$t=-cx^2+cx=-c\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{c}{4}\le\dfrac{c}{4}$，即函数 $h\left(t\right)=t^2-ct+c$ 在 $t\le\dfrac{c}{4}$，$h\left(t\right)>0$ 恒成立，又 $h\left(t\right)=t^2-ct+c=\left(t-\dfrac{c}{2}\right)^2+c-\dfrac{c^2}{4}$，所以 $h\left(t\right)_{\min}=h\left(\dfrac{c}{4}\right)>0$，即 $\dfrac{c^2}{16}-\dfrac{c^2}{4}+c>0,$ 所以 $0<c<\dfrac{16}{3}$；

（b）当 $c<0$ 时，$t=-cx^2+cx=-c\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{c}{4}\ge\dfrac{c}{4}$，即函数 $h\left(t\right)=t^2-ct+c$ 在 $t\ge\dfrac{c}{4}$，$h\left(t\right)>0$ 恒成立，又 $h\left(t\right)=t^2-ct+c=\left(t-\dfrac{c}{2}\right)^2+c-\dfrac{c^2}{4}$，所以 $h\left(t\right)_{\min}=h\left(\dfrac{c}{2}\right)>0$，

$c-\dfrac{c^2}{4}>0$，而$c<0$，所以$c-\dfrac{c^2}{4}<0$，所以c不可能小于 0，

（c）$c=0,$则$b=0,$这时$f\left(x\right)=0$的根为一切实数，而$g\left[f\left(x\right)\right]=0$，所以$c=0,$符合要求。

所以$0\le c<\dfrac{16}{3}$