

绝密★启用前

## 2019年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | -4 < x < 2\}$ ,  $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $\{x | -4 < x < 3\}$       B.  $\{x | -4 < x < -2\}$       C.  $\{x | -2 < x < 2\}$       D.  $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设复数  $z$  满足  $|z - i| = 1$ ,  $z$  在复平面内对应的点为  $(x, y)$ , 则

- A.  $(x+1)^2 + y^2 = 1$       B.  $(x-1)^2 + y^2 = 1$       C.  $x^2 + (y-1)^2 = 1$       D.  $x^2 + (y+1)^2 = 1$

3. 已知  $a = \log_2 0.2$ ,  $b = 2^{0.2}$ ,  $c = 0.2^{0.3}$ , 则

- A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $c < a < b$       D.  $b < c < a$

4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ( $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ , 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外,

最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 若某人满足上述

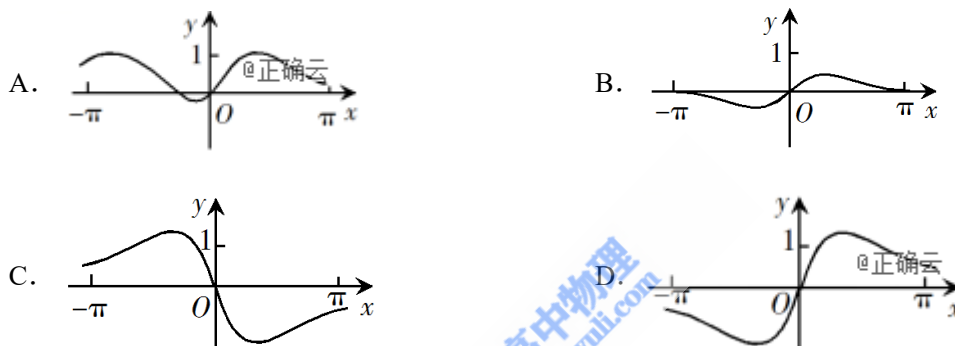
两个黄金分割比例, 且腿长为105 cm, 头顶至脖子下端的长度为26

cm, 则其身高可能是

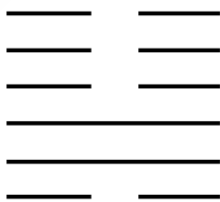


- A. 165 cm                      B. 175 cm                      C. 185 cm                      D. 190 cm

5. 函数  $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$  在  $[-\pi, \pi]$  的图像大致为



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“—”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有3个阳爻的概率是

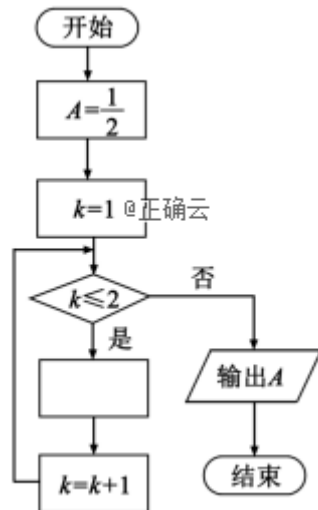


- A.  $\frac{5}{16}$                       B.  $\frac{11}{32}$                       C.  $\frac{21}{32}$                       D.  $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$ , 且  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ , 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$

8. 如图是求  $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$  的程序框图, 图中空白框中应填入



- A.  $A = \frac{1}{2+A}$       B.  $A = 2 + \frac{1}{A}$       C.  $A = \frac{1}{1+2A}$       D.  $A = 1 + \frac{1}{2A}$

9. 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 已知  $S_4 = 0$ ,  $a_5 = 5$ , 则

- A.  $a_n = 2n - 5$       B.  $a_n = 3n - 10$       C.  $S_n = 2n^2 - 8n$       D.

$$S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

10. 已知椭圆  $C$  的焦点为  $F_1(-1, 0)$ ,  $F_2(1, 0)$ , 过  $F_2$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点. 若

$|AF_2| = 2|F_2B|$ ,  $|AB| = |BF_1|$ , 则  $C$  的方程为

- A.  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$       B.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$       C.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$       D.  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. 关于函数  $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$  有下述四个结论:

- ①  $f(x)$  是偶函数      ②  $f(x)$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  单调递增  
 ③  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  有 4 个零点      ④  $f(x)$  的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

- A. ①②④      B. ②④      C. ①④      D. ①③

12. 已知三棱锥 $P-$

$ABC$ 的四个顶点在球 $O$ 的球面上,  $PA=PB=PC$ ,  $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形,  $E, F$ 分别是 $PA, PB$ 的中点,  $\angle CEF=90^\circ$ , 则球 $O$ 的体积为

- A.  $8\sqrt{6}\pi$                       B.  $4\sqrt{6}\pi$                       C.  $2\sqrt{6}\pi$                       D.  $\sqrt{6}\pi$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 曲线  $y = 3(x^2 + x)e^x$  在点  $(0,0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

14. 记 $S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和. 若  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_4^2 = a_6$ , 则 $S_5 =$ \_\_\_\_\_.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为0.6, 客场取胜的概率为0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以4:1获胜的概率是\_\_\_\_\_.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1, F_2$ , 过 $F_1$ 的直线与 $C$ 的两条渐近线分别交于 $A, B$ 两点. 若  $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{F_1B} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 0$ , 则 $C$ 的离心率为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共60分。

17. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 设

$$(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C.$$

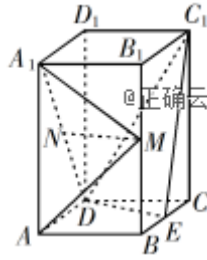
(1) 求 $A$ ;

(2) 若 $\sqrt{2}a + b = 2c$ , 求 $\sin C$ .

18. (12分)

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

的底面是菱形， $AA_1=4$ ， $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ， $E$ ， $M$ ， $N$ 分别是 $BC$ ， $BB_1$ ， $A_1D$ 的中点.



(1) 证明： $MN \parallel$ 平面 $C_1DE$ ;

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.

19. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点为 $F$ ，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 $l$ 与 $C$ 的交点为 $A$ ， $B$ ，与 $x$ 轴的交点为 $P$ .

(1) 若 $|AF|+|BF|=4$ ，求 $l$ 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ ，求 $|AB|$ .

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1)  $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2)  $f(x)$ 有且仅有2个零点.

21. (12分)

为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验。试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验。对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药。一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验。当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效。为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分。甲、乙两种药的治愈率分别记为 $\alpha$ 和 $\beta$ ，一轮试验中甲药的得分记为 $X$ 。

(1) 求  $X$  的分布列；

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分， $p_i (i = 0, 1, \dots, 8)$  表示“甲药的累计得分为  $i$  时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则  $p_0 = 0$ ， $p_8 = 1$ ，

$$p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, 7), \quad \text{其中 } a = P(X = -1), \quad b = P(X = 0),$$

$$c = P(X = 1). \quad \text{假设 } \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.8.$$

(i) 证明： $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$  为等比数列；

(ii) 求  $p_4$ ，并根据  $p_4$  的值解释这种试验方案的合理性。

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修4—4：坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点  $O$  为

极点， $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线  $l$  的极坐标方程为

$$2\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta + 11 = 0.$$

(1) 求 $C$ 和 $l$ 的直角坐标方程;

(2) 求 $C$ 上的点到 $l$ 距离的最小值.

23. [选修4—5: 不等式选讲] (10分)

已知 $a, b, c$ 为正数, 且满足 $abc=1$ . 证明:

(1)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$ ;

(2)  $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$ .