

2002 年黑龙江高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 2 页. 第 II 卷 3 至 9 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心到直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$
2. 复数 $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ 的值是
- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1
3. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是
- A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
- C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
4. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是
- A. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \pi)$
- C. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$
5. 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in Z\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in Z\}$, 则
- A. $M = N$ B. $M \subset N$ C. $M \supset N$ D. $M \cap N = \emptyset$
6. 点 $P(1, 0)$ 到曲线 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}$ (其中参数 $t \in R$) 上的点的最短距离为
- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

7. 一个圆锥和一个半球有公共底面，如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等，那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

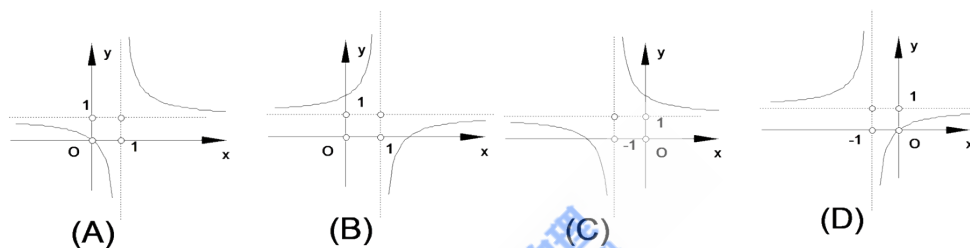
8. 正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$ ，则这个棱柱侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

9. 函数 $y = x^2 + bx + c$ ($\in [0, +\infty)$) 是单调函数的充要条件是

- A. $b \geq 0$ B. $b \leq 0$ C. $b > 0$ D. $b < 0$

10. 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图象是



11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有

- A. 8 种 B. 12 种 C. 16 种 D. 20 种

12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》：“2001 年国内生产总值达到 95933 亿元，比上年增长 7.3%”，如果“十·五”期间（2001 年—2005 年）每年的国内生产总值都按此年增长率增长，那么到“十·五”末我国国内年生产总值约为

- A. 115000 亿元 B. 120000 亿元 C. 127000 亿元 D. 135000 亿元

第 II 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线。

13. 函数 $y = a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值这为 3，则 $a =$ _____

14. 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0,2)$ ，那么 $k =$ _____

15. $(x^2 + 1)(x - 2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是 _____

16. 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ，那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4}) =$ _____

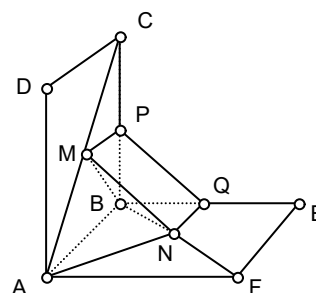
三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin \alpha$ 、 $\operatorname{tg} \alpha$ 的值.

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ 的边长都是 1, 而且平面 $ABCD$ 、 $ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动, 点 N 在 BF 上移动, 若 $CM = BN = a$

($0 < a < \sqrt{2}$)

- (1) 求 MN 的长;
- (2) a 为何值时, MN 的长最小;
- (3) 当 MN 的长最小时, 求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.



19. 设点 P 到点 $(-1,0)$ 、 $(1,0)$ 距离之差为 $2m$, 到 x 、 y 轴的

距离之比为 2, 求 m 的取值范围.

20. 某城市 2001 年末汽车保有量为 30 万辆, 预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%, 并且每年新增汽车数量相同. 为保护城市环境, 要求该城市汽车保有量不超过 60 万辆, 那么每年新增汽车数量不应超过多少辆?

21. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^2 + |x - a| + 1$, $x \in R$

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 求 $f(x)$ 的最小值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = a_n^2 - na_n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(I) 当 $a_1 = 2$ 时, 求 a_2, a_3, a_4 并由此猜测 a_n 的一个通项公式;

(II) 当 $a_1 \geq 3$ 时, 证明对所有的 $n \geq 1$, 有

(i) $a_n \geq n + 2$

(ii) $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \frac{1}{1+a_3} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{1}{2}$

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	C	B	B	C	B	A	B	B	C

二、填空题

(13) 2 (14) 1 (15) 1008 (16) $\frac{7}{2}$

三、解答题

(17) 解：由 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$ ，得

$$4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = 0$$

$$2\cos^2 \alpha(2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1) = 0$$

$$\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$2\cos^2 \alpha(2\sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1) = 0 \quad \therefore \sin \alpha + 1 \neq 0, \cos^2 \alpha \neq 0$$

$$\therefore 2\sin \alpha - 1 = 0, \text{ 即 } \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(18) 解 (I) 作 $MP \parallel AB$ 交 BC 于点 P ， $NQ \parallel AB$ 交 BE 于点 Q ，连结 PQ ，依题意

可得 $MP \parallel NQ$ ，且 $MP = NQ$ ，即 $MNQP$ 是平行四边形。

$$\therefore MN = PQ$$

由已知 $CM = BN = a$ ， $CB = AB = BE = 1$

$$\therefore AC = BF = \sqrt{2}, \quad CP = BQ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\begin{aligned} MN = PQ &= \sqrt{(1-CP)^2 + BQ^2} = \\ &= \sqrt{(1-\frac{a}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a}{\sqrt{2}})^2} \\ &= \sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \quad (0 < a < \sqrt{2}) \end{aligned}$$

(II) 由 (I)

$$MN = \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

所以, 当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$

即当 M 、 N 分别为 AC 、 BF 的中点时, MN 的长最小, 最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(III) 取 MN 的中点 G , 连结 AG 、 BG ,

$\because AM = AN, BM = BN$, G 为 MN 的中点

$\therefore AG \perp MN, BG \perp MN$, 即 $\angle AGB$ 即为二面角的平面角 α

又 $AG = BG = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 所以, 由余弦定理有

$$\cos \alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3}$$

故所求二面角为 $\alpha = \pi - \arccos \frac{1}{3}$

(19) 解: 设点 P 的坐标为 (x, y) , 依题设得 $\frac{|y|}{|x|} = 2$, 即 $y = \pm 2x$, $x \neq 0$

因此, 点 $P(x, y)$ 、 $M(-1, 0)$ 、 $N(1, 0)$ 三点不共线, 得

$$\left| |PM| - |PN| \right| < |MN| = 2$$

$$\therefore \left| |PM| - |PN| \right| = 2|m| > 0$$

$$\therefore 0 < |m| < 1$$

因此, 点 P 在以 M 、 N 为焦点, 实轴长为 $2|m|$ 的双曲线上, 故

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{1-m^2} = 1$$

将 $y = \pm 2x$ 代入 $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{1-m^2} = 1$, 并解得

$$x^2 = \frac{m^2(1-m^2)}{1-5m^2}, \text{ 因 } 1-m^2 > 0$$

所以 $1-5m^2 > 0$

$$\text{解得 } 0 < |m| < \frac{\sqrt{5}}{5}$$

即 m 的取值范围为 $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{5}}{5})$

(20) 解: 设 2001 年末汽车保有量为 b_1 万辆, 以后各年末汽车保有量依次为 b_2 万辆, b_3 万辆, \dots , 每年新增汽车 x 万辆, 则

$$b_1 = 30, \quad b_2 = b_1 \times 0.94 + x$$

对于 $n > 1$, 有

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n \times 0.94 + x \\ &= b_{n-1} \times 0.94^2 + (1+0.94)x \\ &\dots \end{aligned}$$

所以 $b_{n+1} = b_1 \times 0.94^n + x(1+0.94+0.94^2+\dots+0.94^n)$

$$\begin{aligned} &= b_1 \times 0.94^n + \frac{1-0.94^n}{0.06} x \\ &= \frac{x}{0.06} + (30 - \frac{x}{0.06}) \times 0.94^n \end{aligned}$$

当 $30 - \frac{x}{0.06} \geq 0$, 即 $x \leq 1.8$ 时

$$b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_1 = 30.$$

当 $30 - \frac{x}{0.06} < 0$, 即 $x > 1.8$ 时

数列 $\{b_n\}$ 逐项增加, 可以任意靠近 $\frac{x}{0.06}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\frac{x}{0.06} + (30 - \frac{x}{0.06}) \times 0.94^{n-1}] = \frac{x}{0.06}$$

因此, 如果要求汽车保有量不超过 60 万辆, 即

$$b_n \leq 60 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

则 $\frac{x}{0.06} \leq 60$, 即 $x \leq 3.6$ 万辆

综上, 每年新增汽车不应超过 3.6 万辆。

(21) 解: (I) 当 $a = 0$ 时, 函数 $f(-x) = (-x)^2 + |-x| + 1 = f(x)$

此时, $f(x)$ 为偶函数

当 $a \neq 0$ 时, $f(a) = a^2 + 1$, $f(-a) = a^2 + 2|a| + 1$,

$f(a) \neq f(-a)$, $f(a) \neq -f(-a)$

此时 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数

(II) (i) 当 $x \leq a$ 时, $f(x) = x^2 - x + a + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + a + \frac{3}{4}$

当 $a \leq \frac{1}{2}$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上单调递减, 从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为

$f(a) = a^2 + 1$.

若 $a > \frac{1}{2}$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} + a$, 且 $f(\frac{1}{2}) \leq f(a)$.

(ii) 当 $x \geq a$ 时, 函数 $f(x) = x^2 + x - a + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - a + \frac{3}{4}$

若 $a \leq -\frac{1}{2}$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - a$, 且 $f(-\frac{1}{2}) \leq f(a)$

若 $a > -\frac{1}{2}$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 从而函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为

$f(a) = a^2 + 1$.

综上, 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4} - a$

当 $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $a^2 + 1$

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4} + a$.

(22) 解 (I) 由 $a_1 = 2$, 得 $a_2 = a_1^2 - a_1 + 1 = 3$

由 $a_2 = 3$, 得 $a_3 = a_2^2 - 2a_2 + 1 = 4$

由 $a_3 = 4$, 得 $a_4 = a_3^2 - 3a_3 + 1 = 5$

由此猜想 a_n 的一个通项公式: $a_n = n + 1$ ($n \geq 1$)

(II) (i) 用数学归纳法证明:

① 当 $n = 1$ 时, $a_1 \geq 3 = 1 + 2$, 不等式成立.

② 假设当 $n = k$ 时不等式成立, 即 $a_k \geq k + 2$, 那么

$$a_{k+1} = a_k(a_k - k) + 1 \geq (k+2)(k+2-k) + 1 = 2k+5 \geq k+3.$$

也就是说, 当 $n = k+1$ 时, $a_{k+1} \geq (k+1) + 2$

据①和②, 对于所有 $n \geq 1$, 有 $a_n \geq n+2$.

(ii) 由 $a_{n+1} = a_n(a_n - n) + 1$ 及 (i), 对 $k \geq 2$, 有

$$a_k = a_{k-1}(a_{k-1} - k + 1) + 1$$

$$\geq a_{k-1}(k-1+2-k+1) + 1 = 2a_{k-1} + 1$$

.....

$$a_k \geq 2^{k-1}a_1 + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^{k-1}(a_1 + 1) - 1$$

$$\text{于是 } \frac{1}{1+a_k} \leq \frac{1}{1+a_1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k \geq 2$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} \leq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1+a_1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{2}{1+a_1} \leq \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$$