2013 年普通高等学校招生全国统一考试（陕西卷）

理科数学

【试卷总评】2013 年高考理科数学陕西卷整体遵循考纲，体现新课标改革精神.试卷内容覆盖面广，涵盖了高中数学的主要内容，就考查知识而言，主干知识地位突出，重点内容仍重点考查.6 个主观题类型稳定，题序依次回归为：三角函数、数列、立体几何、概率统计、解析几何、函数与导数.

试题呈现出如下特点：

1．比照 2012 年高考试卷，2013 年的高考真题体现出来的特色是：试题情景设计生活味浓厚，诸如：问卷调查、信号覆盖、投票选举等社会热点话题；试题背景设计数学味深刻，如高斯函数、柯西不等式、对数平均值不等式、以及高等数学里的中值定理影子；试题选材设计紧扣高中数学教材核心内容，如等比、等差数列公式的推导，椭圆第二定义.试题呈现设计简单、基础、基本，力求凸现核心内容.如压卷题里的指数函数.

2．难度控制中等偏易，许多题目都是常见的、熟悉的.如理科第 1、2、6、7、9、11、12、13、14 题等.

3．适度创新，增加亮点.试题的灵活性有所增加，新题型、改编题增多，如理科第 2 小题在算法中首次出现了 if-then 的条件语句；第 4、8、10 题给人的感觉也很清新灵活；选修题的命题角度有所转变.

各个知识块所占的分数如下：

函数	不等式	三角函数	数列	立体几何	解析几何	概率统计	算法、平面向量、复数、推理与证明	选修
24 分 （8,10,21）	15 分 （1,9,13）	17 分 （7,16）	12 分 （17）	17 分 （12,18）	18 分 （11,20）	22 分 （4,5,19）	20 分 （2,3,6,14）	5 分 （15）
16%	10%	11.3%	8%	11.3%	12%	8%	10%	3.3%

整个试卷在明确考查“三基”（基础知识、基本技能、基本方法）、“五能力”（思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力、创新能力）的基础上，更加突出中学数学主要知识的考查，更加突出数学思想方法的考查，更加突出数学与现实生活的联系.

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题.
2. 考生领到试卷后, 须按规定在试卷上填写姓名、准考证号，并在答题卡上填涂对应的试卷类型信息.
3. 所有解答必须填写在答题卡上指定区域内. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分(共 50 分)

本解析为学科网名师解析团队原创，授权学科网独家使用，如有盗用，依法追责！

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1. 设全集为 R, 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 M, 则 $C_{\mathbf{R}}M$ 为 （　　）

(A) $[-1,1]$　　(B) $(-1,1)$

(C) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【答案】: D

【解析】: $f(x)$的定义域为M=$[-1,1]$，故$C_{R}M=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,选 D.要注意避免出现$x\leqslant\pm1$及求补集时区间端点的取舍错误.

【学科网考点定位】本题考查函数的定义域、一元二次不等式的解法、集合运算等知识.属于容易题.

2. 根据下列算法语句, 当输入 x 为 60 时, 输出 y 的值为 （　　）

```
输入 x
If x≤50 Then
    y=0.5 * x
Else
    y=25+0.6*(x-50)
End If
输出 y
```

(A) 25

(B) 30

(C) 31

(D) 61

【答案】: C

【解析】: $\because x=60,\therefore y=25+0.6\times(60-50)=31$,故选择 C.解答要注意条件的运用和判断.

【学科网考点定位】本题考查算法程序，重点突出对条件语句的考查. 是容易题.

3. 设 ***a*, *b*** 为向量, 则“$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$”是“***a*//*b***”的 （　　）

(A) 充分不必要条件　　　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　　　　　　　　　　　(D) 既不充分也不必要条件

【答案】：C

【解析】：a, b 为向量，$\left|\vec{a}\bullet\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\bullet\left|\vec{b}\right|\bullet\left|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$ 向量 a、b 的夹角为 $0°$ 或 $180°$ 则"$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$"是"$\vec{a}//\vec{b}$"的充分必要条件.此类问题解答要注意掌握好命题条件和向量共线的基本知识.

【学科网考点定位】本题考查向量的数量积、向量夹角、向量模长和充要条件等知识．属于容易题.

4. 某单位有 840 名职工，现采用系统抽样方法，抽取 42 人做问卷调查，将 840 人按 1, 2, …, 840 随机编号，则抽取的 42 人中，编号落入区间[481, 720]的人数为 （　　）

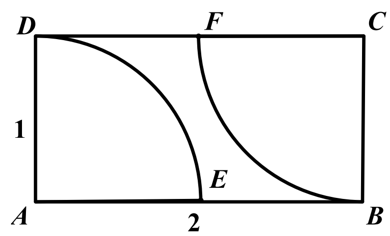
(A) 11　　　　(B) 12　　　　(C) 13　　　　(D) 14

【答案】：B

【解析】：840 人中按系统抽样抽取 42 人，即每 20 人中抽取 1 人由题设可知区间[481，720]长度为 240，落在区间内的人数为 12 人.此类问题主要掌握系统抽样方法就可解决.

【学科网考点定位】考查抽样方法中的系统抽样，系统抽样也叫等距抽样.属于容易题

5. 如图，在矩形区域 ABCD 的 A, C 两点处各有一个通信基站，假设其信号覆盖范围分别是扇形区域 ADE 和扇形区域 CBF(该矩形区域内无其他信号来源，基站工作正常)．若在该矩形区域内随机地选一地点，则该地点无信号的概率是 （　　）



(A) $1-\frac{\pi}{4}$　　　　(B) $\frac{\pi}{2}-1$

(C) $2-\frac{\pi}{2}$　　　　(D) $\frac{\pi}{4}$

【答案】：A

【解析】：由题设可知矩形 ABCD 面积为 2，曲边形 DEBF 的面积为 $2-\frac{\pi}{2}$ 故所求概率为 $\frac{2-\frac{\pi}{2}}{2}=1-\frac{\pi}{4}$，选 A.几何概型中的面积比问题，涉及矩形和扇形面积的计算，要仔细审题，不可求成该点有信号的概率.

【学科网考点定位】本题考查几何概型，是几何概型中的面积比问题，涉及矩形和扇形面积的计算属于中档题.

6. 设 z_1, z_2 是复数，则下列命题中的假命题是 （　　）

(A) 若$|z_1-z_2|=0$，则$\overline{z_1}=\overline{z_2}$ (B) 若$z_1=\overline{z_2}$，则$\overline{z_1}=z_2$

(C) 若$|z_1=z_2|$，则$z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$ (D) 若$|z_1=z_2|$，则$z_1{}^2=z_2{}^2$

【答案】D

【解析】设$z_1=a+bi,z_2=c+di$.若$|z_1-z_2|=0$，则$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$，$a=c,b=d$，所以$\overline{z_1}=\overline{z_2}$，故A项正确；若$z_1=\overline{z_2}$，则$a=c,b=-d$，所以$\overline{z_1}=z_2$，故B项正确；若$|z_1|=|z_2|$，则$a^2+b^2=c^2+d^2$，所以$z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$，故C项正确；

$z_1^2=(a^2-b^2)+2abi,z_2^2=(c^2-d^2)+2cdi$，在$a^2+b^2=c^2+d^2$的条件下，不能保证

$a^2-b^2=c^2-d^2,2ab=2cd$，故D项错误.本题求解的关键是将复数设成代数形式，要求考生对复数的核心知识熟练运用.

【学科网考点定位】本题考查复数代数形式的减法、乘法运算及共轭复数、复数的模、复数相等等概念.属于中档题.

7. 设△ABC的内角A, B, C所对的边分别为a, b, c, 若$b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则△ABC的形状为（ ）

(A) 锐角三角形 (B) 直角三角形 (C) 钝角三角形 (D) 不确定

【答案】B

【解析】因为$b\cos C+c\cos B=a\sin A$，所以由正弦定理得$\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin^2 A$，所以$\sin(B+C)=\sin^2 A$，所以$\sin A=\sin^2 A$，所以$\sin A=1$，所以△ABC是直角三角形.此类问题关键在于掌握正弦定理和三角恒等变换，准确运算是关键.

【学科网考点定位】本题考查正弦定理和三角恒等变换，涉及正弦定理的变式、两角和的正弦公式、三角形内角和定理、诱导公式和特殊角的三角函数值等知识，属于中档题.

8. 设函数$f(x)=\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4, & x<0,\\ -\sqrt{x}, & x\geq 0.\end{cases}$，则当x>0时，$f[f(x)]$表达式的展开式中常数项为（ ）

(A) －20 (B) 20 (C) －15 (D) 15

【答案】A

【解析】$f[f(x)]=(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x})^6$，所以 $T_4=C_6^3(\frac{1}{\sqrt{x}})^3(-\sqrt{x})^3=-20$. 准确运用二项式定理是解题关键.

【学科网考点定位】本题考查分段函数和二项式定理.属于中档题.

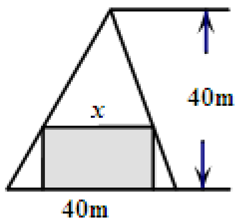
9. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积不小于 $300m^2$ 的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x(单位 m)的取值范围是 （　　）

(A) [15,20]　　　　(B) [12,25]

(C) [10,30]　　　　(D) [20,30]

【答案】C

【解析】如图△ADE∽△ABC，设矩形的另一边长为 y，则



$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{40-y}{40}\right)^2$，所以 $y=40-x$，又 $xy\geqslant300$，所以 $x(40-x)\geqslant300$，即 $x^2-40x+300\leqslant0$，解得 $10\leqslant x\leqslant30$.

【学科网考点定位】本题考查平面几何知识和一元二次不等式的解法，对考生的阅读理解能力、分析问题和解决问题的能力以及探究创新能力都有一定的要求.属于难题.

10. 设[x]表示不大于 x 的最大整数，则对任意实数 x, y，有 （　　）

(A) [－x] ＝ －[x]　　　(B) [2x] ＝ 2[x]

(C) [x＋y]≤[x]＋[y]　　(D) [x－y]≤[x]－[y]

【答案】D

【解析】取 $x=2.5$，则 $[-x]=[-2.5]=-3, -[x]=-[2.5]=-2$，所以 A 项错误；

$[2x]=[5]=5, 2[x]=2[2.5]=4$，所以 B 项错误；再取 $y=2.8$，则

$[x+y]=[5.3]=5, [x]+[y]=[2.5]+[2.8]=2+2=4$，所以 C 项错误.

【学科网考点定位】本题考查取整函数(即高斯函数)，分段函数思想.属于难题.

第二部分(共 100 分)

二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

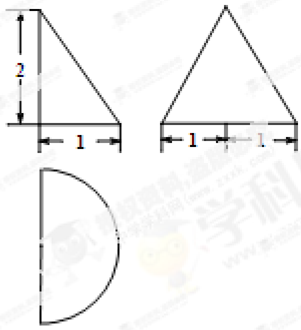
11. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\dfrac{5}{4}$，则 m 等于________.

【答案】9

【解析】由 $a^2=16$，$b^2=m$ 得 $c^2=16+m$，则 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{16+m}}{4}=\dfrac{5}{4}$，$\therefore m=9$ 本题解题的关键在于利用双曲线标准方程中 $c^2=a^2+b^2$ 和离心率的求解公式 $e=\dfrac{c}{a}$.

【学科网考点定位】本题主要考查了双曲线的标准方程以及离心率，属于容易题.

12. 某几何体的三视图如图所示，则其体积为________.



【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】由三视图还原为实物图得半个圆锥，其体积

$V=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}(\pi\cdot1^2\times2)=\dfrac{\pi}{3}$.

【学科网考点定位】本题主要考查了三视图还原为实物图的能力和圆锥的体积公式，属于容易题，

13. 若点(x,y)位于曲线 $y=|x-1|$ 与 y＝2 所围成的封闭区域，则 2x－y 的最小值为________.

【答案】-4.

【解析】作出曲线 $y=|x-1|$ 与 $y=2$ 所表示的区域，令 $2x-y=z$，即 $y=2x-z$，作直线

$y=2x$，

在封闭区域内平行移动直线 $y=2x$，当经过点 $(-1,2)$ 时，z 取到最小值，此时最小值为 -4．解题的关键在于画出曲线围成的封闭区域，并把求 $2x-y$ 的最小值转化为求 $y=2x-z$ 所表示的直线截距的最大值，通过平移直线 $y=2x$ 即可求解.

【学科网考点定位】本题主要考查了线性规划的最值问题，考查画图和转化能力，属于中等题.

14. 观察下列等式:

$1^2=1$

$1^2-2^2=-3$

$1^2-2^2+3^2=6$

$1^2-2^2+3^2-4^2=-10$

…

照此规律, 第 n 个等式可为________.

【答案】$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in N^*)$，

【解析】观察上式等号左边的规律发现：左边的项数依次加 1，故第 n 个等式左边有 n 项，每项所含的底数的绝对值也增加 1，依次为 $1,2,3\cdots n$，指数都是 2，符号成正负交替出现可以用 $(-1)^{n+1}$ 表示；等式的右边数的绝对值是左边项的底数的和，故等式的右边可以表示为 $(-1)^n\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以第 n 个式子可为：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in N^*)$．解题的关键在于：1．通过四个已知等式的比较发现隐藏在等式中的规律； 2．符号成正负交替出现可以用 $(-1)^{n+1}$ 表示；3．表达的完整性，不要遗漏了 $n\in N^*$．

【学科网考点定位】本题考查观察和归纳推理能力．属于中等题．

15. (考生请注意:请在下列三题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分)

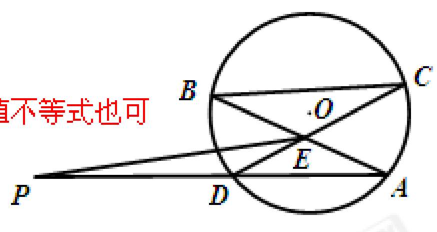
A. (不等式选做题) 已知 a, b, m, n 均为正数, 且 a＋b＝1, mn＝2, 则(am＋bn)(bm＋an)的最小值为______.

【答案】2

【解析】: 由柯西不等式可得

$$(am+bn)(bm+an)\geq\left(\sqrt{am}\sqrt{an}+\sqrt{bm}\sqrt{bn}\right)^2=mn(a+b)^2=2$$

【学科网考点定位】本题考查代数式求最值问题，既可以考虑用均值不等式也可以考虑用柯西不等式.属于容易题.



B. (几何证明选做题) 如图, 弦 AB 与 CD 相交于 ⊙O 内一点 E,

过 E 作 BC 的平行线与 AD 的延长线相交于点 P. 已知 PD＝2DA＝2,

则 PE＝______.

【答案】$\sqrt{6}$

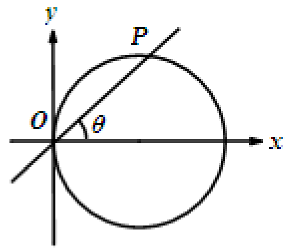
【解析】

易知$\angle BCE=\angle PED=\angle BAP$　$\therefore \Delta PDE \sim \Delta PEA$

$\therefore \dfrac{PE}{PA}=\dfrac{PD}{PE}$　　而$PD=2DA=2$　$\therefore PA=3$

$PE^2=PA\cdot PD=6$　　故$PE=\sqrt{6}$.

【学科网考点定位】本题考查平面几何证明，利用三角形相似即可求解，属于容易题.



C.(坐标系与参数方程选做题) 如图, 以过原点的直线的倾斜角θ为参数, 则圆$x^2+y^2-x=0$的参数方程为____________ .

【答案】$x=\cos^2\theta, y=\sin\theta\cos\theta, 0\le\theta<\pi$.

【解析】$x^2+y^2-x=0, (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$,以（$\frac{1}{2}$,0）为圆心，$\frac{1}{2}$为半径，且过原点的圆它的标准参数方程为$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha,\ y=\frac{1}{2}\sin\alpha, 0\le\alpha<2\pi$,，由已知，以过原点的直线倾斜角θ为参数,则$0\le\theta<\pi$,

所以$0\le 2\theta<2\pi$.

所以所求圆的参数方程为$x=\cos^2\theta, y=\sin\theta\cos\theta, 0\le\theta<\pi$.

【学科网考点定位】本题考查与圆的参数方程有关的问题，涉及圆的标准方程和参数方程等知识，属于容易题.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程及演算步骤.（本大题共 6 小题，共 75 分）

16. (本小题满分 12 分)

已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos x,-\frac{1}{2}), \boldsymbol{b}=(\sqrt{3}\sin x,\cos 2x), x\in \boldsymbol{R}$, 设函数$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(Ⅰ) 求 f (x)的最小正周期.

(Ⅱ) 求 f (x) 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

【答案】：$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ ……………………………………………4 分

（Ⅰ）$f(x)$ 的最小正周期为T=$\frac{2\pi}{2}=\pi$ ……………………………………6 分

（Ⅱ）$\because x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，$\therefore \sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$ ………………8 分

故当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)_{max}=1$ ………………………10 分

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$ 即 $x=0$ 时，$f(x)_{min}=-\frac{1}{2}$ ……………………………12 分

【解析】：本题主要考察的是向量的数量积运算和三角函数的周期，最值问题.正确运用公式

若 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2),x\in R$,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$ $T=\left|\frac{2\pi}{\omega}\right|$ 以及函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 图像性质的

熟练运用是解答关键.本题属于高考的常考类型，需要多加练习，关注三角函数和定积分的结合也是热点之一.

【学科网考点定位】本题考查三角恒等变形、三角函数的性质等基础知识．简单题.

17. (本小题满分 12 分)

设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(Ⅰ) 推导 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式;

(Ⅱ) 设 q≠1, 证明数列 $\{a_n+1\}$ 不是等比数列.

【答案】:

（Ⅰ）设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，其前 n 项和为$S_n = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1}$ .... （1）

将（1）式两边分别乘以 q 得

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^n$ .... （2）

（1）-（2）得$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n$

当 $q \neq 0$时 $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$或 $S_n = \dfrac{a_1 - a_nq}{1-q}$

当$q = 1$时，$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$，所以$S_n = na_1$

（Ⅱ）方法一：

$\because q \neq 1$,假设数列$\{a_n+1\}$为等比数列，那么$(a_2+1)^2 = (a_1+1)\cdot(a_3+1)$

即$(a_1q+1)^2 = (a_1+1)\cdot(a_1q^2+1) \Rightarrow a_1(q-1)=0 \Rightarrow a_1 = 0$或$q = 1$,均与题设矛盾，故数列$\{a_n+1\}$不可能为等比数列.

方法二：$\because q \neq 1$,假设数列$\{a_n+1\}$为等比数列，那么$(a_k+1)^2 = (a_{k-1}+1)\cdot(a_{k+1}+1)$

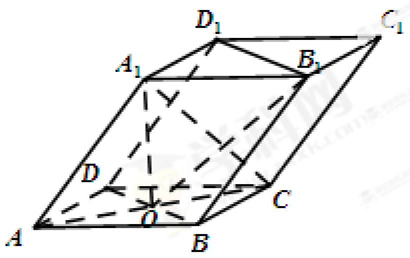
即$(a_1q^{k-1}+1)^2 = (a_1q^{k-2}+1)\cdot(a_1q^k+1) \Rightarrow a_1(q-1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$或$q = 1$,均与题设矛盾，故数列$\{a_n+1\}$不可能为等比数列.

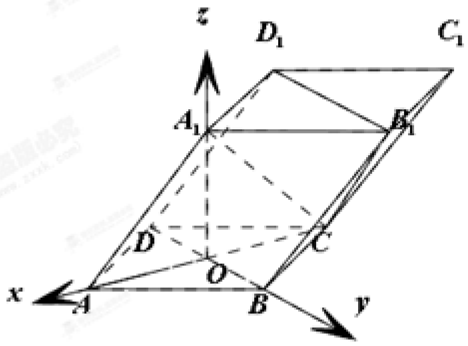
【解析】本题考查了等比数列前项和公式的推导，涉及参数 q 分类讨论及错位相减法，体现高考题型源于教材的基本理念.而在第二问中要求证明数列不是等比数列，既考查了对等比数列概念的理解，又涉及到了反证法的应用；知识有机结合，考查综合能力.问中对数列的证明可以采取特殊代替一般的方法，也可以通行通法的解题思想.判断一个数列是否是等比数列一定要关注首项的验证，负责容易错误.

【学科网考点定位】本题考查等比数列的前 n 项和公式推导和有关等比数列的证明. 突出对教材重要内容的考查，引导回归教材，重视教材.属于容易题.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 是正方形, O 为底面中心, $A_1O\perp$平面 ABCD, $AB = AA_1 = \sqrt{2}$.





(Ⅰ) 证明: $A_1C \perp$ 平面 BB_1D_1D;

(Ⅱ) 求平面 OCB_1 与平面 BB_1D_1D 的夹角 θ 的大小.

【答案】: 如图建立空间直角坐标系,

由 $AB = AA_1 = \sqrt{2}$ 可知 O $(0,0,0)$, $A(1,0,0), B(0,1,0), B_1(-1,1,1)$, $C(-1,0,0)$

$A_1(0,0,1), D_1(-1,-1,1)$

(Ⅰ) $\overrightarrow{A_1C} = (-1,0,-1)$, $\overrightarrow{DB} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (-1,0,1)$

$\overrightarrow{A_1C} \bullet \overrightarrow{DB} = 0, \overrightarrow{A_1C} \bullet \overrightarrow{BB_1} = 0$, 即 $\overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{BB_1}$, 且 $DB \cap BB_1 = B$

所以 $A_1C \perp$ 平面 BB_1D_1D

(Ⅱ) 容易求得平面 OCB_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (0,1,-1)$, 平面 BB_1D_1D 的一个法向量为

$\vec{m} = (1,0,1)$, 所求夹角余弦值为 $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{m} \bullet \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}| \bullet |\overrightarrow{n}|} = -\dfrac{1}{2}$. 所求夹角的大小为 60°.

【解析】: 本题考查空间直线与平面的位置关系和二面角问题, 考查空间想象能力和推理论证能力、对公式 $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{m} \bullet \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}| \bullet |\overrightarrow{n}|} = -\dfrac{1}{2}$ 的熟练准确运用.此类问题的易错点是未能合理的建立空间直角坐标系, 找好线面的垂直关系.空间向量的解决对法向量求解不准确, 二面角的锐角和钝角判断不准会导致结果错误.

【学科网考点定位】本题考查空间直线现平面的位置关系和二面角问题, 考查空间想象能力和推理论证能力.

19. (本小题满分 12 分)

在一场娱乐晚会上, 有 5 位民间歌手(1 至 5 号)登台演唱, 由现场数百名观众投票选出最受欢迎歌手.

各位观众须彼此独立地在选票上选 3 名选手，其中观众甲是 1 号歌手的歌迷，他必选 1 号，不选 2 号，另在 3 至 5 号中随机选 2 名．观众乙和丙对 5 位歌手的演唱没有偏爱，因此在 1 至 5 号中随机选 3 名歌手.

（Ⅰ）求观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手的概率;

（Ⅱ）X 表示 3 号歌手得到观众甲、乙、丙的票数之和，求 X 的分布列和数学期望.

【答案】：（Ⅰ）由于观众甲必选 1，不选 2，则观众甲选中 3 号歌手的概率为 $\frac{C_1^1\cdot C_2^1}{C_3^2}=\frac{2}{3}$，观众乙未选中 3 号歌手的概率为 $\frac{C_4^3}{C_5^3}=\frac{2}{5}$，甲乙选票彼此独立，故观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手的概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$.

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 0,1,2,3.由（Ⅰ）知，观众甲选中 3 号歌手的概率为 $\frac{2}{3}$，观众乙选中 3 号歌手的概率为 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，则观众丙选中 3 号歌手的概率也为 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，则

$P(X=0)=(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{3}{5})^2=\frac{4}{75}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{5})^2+(1-\frac{2}{3})\times C_2^1\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{3}{5})=\frac{20}{75}=\frac{4}{15}$，

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times C_2^1\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{3}{5})+(1-\frac{2}{3})\times(\frac{3}{5})^2=\frac{33}{75}=\frac{11}{25}$，$P(X=3)=\frac{2}{3}\times(\frac{3}{5})^2=\frac{18}{75}=\frac{6}{25}$.

则 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$

$$EX=0\times\frac{4}{75}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{11}{25}+3\times\frac{6}{25}=\frac{28}{15}.$$

【解析】：本题考查涉及排列组合、概率、随机变量分布列和期望问题，（Ⅰ）问中考查了“观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手”互斥事件同时发生的概率，也可以利用树形图解决.（Ⅱ）问中要注意分布列性质运用，验证概率总合是否为 1.此类问题在高考中属于常考重点题型，必须熟练掌握.

【学科网考点定位】本题考查排列组合、概率、随机变量分布列和期望问题.属于中档题.

20. (本小题满分 13 分)

已知动圆过定点 A(4,0), 且在 y 轴上截得的弦 MN 的长为 8.

(Ⅰ) 求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(Ⅱ) 已知点 B(−1,0), 设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P, Q, 若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线, 证明直线 l 过定点.

【答案】:(Ⅰ)设动圆圆心 C 的坐标为(x, y)则$(4-x)^2+(0-y)^2=4^2+x^2$, 整理得$y^2=8x$, 所以,

所求动圆圆心的轨迹 C 的方程为 $y^2=8x$ ($x\neq 0$)

(Ⅱ)证明:

设直线 l 方程为 $y=kx+b$，联立$\begin{cases}y^2=8x\\y=kx+b\end{cases}$得 $k^2x^2+2kbx+b^2=8x\Rightarrow k^2x^2-(8-2kb)x+b^2=0$

(其中 $\Delta=-32kb+64>0$)

设 $P(x_1,kx_1+b)$, $Q(x_2,kx_2+b)$, 若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线，则

$$k_{QB}+k_{PB}=\frac{kx_1+b}{x_1+1}+\frac{kx_2+b}{x_2+1}=\frac{(kx_1+b)\cdot(x_2+1)+(kx_2+b)\cdot(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{kx_1x_2+(k+b)(x_1+x_2)+2b}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$=\dfrac{8(k+b)}{k^2(x_1+1)(x_2+1)}=0$，即 $k=-b$ 故直线 l 方程为 $y=k(x-1)$，直线 l 过定点.（1,0)

【解析】: 本题考查轨迹方程求法、直线方程、圆方程、直线与圆的位置关系及直线过定点问题.第一问曲线轨迹方程的求解问题是高考的热点题型之一，准确去除不满足条件的 $x\neq 0$ 点是关键.第二问对角平分线的性质运用是关键，对求定值问题的解决要控制好运算量，同时注意好判别式 $\Delta=-32kb+64>0$ 的条件，以防多出结果.圆锥曲线问题经常与向量、三角函数结合，在训练中要注意.本题无论是求圆心的轨迹方程，还是求证直线过定点，计算量都不太大，对思维的要求挺高;设计问题背景，彰显应用魅力.

【学科网考点定位】本题考查迹曲线方程求法、直线方程、圆方程、直线与圆的位置关系及直线过定点问题，属于中档题.

21. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x, x\in \boldsymbol{R}$.

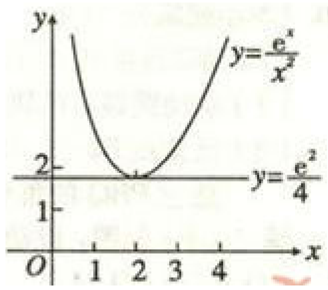
（Ⅰ）若直线 y＝kx＋1 与 f (x)的反函数的图像相切，求实数 k 的值；

（Ⅱ）设 x>0，讨论曲线 y＝f (x) 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 公共点的个数.

(III) 设 a<b，比较 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 与 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小，并说明理由.

【答案】：函数 $f(x)=e^x, x\in R\Rightarrow f'(x)=e^x$

（Ⅰ）. 函数



$\frac{1}{x_0}=k\Rightarrow kx_0=1$ $f(x)=e^x, x\in R$的反函数为$y=\ln x, x>0, y'=\frac{1}{x}$，

设切点坐标为(x_0, kx_0+1)则 $\frac{1}{x_0}=k\Rightarrow kx_0=1$，

$\ln x_0=2\Rightarrow x_0=e^2\Rightarrow k=\frac{1}{e^2}$.

（Ⅱ）令 $f(x)=mx^2$即$e^x=mx^2(x>0)\Rightarrow m=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，设 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$

有 $g'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}(x>0)$,函数$g(x)$在$(0,2]$上单调递减，在$[2,+\infty)$上单调递增。

$g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{4}$，所以(1) $m>\frac{e^2}{4}$时，两曲线有2个交点；

(2) $m=\frac{e^2}{4}$时，两曲线有1个交点；(3) $m<\frac{e^2}{4}$时，两曲线没有交点。

（III）

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{e^a+e^b}{2}-\frac{e^a-e^b}{b-a}=e^a(\frac{1+e^{b-a}}{2}-\frac{1-e^{b-a}}{b-a})$$

$$=e^a\frac{(b-a)(1+e^{b-a})-2(1-e^{b-a})}{2(b-a)}$$

$\because a<b$，令$b-a=t>0$

$\therefore$上式$=e^a\dfrac{t(1+e^t)-2(1-e^t)}{2t}=\dfrac{e^a}{2t}\bullet\left[(t+2)e^t+t-2\right]$

令$g(t)=(t+2)e^t+t-2$，则$g'(t)=(t+3)e^t+1>0$恒成立

$\therefore g(t)>g(0)=0$　而$\dfrac{e^a}{2t}>0$　$\therefore\dfrac{e^a}{2t}\bullet\left[(t+2)e^t+t-2\right]>0$

故$\dfrac{f(a)+f(b)}{2}>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

【解析】：本题考查函数、导数、不等式、参数等问题，属于难题.第二问运用数形结合思想解决问题，能够比较清晰的分类，做到不吃不漏.最后一问,考查函数的凹凸性，富有明显的几何意义,为考生探索结论提供了明确的方向,对代数手段的解决起到导航作用.

【学科网考点定位】本题考查考查函数的凹凸性、导数、不等式、参数等问题.属于难题.