

2008高考湖南理科数学试题及全解全析

一、选择题:本大题共10小题,每小题5分,共50分.在每小题给出的四个选项中,

只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $(i - \frac{1}{i})^3$ 等于()

- A. 8 B. -8 C. 8i D. -8i

2. “ $|x-1| < 2$ 成立”是“ $x(x-3) < 0$ 成立”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知变量 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x - y \leq 0, \\ x + 2y - 9 \leq 0, \end{cases}$ 则 $x + y$ 的最大值是()

- A. 2 B. 5 C. 6 D. 8

4. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, 9)$, 若 $P(\xi > c+1) = P(\xi < c-1)$, 则 $c =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设有直线 m, n 和平面 α, β , 下列四个命题中, 正确的是()

- A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$
B. 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
C. 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha$, 则 $m \perp \beta$
D. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \beta, m \not\subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$

6. 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值是()

- A. 1 B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $1+\sqrt{3}$

7. 设 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 上的点, 且 $\overline{DC} = 2\overline{BD}, \overline{CE} = 2\overline{EA},$

$\overline{AF} = 2\overline{FB}$, 则 $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}$ 与 \overline{BC} ()

A.反向平行

B.同向平行

C.互相垂直

D.既不平行也不垂直

8.若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上横坐标为 $\frac{3a}{2}$ 的点到右焦点的距离

大于它到左准线的距离, 则双曲线离心率的取值范围是()

A.(1,2)

B.(2,+∞)

C.(1,5)

D.(5,+∞)

9.长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的8个顶点在同一球面上, 且 $AB=2, AD=\sqrt{3}, AA_1=1$,

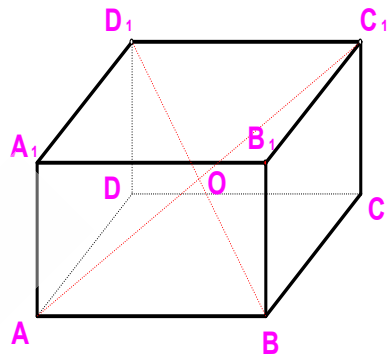
则顶点 A, B 间的球面距离是()

A. $2\sqrt{2}\pi$

B. $\sqrt{2}\pi$

C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$



10. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (如 $[2]=2, [\frac{5}{4}]=1$), 对于给定的 $n \in \mathbf{N}^*$,

定义 $C_n^x = \frac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty)$, 则当 $x \in [\frac{3}{2}, 3)$ 时, 函数 C_8^x 的

值域是()

A. $[\frac{16}{3}, 28]$

B. $[\frac{16}{3}, 56)$

C. $(4, \frac{28}{3}] \cup [28, 56)$

D. $(4, \frac{16}{3}] \cup (\frac{28}{3}, 28]$

二、填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分。把答案填在对应题号后的横线上。

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F , 右准线为 l , 离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

过顶点 $A(0,b)$ 作 $AM \perp l$,垂足为 M ,则直线 FM 的斜率等于_____.

13.设函数 $y = f(x)$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$,且函数 $y = x - f(x)$ 的图象过点 $(1,2)$,

则函数 $y = f^{-1}(x) - x$ 的图象一定过点_____.

14.已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3-ax}}{a-1} (a \neq 1)$.

(1)若 $a > 0$,则 $f(x)$ 的定义域是_____;

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是_____.

15.对有 $n(n \geq 4)$ 个元素的总体 $\{1, 2, \dots, n\}$ 进行抽样,先将总体分成两个子总体

$\{1, 2, \dots, m\}$ 和 $\{m+1, m+2, \dots, n\}$ (m 是给定的正整数,且 $2 \leq m \leq n-2$),再从

每个子总体中各随机抽取2个元素组成样本.用 P_{ij} 表示元素 i 和 j 同时出现在样

本中的概率,则 $P_{1n} =$ _____;所有 $P_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$ 的和等于_____.

三、解答题:本大题共6小题,共75分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.(本小题满分12分)

甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试,面试合格者可正式签约,甲表示只要面试合格就签约.乙、丙则约定:两人面试都合格就一同签约,否则两人都不签约.设每人面试合格的概率都是 $\frac{1}{2}$,且面试是否合格互不影响.求:

(I)至少有1人面试合格的概率;

(II)签约人数 ξ 的分布列和数学期望.

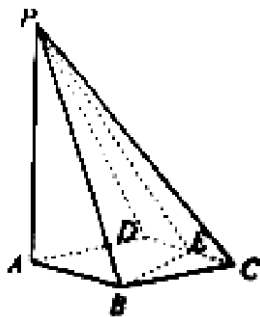
17.(本小题满分12分)

如图所示,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形, $\angle BCD = 60^\circ$,

E 是 CD 的中点, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = 2$.

(I)证明:平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ;

(II)求平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角(锐角)的大小.



18. (本小题满分12分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = (1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2})a_n + \sin^2 \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$

(I) 求 a_3, a_4 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

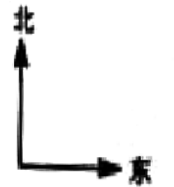
(II) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}, S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. 证明: 当 $n \geq 6$ 时, $|S_n - 2| < \frac{1}{n}$.

19. (本小题满分13分)

在一个特定时段内, 以点E为中心的7海里以内海域被设为警戒水域. 点E正北55海里处有一个雷达观测站A. 某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点A北偏东 45° 且与点A相距 $40\sqrt{2}$ 海里的位置B, 经过40分钟又测得该船已行驶到点A北偏东 $45^\circ + \theta$ (其中 $\sin \theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$,

$0^\circ < \theta < 90^\circ$) 且与点A相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置C.

- (I) 求该船的行驶速度 (单位: 海里/小时);
 (II) 若该船不改变航行方向继续行驶. 判断它是否会进入警戒水域, 并说明理由.



20. (本小题满分13分)

若A、B是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的不同两点, 弦AB (不平行于y轴) 的垂直平分线与x轴相交于点P, 则称弦AB是点P的一条“相关弦”. 已知当 $x > 2$ 时, 点P ($x_0, 0$) 存在无穷多条“相关弦”. 给定 $x_0 > 2$.

- (I) 证明: 点P ($x_0, 0$) 的所有“相关弦”中的中点的横坐标相同;
 (II) 试问: 点P ($x_0, 0$) 的“相关弦”的弦长中是否存在最大值?
 若存在, 求其最大值 (用 x_0 表示); 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = \ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若不等式 $(1 + \frac{1}{n})^{n+a} \leq e$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立 (其中 e 是自然对数的底数).
求 a 的最大值.