

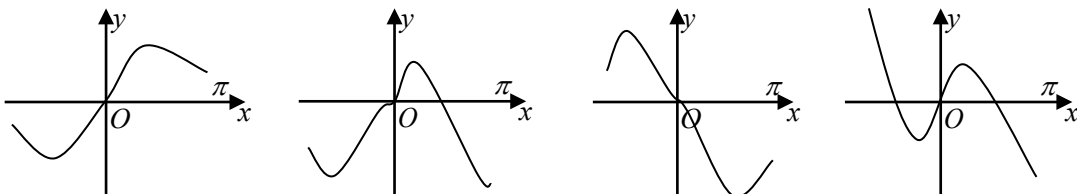
2013年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）理科数学

参考公式：如果事件A、B互斥，那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 如果事件A、B独立，那么 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ 。

第 I 卷（共60分）

一、选择题：本大题共12小题。每小题5分共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 1、复数 z 满足 $(z-3)(2-i) = 5$ (i 为虚数单位)，则 z 的共轭复数 \bar{z} 为
(A) $2+i$ (B) $2-i$ (C) $5+i$ (D) $5-i$
- 2、已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ，则集合 $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 9
- 3、已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ，则 $f(-1) =$
(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2
- 4、已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直，体积为 $\frac{9}{4}$ ，底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，若 P 为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心，则 PA 与平面 ABC 所成角的大小为
(A) $\frac{5\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$
- 5、将函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后，得到一个偶函数的图象，则 φ 的一个可能取值为
(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) 0 (D) $-\frac{\pi}{4}$
- 6、在平面直角坐标系 xOy 中， M 为不等式组 $\begin{cases} 2x - y - 2 \geq 0, \\ x + 2y - 1 \geq 0, \\ 3x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的区域上一动点，则直线 OM 的斜率的最小值为
(A) 2 (B) 1 (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{2}$
- 7、给定两个命题 p, q 。若 $\neg p$ 是 q 的必要不充分条件，则 p 是 $\neg q$ 的
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 8、函数 $y = x \cos x + \sin x$ 的图象大致为



- (A) (B) (C) (D)

9、过点(3,1)作圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，则直线 AB 的方程为

- (A) $2x + y - 3 = 0$ (B) $2x - y - 3 = 0$ (C) $4x - y - 3 = 0$ (D) $4x + y - 3 = 0$

10、用0, 1, ..., 9十个数字，可以组成有重复数字的三位数的个数为

- (A) 243 (B) 252 (C) 261 (D) 279

11、抛物线 $C_1: y = \frac{1}{2p}x^2 (p > 0)$ 的焦点与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限的点 M 。若

C_1 在点 M 处的切线平行于 C_2 的一条渐近线，则 $p =$

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{16}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

12、设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$ 。则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时， $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值为

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{9}{4}$ (D) 3

第II卷 (共90分)

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。

13、执行右图所示的程序框图，若输入 c 的值为0.25，则输出的 n 的值为_____。

14、在区间 $[-3, 3]$ 上随机取一个数 x ，

使得 $|x+1| + |x-2| \geq 1$ 成立的概率为_____。

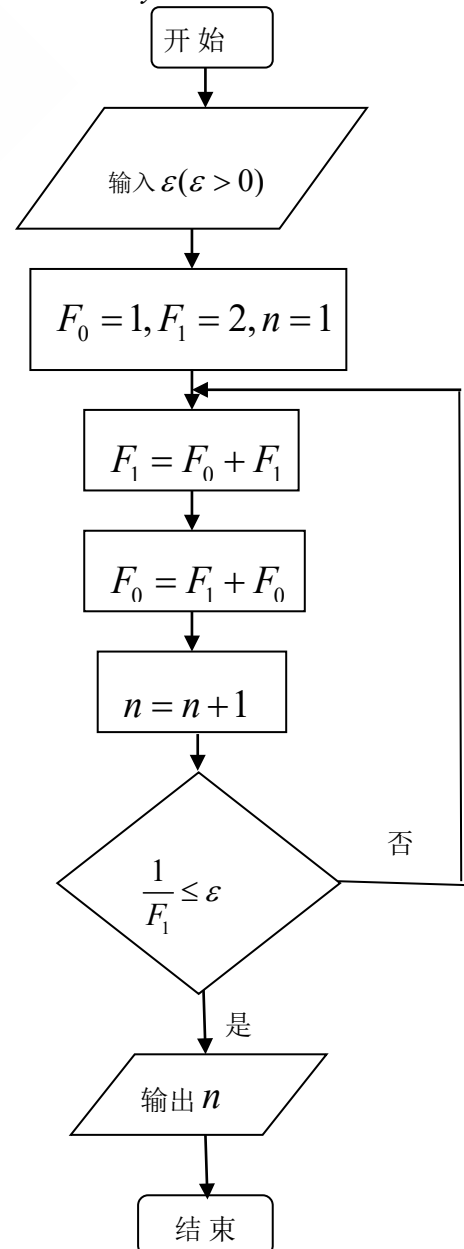
15、已知向量 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为 120° ，

且 $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 2$ 。若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ，

且 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ ，则实数 λ 的值为_____。

16、定义“正对数”： $\ln^+ x = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$ 现有四个命题：

- ①若 $a > 0, b > 0$ ，则 $\ln^+(a^b) = b \ln^+ a$ ；
 ②若 $a > 0, b > 0$ ，则 $\ln^+(ab) = \ln^+ a + \ln^+ b$ ；
 ③若 $a > 0, b > 0$ ，则 $\ln^+(\frac{a}{b}) \geq \ln^+ a - \ln^+ b$ ；



④若 $a > 0, b > 0$, 则 $\ln^+(a+b) \leq \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2$.

其中的真命题有_____. (写出所有真命题的编号)

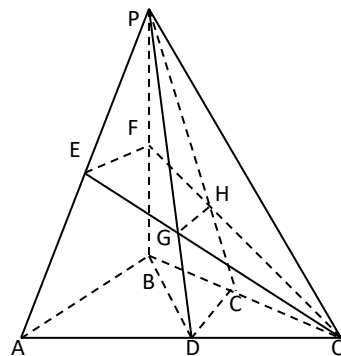
三、解答题：本大题共6小题，共74分.

17、(本小题满分12分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a+c=6, b=2, \cos B = \frac{7}{9}$.

(I) 求 a, c 的值;

(II) 求 $\sin(A-B)$ 的值.



18、(本小题满分12分)

如图所示，在三棱锥 $P-ABQ$ 中， $PB \perp$ 平面 ABQ ,

$BA = BP = BQ$, D, C, E, F 分别是 AQ, BQ, AP, BP

的中点， $AQ = 2BD$, PD 与 EQ 交于点 G ,

PC 与 FQ 交于点 H , 连接 GH .

(I) 求证: $AB \parallel GH$;

(II) 求二面角 $D-GH-E$ 的余弦值.

19、(本小题满分12分)

甲、乙两支球队进行比赛，约定先胜3局者获得比赛的胜利，比赛随即结束。除第五局甲队获胜的概率是 $\frac{1}{2}$

外，其余每局比赛甲队获胜的概率都是 $\frac{2}{3}$ 。假设各局比赛结果相互独立。

(I) 分别求甲队以3:0, 3:1, 3:2胜利的概率;

(II) 若比赛结果为3:0或3:1, 则胜利方得3分、对方得0分; 若比赛结果为3:2, 则胜利方得2分、对方得1分。求乙队得分 X 的分布列和数学期望。

20、（本小题满分12分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n + \frac{a_n + 1}{2^n} = \lambda$ (λ 为常数)。令 $c_n = 2b_{2n}, (n \in N^*)$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n 。

21、（本小题满分13分）

设函数 $f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + c$ ($e = 2.71828\dots$ 是自然对数的底数, $c \in R$)

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间、最大值；

(II) 讨论关于 x 的方程 $|\ln x| = f(x)$ 根的个数。

22、（本小题满分13分）

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，过 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为1.

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点，连接 PF_1, PF_2 。设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m, 0)$ ，求 m 的取值范围；

(III) 在 (II) 的条件下，过点 P 作斜率为 k 的直线 l ，使得 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点。设直线

PF_1, PF_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k \neq 0$, 试证明 $\frac{1}{kk_1} + \frac{1}{kk_2}$ 为定值, 并求出这个定值.

一、选择题

1. (5分) (2013•山东) 复数 z 满足 $(z-3)(2-i)=5$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数 \bar{z} 为 ()
A. $2+i$ B. $2-i$ C. $5+i$ D. $5-i$

考点: 复数的基本概念.

专题: 计算题.

分析: 利用复数的运算法则求得 z , 即可求得 z 的共轭复数 \bar{z} .

解答: 解: $\because (z-3)(2-i)=5$,

$$\therefore z-3 = \frac{5}{2-i} = 2+i$$

$$\therefore z = 5+i,$$

$$\therefore \bar{z} = 5-i.$$

故选 D.

点评: 本题考查复数的基本概念与基本运算, 求得复数 z 是关键, 属于基础题.

2. (5分) (2013•山东) 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则集合 $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 ()
A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

考点: 集合中元素个数的最值.

专题: 计算题.

分析: 依题意, 可求得集合 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 从而可得答案.

解答: 解: $\because A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$,

\therefore 当 $x=0$, y 分别取 $0, 1, 2$ 时, $x-y$ 的值分别为 $0, -1, -2$;

当 $x=1$, y 分别取 $0, 1, 2$ 时, $x-y$ 的值分别为 $1, 0, -1$;

当 $x=2$, y 分别取 $0, 1, 2$ 时, $x-y$ 的值分别为 $2, 1, 0$;

$$\therefore B = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

\therefore 集合 $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 5 个.

故选 C.

点评: 本题考查集合中元素个数的最值, 理解题意是关键, 考查分析运算能力, 属于中档题.

3. (5分) (2013•山东) 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, 则 $f(-1) = ()$
A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

考点: 函数的值.

专题: 计算题; 函数的性质及应用.

分析: 利用奇函数的性质, $f(-1) = -f(1)$, 即可求得答案.

解答: 解: \because 函数 $f(x)$ 为奇函数, $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$,

$$\therefore f(-1) = -f(1) = -2,$$

故选A.

点评: 本题考查奇函数的性质, 考查函数的求值, 属于基础题.

4. (5分) (2013•山东) 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直, 体积为 $\frac{9}{4}$, 底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 若P为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心, 则PA与平面ABC所成角的大小为 ()

- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

考点: 直线与平面所成的角.

专题: 空间角.

分析: 利用三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直和线面角的定义可知, $\angle APA_1$ 为PA与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角, 即为 $\angle AP A_1$ 为PA与平面ABC所成角. 利用三棱锥的体积计算公式可得 AA_1 , 再利用正三角形的性质可得 A_1P , 在 $Rt\triangle AA_1P$

中, 利用 $\tan \angle APA_1 = \frac{AA_1}{A_1P}$ 即可得出.

解答: 解: 如图所示,

$\because AA_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$, $\therefore \angle APA_1$ 为PA与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角,

\because 平面ABC // 平面 $A_1B_1C_1$, $\therefore \angle APA_1$ 为PA与平面ABC所成角.

$$\because S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

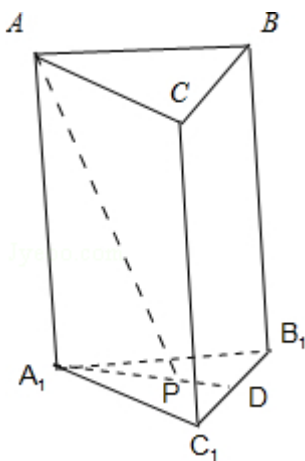
$$\therefore V_{\text{三棱柱}ABC - A_1B_1C_1} = AA_1 \times S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{3\sqrt{3}}{4} AA_1 = \frac{9}{4}, \text{ 解得 } AA_1 = \sqrt{3}.$$

又P为底面正三角形 $A_1B_1C_1$ 的中心, $\therefore A_1P = \frac{2}{3} A_1D = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 1$,

在 $Rt\triangle AA_1P$ 中, $\tan \angle AP A_1 = \frac{AA_1}{A_1P} = \sqrt{3}$,

$$\therefore \angle AP A_1 = \frac{\pi}{3}.$$

故选B.



点评: 熟练掌握三棱柱的性质、体积计算公式、正三角形的性质、线面角的定义是解题的关键.

5. (5分) (2013•山东) 函数 $y = \sin(2x + \phi)$ 的图象沿x轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后, 得到一个偶函数的图象, 则 ϕ 的一个可能的值为 ()

A. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. 0

D. $-\frac{\pi}{4}$

考点： 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换.

专题： 计算题；三角函数的图像与性质.

分析： 利用函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换可得函数 $y=\sin(2x+\phi)$ 的图象沿x轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后的解析式，利用其为偶函数即可求得答案.

解答： 解：令 $y=f(x)=\sin(2x+\phi)$,

$$\text{则 } f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\phi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\phi\right),$$

$$\because f\left(x+\frac{\pi}{8}\right) \text{ 为偶函数,}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4}+\phi=k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \phi=k\pi+\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \text{当 } k=0 \text{ 时, } \phi=\frac{\pi}{4}.$$

故 ϕ 的一个可能的值为 $\frac{\pi}{4}$.

故选B.

点评： 本题考查函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换，考查三角函数的奇偶性，属于中档题.

6. (5分) (2013•山东) 在平面直角坐标系 xOy 中， M 为不等式组 $\begin{cases} 2x-y-2 \geq 0 \\ x+2y-1 \geq 0 \\ 3x+y-8 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的区域上一动点，则直线 OM

斜率的最小值为 ()

A. 2

B. 1

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{2}$

考点： 简单线性规划.

专题： 不等式的解法及应用.

分析： 本题属于线性规划中的延伸题，对于可行域不要求线性目标函数的最值，而是求可行域内的点与原点 $(0, 0)$ 构成的直线的斜率的最小值即可.

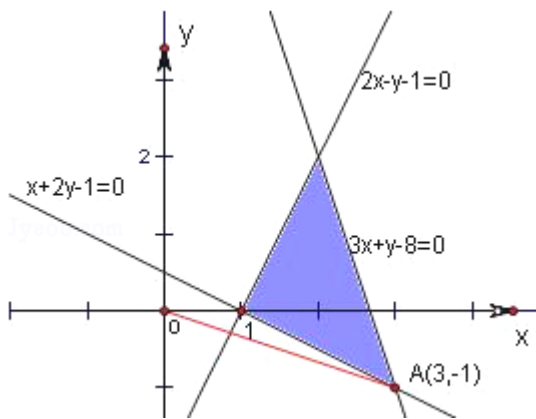
解答： 解：不等式组 $\begin{cases} 2x-y-2 \geq 0 \\ x+2y-1 \geq 0 \\ 3x+y-8 \leq 0 \end{cases}$ 表示的区域如图，

当 M 取得点 $A(3, -1)$ 时，

直线 OM 斜率取得最小，最小值为

$$k=\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}.$$

故选C.



点评: 本题利用直线斜率的几何意义, 求可行域中的点与原点的斜率. 本题主要考查了用平面区域二元一次不等式组, 以及简单的转化思想和数形结合的思想, 属中档题.

7. (5分) (2013•山东) 给定两个命题 p , q . 若 $\neg p$ 是 q 的必要而不充分条件, 则 p 是 $\neg q$ 的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

考点: 必要条件、充分条件与充要条件的判断.

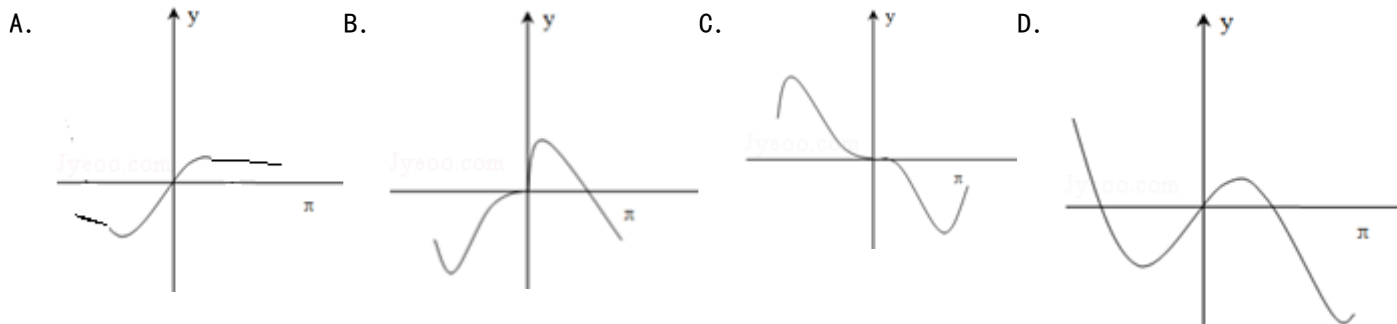
专题: 规律型.

分析: 根据互为逆否命题真假性相同, 可将已知转化为 q 是 $\neg p$ 的充分不必要条件, 进而根据逆否命题及充要条件的定义得到答案.

解答: 解: $\because \neg p$ 是 q 的必要而不充分条件,
 $\therefore q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件, 即 $q \Rightarrow \neg p$, 但 $\neg p$ 不能 $\Rightarrow q$,
 其逆否命题为 $p \Rightarrow \neg q$, 但 $\neg q$ 不能 $\Rightarrow p$,
 则 p 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.
 故选A.

点评: 本题考查的知识点是充要条件的判断, 其中将已知利用互为逆否命题真假性相同, 转化为 q 是 $\neg p$ 的充分不必要条件, 是解答的关键.

8. (5分) (2013•山东) 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 的图象大致为 ()



考点: 函数的图象.

专题: 函数的性质及应用.

分析: 给出的函数是奇函数, 奇函数图象关于原点中心对称, 由此排除B, 然后利用区特值排除A和C, 则答案可求.

解答: 解: 因为函数 $y=x\cos x+\sin x$ 为奇函数, 所以排除选项B,

$$\text{由当 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 时, } y=\frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0,$$

$$\text{当 } x=\pi \text{ 时, } y=\pi \times \cos \pi + \sin \pi = -\pi < 0.$$

由此可排除选项A和选项C.

故正确的选项为D.

故选D.

点评: 本题考查了函数的图象, 考查了函数的性质, 考查了函数的值, 是基础题.

9. (5分) (2013•山东) 过点(3, 1)作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线, 切点分别为A, B, 则直线AB的方程为()

- A. $2x+y-3=0$ B. $2x-y-3=0$ C. $4x-y-3=0$ D. $4x+y-3=0$

考点: 圆的切线方程; 直线的一般式方程.

专题: 计算题; 直线与圆.

分析: 由题意判断出切点(1, 1)代入选项排除B、D, 推出另一个切点判断切线斜率, 得到选项即可.

解答: 解: 因为过点(3, 1)作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线, 切点分别为A, B, 所以圆的一条切线方程为 $y=1$, 切点之一为(1, 1), 显然B、D选项不过(1, 1), B、D不满足题意; 另一个切点的坐标在(1, -1)的右侧, 所以切线的斜率为负, 选项C不满足, A满足. 故选A.

点评: 本题考查直线与圆的位置关系, 圆的切线方程求法, 可以直接解答, 本题的解答是间接法, 值得同学学习.

10. (5分) (2013•山东) 用0, 1, 2, ..., 9十个数字, 可以组成有重复数字的三位数的个数为()

- A. 243 B. 252 C. 261 D. 279

考点: 排列、组合及简单计数问题.

专题: 计算题.

分析: 求出所有三位数的个数, 减去没有重复数字的三位数个数即可.

解答: 解: 用0, 1, 2, ..., 9十个数字, 所有三位数个数为: 900, 其中没有重复数字的三位数百位数从非0的9个数字中选取一位, 十位数从余下的9个数字中选一个, 个位数再从余下的8个中选一个, 所以共有: $9 \times 9 \times 8 = 648$, 所以可以组成有重复数字的三位数的个数为: $900 - 648 = 252$. 故选B.

点评: 本题考查排列组合以及简单计数原理的应用, 利用间接法求解是解题的关键, 考查计算能力.

11. (5分) (2013•山东) 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{2p}x^2$ ($p > 0$) 的焦点与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限的点M. 若 C_1 在点M处的切线平行于 C_2 的一条渐近线, 则 $p =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

考点: 利用导数研究曲线上某点切线方程; 双曲线的简单性质.

专题: 压轴题; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

分析: 由曲线方程求出抛物线与双曲线的焦点坐标, 由两点式写出过两个焦点的直线方程, 求出函数

$y = \frac{1}{2p}x^2$ ($p > 0$) 在x取直线与抛物线交点M的横坐标时的导数值, 由其等于双曲线渐近线的斜率得到交点横坐标与p的关系, 把M点的坐标代入直线方程即可求得p的值.

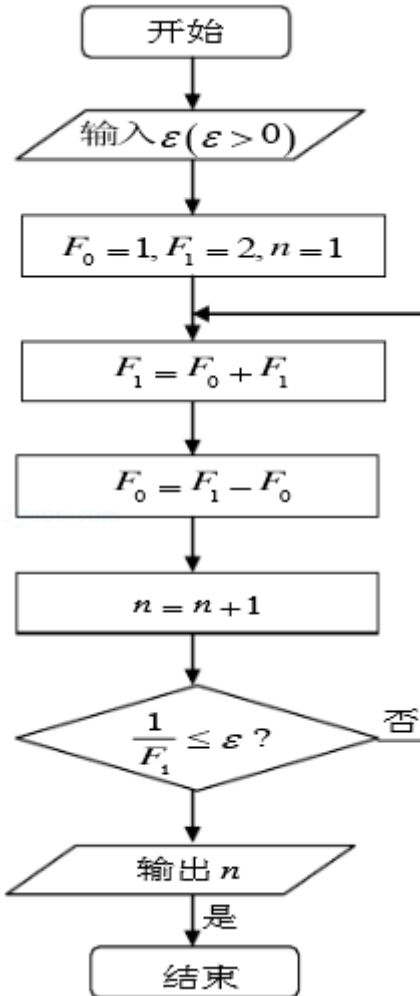
解答: 解: 由 $y = \frac{1}{2p}x^2$ ($p > 0$), 得 $x^2 = 2py$ ($p > 0$),

所以抛物线的焦点坐标为 $F(0, \frac{p}{2})$.

点评： 本题考查基本不等式，由 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时得到 $x=2y$ 是关键，考查配方法求最值，属于中档题.

二、填空题

13. (4分) (2013•山东) 执行右面的程序框图，若输入的 ε 值为0.25，则输出的 n 值为 3 .



考点： 程序框图.

专题： 图表型.

分析： 分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是计算并输出 n 的值.

解答： 解：循环前， $F_0=1, F_1=2, n=1,$

第一次循环， $F_0=1, F_1=3, n=2,$

第二次循环， $F_0=2, F_1=4, n=3,$

此时 $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{4} = 0.25$ ，满足条件 $\frac{1}{F_1} \leq 0.25$ ，退出循环，输出 $n=3$ ，

故答案为：3.

点评： 本题主要考查了直到循环结构，根据流程图（或伪代码）写程序的运行结果，是算法这一模块最重要的题型，属于基础题.

14. (4分) (2013•山东) 在区间 $[-3, 3]$ 上随机取一个数 x 使得 $|x+1| - |x-2| \geq 1$ 的概率为 $\frac{1}{3}$.

考点： 几何概型；绝对值不等式的解法.

专题： 不等式的解法及应用；概率与统计.

分析： 本题利用几何概型求概率。先解绝对值不等式，再利用解得的区间长度与区间 $[-3, 3]$ 的长度求比值即得。

解答： 解：利用几何概型，其测度为线段的长度。

$$\text{由不等式 } |x+1| - |x-2| \geq 1 \text{ 可得 } \textcircled{1} \begin{cases} x < -1 \\ (-x-1) - (2-x) \geq 1 \end{cases}, \text{ 或 } \textcircled{2} \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ (x+1) - (2-x) \geq 1 \end{cases},$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x \geq 2 \\ (x+1) - (x-2) \geq 1 \end{cases}.$$

解 $\textcircled{1}$ 可得 $x \in \emptyset$ ，解 $\textcircled{2}$ 可得 $1 \leq x < 2$ ，解 $\textcircled{3}$ 可得 $x \geq 2$ 。

故原不等式的解集为 $\{x | x \geq 1\}$ ，

$$\therefore \text{在区间 } [-3, 3] \text{ 上随机取一个数 } x \text{ 使得 } |x+1| - |x-2| \geq 1 \text{ 的概率为 } P = \frac{3-1}{3-(-3)} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}$$

点评： 本题主要考查了几何概型，简单地说，如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型。

15. (4分) (2013·山东) 已知向量 \vec{AB} 与 \vec{AC} 的夹角为 120° ，且 $|\vec{AB}|=3$ ， $|\vec{AC}|=2$ 。若 $\vec{AP}=\lambda\vec{AB}+\vec{AC}$ ，且 $\vec{AP} \perp \vec{BC}$ ，则实数 $\lambda = -\frac{7}{12}$ 。

考点： 数量积表示两个向量的夹角；向量的模。

专题： 计算题；压轴题；平面向量及应用。

分析： 利用 \vec{AB} ， \vec{AC} ，表示 \vec{BC} 向量，通过数量积为0，求出 λ 的值即可。

解答： 解：由题意可知： $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ ，

因为 $\vec{AP} \perp \vec{BC}$ ，

所以 $\vec{AP} \cdot \vec{BC} = 0$ ，

$$\text{所以 } \vec{AP} \cdot \vec{BC} = (\lambda \vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$= \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \lambda \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$= \lambda \times 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \lambda \times 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -12\lambda + 7 = 0$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{7}{12}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{12}.$$

点评： 本题考查向量的数量积的应用，向量的垂直，考查转化数学与计算能力。

16. (4分) (2013·山东) 定义“正数对”： $\ln^+x = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，现有四个命题：

- ①若 $a>0, b>0$, 则 $\ln^+(a^b) = b\ln^+a$;
 ②若 $a>0, b>0$, 则 $\ln^+(ab) = \ln^+a + \ln^+b$;
 ③若 $a>0, b>0$, 则 $\ln^+\left(\frac{a}{b}\right) \geq \ln^+a - \ln^+b$;
 ④若 $a>0, b>0$, 则 $\ln^+(a+b) \leq \ln^+a + \ln^+b + 2$.
 其中的真命题有 ①③④ (写出所有真命题的序号)

考点: 命题的真假判断与应用.

专题: 综合题; 压轴题; 新定义.

分析: 由题意, 根据所给的定义及对数的运算性质对四个命题进行判断, 由于在不同的定义域中函数的解析式不一样, 故需要对 a, b 分类讨论, 判断出每个命题的真假

解答: 解: 对于①, 由定义, 当 $a \geq 1$ 时, $a^b \geq 1$, 故 $\ln^+(a^b) = \ln(a^b) = b\ln a$, 又 $b\ln^+a = b\ln a$, 故有 $\ln^+(a^b) = b\ln^+a$;

当 $a < 1$ 时, $a^b < 1$, 故 $\ln^+(a^b) = 0$, 又 $a < 1$ 时 $b\ln^+a = 0$, 所以此时亦有 $\ln^+(a^b) = b\ln^+a$. 由上判断知①正确;

对于②, 此命题不成立, 可令 $a=2, b=\frac{1}{3}$, 则 $ab=\frac{2}{3}$, 由定义 $\ln^+(ab) = 0, \ln^+a + \ln^+b = \ln 2$, 所以 $\ln^+(ab) \neq \ln^+a + \ln^+b$; 由此知②错误;

对于③, 当 $a \geq b > 0$ 时, $\frac{a}{b} \geq 1$, 此时 $\ln^+\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$, 当 $a \geq b \geq 1$ 时, $\ln^+a - \ln^+b = \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, 此时命题成立; 当 $a > 1 > b$ 时, $\ln^+a - \ln^+b = \ln a$, 此时 $\frac{a}{b} > a$, 故命题成立; 同理可验证当 $1 > a$

$\geq b > 0$ 时, $\ln^+\left(\frac{a}{b}\right) \geq \ln^+a - \ln^+b$ 成立; 当 $\frac{a}{b} < 1$ 时, 同理可验证是正确的, 故③正确;

对于④, 可分 $a \leq 1, b \leq 1$ 与两者中仅有一个小于等于1、两者都大于1三类讨论, 依据定义判断出④是正确的

故答案为①③④

点评: 本题考查新定义及对数的运算性质, 理解定义所给的运算规则是解题的关键, 本题考查了分类讨论的思想, 逻辑判断的能力, 综合性较强, 探究性强. 易因为理解不清定义及忘记分类讨论的方法解题导致无法入手致错

三、解答题

17. (12分) (2013•山东) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 且 $a+c=6, b=2, \cos B = \frac{7}{9}$.

- (1) 求 a, c 的值;
 (2) 求 $\sin(A-B)$ 的值.

考点: 余弦定理; 同角三角函数间的基本关系; 两角和与差的正弦函数; 正弦定理.

专题: 解三角形.

分析: (1) 利用余弦定理列出关于 a, c 的方程, 将 b 与 $\cos B$ 的值代入, 利用完全平方公式变形, 求出 ac 的值, 与 $a+c$ 的值联立即可求出 a 与 c 的值即可;

(2) 先由 $\cos B$ 的值, 利用同角三角函数间的基本关系求出 $\sin B$ 的值, 再由 a, b 及 $\sin B$ 的值, 利用正弦定理求出 $\sin A$ 的值, 进而求出 $\cos A$ 的值, 所求式子利用两角和与差的正弦函数公式化简后, 将各自的值代入计算即可求出值.

解答: 解: (1) $\because a+c=6$ ①, $b=2, \cos B = \frac{7}{9}$,

$$\therefore \text{由余弦定理得: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 2ac - \frac{14}{9}ac = 36 - \frac{32}{9}ac = 4,$$

整理得： $ac=9$ ②，

联立①②解得： $a=c=3$ ；

(2) $\because \cos B = \frac{7}{9}$, B 为三角形的内角，

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\because b=2, a=3, \sin B = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\therefore \text{由正弦定理得: } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3 \times \frac{4\sqrt{2}}{9}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\because a=c$, 即 $A=C$, $\therefore A$ 为锐角，

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{1}{3},$$

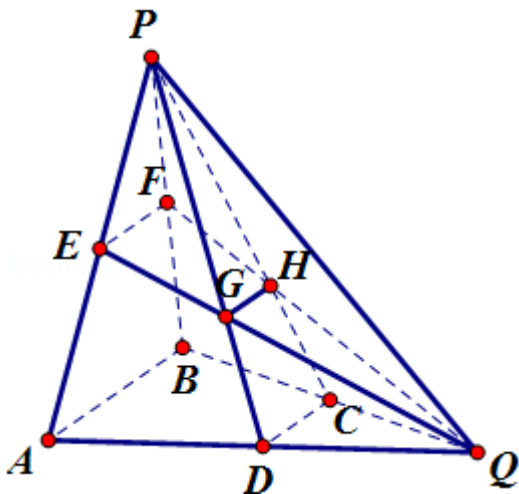
$$\text{则 } \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{7}{9} - \frac{1}{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{10\sqrt{2}}{27}.$$

点评： 此题考查了正弦、余弦定理，两角和与差的正弦函数公式，以及同角三角函数间的基本关系，熟练掌握定理及公式是解本题的关键。

18. (12分) (2013•山东) 如图所示，在三棱锥 $P-ABQ$ 中， $PB \perp$ 平面 ABQ ， $BA=BP=BQ$ ， D, C, E, F 分别是 AQ, BQ, AP, BP 的中点， $AQ=2BD$ ， PD 与 EQ 交于点 G ， PC 与 FQ 交于点 H ，连接 GH 。

(1) 求证： $AB \parallel GH$ ；

(2) 求二面角 $D-GH-E$ 的余弦值。



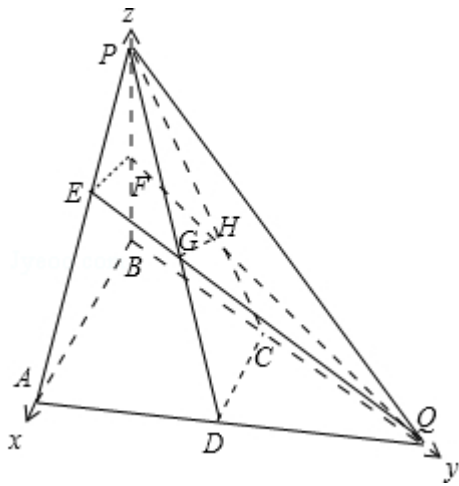
考点： 二面角的平面角及求法；直线与平面平行的性质。

专题： 空间位置关系与距离；空间角。

分析： (1) 由给出的 D, C, E, F 分别是 AQ, BQ, AP, BP 的中点，利用三角形中位线知识及平行公理得到 DC 平行于 EF ，再利用线面平行的判定和性质得到 DC 平行于 GH ，从而得到 $AB \parallel GH$ ；

(2) 由题意可知 BA, BQ, BP 两两相互垂直，以 B 为坐标原点建立空间直角坐标系，设出 BA, BQ, BP 的长度，标出点的坐标，求出一些向量的坐标，利用二面角的两个面的法向量所成的角的余弦值求解二面角 $D-GH-E$ 的余弦值。

解答： (1) 证明：如图，



$\because C, D$ 为 AQ, BQ 的中点, $\therefore CD \parallel AB$,
 又 E, F 分别 AP, BP 的中点, $\therefore EF \parallel AB$,
 则 $EF \parallel CD$. 又 $EF \subset$ 平面 EFQ , $\therefore CD \parallel$ 平面 EFQ .
 又 $CD \subset$ 平面 PCD , 且平面 $PCD \cap$ 平面 $EFQ = GH$, $\therefore CD \parallel GH$.
 又 $AB \parallel CD$, $\therefore AB \parallel GH$;

(2) 由 $AQ = 2BD$, D 为 AQ 的中点可得, 三角形 ABQ 为直角三角形,
 以 B 为坐标原点, 分别以 BA, BQ, BP 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,
 设 $AB = BP = BQ = 2$,

则 $D(1, 1, 0), C(0, 1, 0), E(1, 0, 1), F(0, 0, 1)$,

因为 H 为三角形 PBQ 的重心, 所以 $H(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

则 $\vec{DC} = (-1, 0, 0), \vec{CH} = (0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$\vec{EF} = (-1, 0, 0), \vec{FH} = (0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

设平面 GCD 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CH} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{取} z_1 = 1, \text{得} y_1 = 2.$$

所以 $\vec{m} = (0, 1, 2)$.

设平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{FH} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} -x_2 = 0 \\ \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取} z_2 = 2, \text{得} y_2 = 1.$$

所以 $\vec{n} = (0, 2, 1)$.

$$\text{所以} \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 2}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

则二面角 $D - GH - E$ 的余弦值等于 $-\frac{4}{5}$.

点评: 本题考查了直线与平面平行的性质, 考查了二面角的平面角及其求法, 考查了学生的空间想象能力和思维能力, 考查了计算能力, 解答此题的关键是正确求出H点的坐标, 是中档题.

19. (12分) (2013•山东) 甲乙两支排球队进行比赛, 先胜3局者获得比赛的胜利, 比赛随即结束. 除第五局甲队获胜的概率是 $\frac{1}{2}$, 其余每局比赛甲队获胜的概率都是 $\frac{2}{3}$. 设各局比赛结果相互独立.

(1) 分别求甲队3: 0, 3: 1, 3: 2胜利的概率;

(2) 若比赛结果3: 0或3: 1, 则胜利方得3分, 对方得0分; 若比赛结果为3: 2, 则胜利方得2分, 对方得1分, 求乙队得分X的分布列及数学期望.

考点: 离散型随机变量的期望与方差.

专题: 概率与统计.

分析: (1) 甲队获胜有三种情形, ①3: 0, ②3: 1, ③3: 2, 其每种情形的最后一局肯定是甲队胜, 分别求出相应的概率, 最后根据互斥事件的概率公式求出甲队获得这次比赛胜利的概率;

(2) X的取值可能为0, 1, 2, 3, 然后利用相互独立事件的概率乘法公式求出相应的概率, 列出分布列, 最后根据数学期望公式解之即可.

解答: 解: (1) 甲队获胜有三种情形, 其每种情形的最后一局肯定是甲队胜

$$\textcircled{1} 3: 0, \text{ 概率为 } P_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

$$\textcircled{2} 3: 1, \text{ 概率为 } P_2 = C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27};$$

$$\textcircled{3} 3: 2, \text{ 概率为 } P_3 = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{27}$$

$$\therefore \text{甲队 } 3: 0, 3: 1, 3: 2 \text{ 胜利的概率: } \frac{8}{27}, \frac{8}{27}, \frac{4}{27}.$$

(2) 乙队得分X, 则X的取值可能为0, 1, 2, 3.

$$\text{由 (1) 知 } P(X=0) = P_1 + P_2 = \frac{16}{27};$$

$$P(X=1) = P_3 = \frac{4}{27};$$

$$P(X=2) = C_4^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{27};$$

$$P(X=3) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 + C_3^1 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9};$$

则X的分布列为

X	3	2	1	0
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{27}$

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{4}{27} + 1 \times \frac{4}{27} + 0 \times \frac{16}{27} = \frac{7}{9}.$$

点评: 本题主要考查了相互独立事件的概率乘法公式, 以及离散型随机变量的期望与分布列, 同时考查了分类讨论的数学思想, 属于中档题.

20. (12分) (2013•山东) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n , 且 $S_4=4S_2$, $a_{2n}=2a_n+1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前n项和为 T_n 且 $T_n + \frac{a_n+1}{2^n} = \lambda$ (λ 为常数). 令 $c_n = b_{2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 求数列 $\{c_n\}$ 的前n项和 R_n .

考点： 等差数列的通项公式；数列的求和.

专题： 等差数列与等比数列.

分析： (1) 设出等差数列的首项和公差，由已知条件列关于首项和公差的方程组，解出首项和公差后可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 把 $\{a_n\}$ 的通项公式代入 $T_n + \frac{a_n+1}{2^n} = \lambda$ ，求出当 $n \geq 2$ 时的通项公式，然后由 $c_n = b_{2n}$ 得数列 $\{c_n\}$ 的通项公

式，最后利用错位相减法求其前 n 项和.

解答： 解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，由 $a_{2n} = 2a_n + 1$ ，取 $n=1$ ，得 $a_2 = 2a_1 + 1$ ，即 $a_1 - d + 1 = 0$ ①

再由 $S_4 = 4S_2$ ，得 $4a_1 + \frac{4 \times 3d}{2} = 4(a_1 + a_1 + d)$ ，即 $d = 2a_1$ ②

联立①、②得 $a_1 = 1$ ， $d = 2$.

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$ ；

(2) 把 $a_n = 2n - 1$ 代入 $T_n + \frac{a_n+1}{2^n} = \lambda$ ，得 $T_n + \frac{2n}{2^n} = \lambda$ ，则 $T_n = \lambda - \frac{2n}{2^n}$.

所以 $b_1 = T_1 = \lambda - 1$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $b_n = T_n - T_{n-1} = (\lambda - \frac{2n}{2^n}) - (\lambda - \frac{2(n-1)}{2^{n-1}}) = \frac{n-2}{2^{n-1}}$.

所以 $b_n = \frac{n-2}{2^{n-1}}$ ， $c_n = b_{2n} = \frac{2n-2}{2^{2n-1}} = \frac{n-1}{4^{n-1}}$.

$R_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0 + \frac{1}{4^1} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{n-1}{4^{n-1}}$ ③

$\frac{1}{4}R_n = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{n-1}{4^n}$ ④

③ - ④ 得： $\frac{3}{4}R_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{n-1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4^{n-1}})}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{n-1}{4^n}$

所以 $R_n = \frac{4}{9} (1 - \frac{3n+1}{4^n})$ ；

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $R_n = \frac{4}{9} (1 - \frac{3n+1}{4^n})$.

点评： 本题考查了等差数列的通项公式，考查了数列的求和，训练了错位相减法，考查了学生的计算能力，属中档题.

21. (13分) (2013·山东) 设函数 $f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + c$ ($e = 2.71828 \dots$, $c \in \mathbb{R}$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间及最大值；

(2) 讨论关于 x 的方程 $|\ln x| = f(x)$ 根的个数.

考点： 利用导数研究函数的单调性；根的存在性及根的个数判断.

专题： 压轴题；导数的综合应用.

分析: (1) 利用导数的运算法则求出 $f'(x)$, 分别解出 $f'(x) > 0$ 与 $f'(x) < 0$ 即可得出单调区间及极值与最值;

(2) 分类讨论: ①当 $0 < x \leq 1$ 时, 令 $u(x) = -\ln x - \frac{x}{e^{2x}} - c$, ②当 $x \geq 1$ 时, 令 $v(x) = \ln x - \frac{x}{e^{2x}} - c$. 利用导数分别求出 c 的取值范围, 即可得出结论.

解答:

解: (1) $\because f'(x) = \frac{e^{2x} - x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{1-2x}{e^{2x}}$, 解 $f'(x) > 0$, 得 $x < \frac{1}{2}$; 解 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{2}$.

\therefore 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \frac{1}{2})$; 单调递减区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

故 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 取得最大值, 且 $f(x)_{\max} = -\frac{1}{2e} + c$.

(2) 函数 $y = |\ln x|$, 当 $x > 0$ 时的值域为 $[0, +\infty)$. 如图所示:

①当 $0 < x \leq 1$ 时, 令 $u(x) = -\ln x - \frac{x}{e^{2x}} - c$,

$$c = -\ln x - \frac{x}{e^{2x}} = g(x),$$

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1-2x}{e^{2x}} = -\frac{e^{2x} + x - 2x^2}{xe^{2x}}.$$

令 $h(x) = e^{2x} + x - 2x^2$, 则 $h'(x) = 2e^{2x} + 1 - 4x > 0$, $\therefore h(x)$ 在 $x \in (0, 1]$ 单调递增,

$$\therefore 1 = h(0) < h(x) \leq h(1) = e^2 - 1.$$

$\therefore g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $x \in (0, 1]$ 单调递减.

$$\therefore c \geq g(1) = -\frac{1}{e^2}.$$

②当 $x \geq 1$ 时, 令 $v(x) = \ln x - \frac{x}{e^{2x}} - c$, 得到 $c = \ln x - \frac{x}{e^{2x}} = m(x)$,

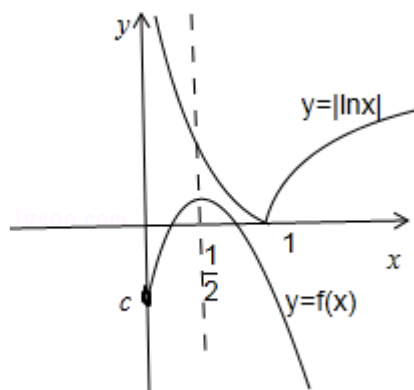
$$\text{则 } m'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1-2x}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} + x(2x-1)}{xe^{2x}} > 0,$$

故 $m(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore c \geq m(1) = -\frac{1}{e^2}$.

综上①②可知: 当 $c < -\frac{1}{e^2}$ 时, 方程 $|\ln x| = f(x)$ 无实数根;

当 $c = -\frac{1}{e^2}$ 时, 方程 $|\ln x| = f(x)$ 有一个实数根;

当 $c > -\frac{1}{e^2}$ 时, 方程 $|\ln x| = f(x)$ 有两个实数根.



点评： 本题综合考查了利用导数研究函数的单调性、极值最值、数形结合的思想方法、分类讨论的思想方法等基础知识与基本技能，考查了推理能力和计算能力及其化归思想方法。

22. (13分) (2013·山东) 椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点分别是 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过 F_1 且垂直

于x轴的直线被椭圆C截得的线段长为1.

(1) 求椭圆C的方程;

(2) 点P是椭圆C上除长轴端点外的任一点, 连接 PF_1, PF_2 , 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线PM交C的长轴于点M($m, 0$), 求m的取值范围;

(3) 在(2)的条件下, 过点P作斜率为k的直线l, 使得l与椭圆C有且只有一个公共点, 设直线 PF_1, PF_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k \neq 0$, 试证明 $\frac{1}{kk_1} + \frac{1}{kk_2}$ 为定值, 并求出这个定值.

考点： 直线与圆锥曲线的关系; 直线的斜率; 椭圆的标准方程; 椭圆的简单性质.

专题： 压轴题; 圆锥曲线的定义、性质与方程.

分析：
 (1) 把 $-c$ 代入椭圆方程得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 由已知过 F_1 且垂直于x轴的直线被椭圆C截得的线段长为1, 可得 $\frac{2b^2}{a} = 1$. 再利用 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 及 $a^2 = b^2 + c^2$ 即可得出;

(2) 设 $|PF_1| = t, |PF_2| = n$, 由角平分线的性质可得 $\frac{t}{n} = \frac{|MF_1|}{|F_2M|} = \frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - m}$, 利用椭圆的定义可得 $t + n = 2a = 4$,

消去t得到 $\frac{4 - n}{n} = \frac{\sqrt{3} + m}{\sqrt{3} - m}$, 化为 $n = \frac{2(\sqrt{3} - m)}{\sqrt{3}}$, 再根据 $a - c < n < a + c$, 即可得到m的取值范围;

(3) 设P(x_0, y_0), 不妨设 $y_0 > 0$, 由椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 取 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, 利用导数即可得到切线的斜率, 再利用斜率计算公式即可得到 k_1, k_2 , 代入即可证明结论.

解答：
 解: (1) 把 $-c$ 代入椭圆方程得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$,

\therefore 过 F_1 且垂直于x轴的直线被椭圆C截得的线段长为1, $\therefore \frac{2b^2}{a} = 1$.

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 联立得 } \begin{cases} \frac{2b^2}{a} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases},$$

\therefore 椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 如图所示, 设 $|PF_1| = t, |PF_2| = n$,

由角平分线的性质可得 $\frac{t}{n} = \frac{|MF_1|}{|F_2M|} = \frac{m + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - m}$,

又 $t+n=2a=4$, 消去 t 得到 $\frac{4-n}{n} = \frac{\sqrt{3}+m}{\sqrt{3}-m}$, 化为 $n = \frac{2(\sqrt{3}-m)}{\sqrt{3}}$,

$\therefore a-c < n < a+c$, 即 $2-\sqrt{3} < n < 2+\sqrt{3}$, 也即 $2-\sqrt{3} < \frac{2(\sqrt{3}-m)}{\sqrt{3}} < 2+\sqrt{3}$, 解得 $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.

$\therefore m$ 的取值范围: $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

(3) 证明: 设 $P(x_0, y_0)$,

不妨设 $y_0 > 0$, 由椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

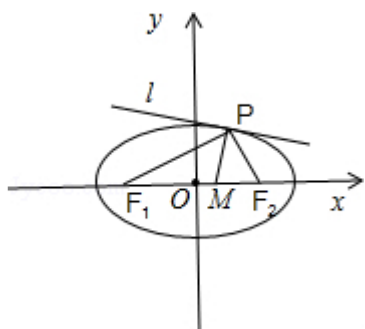
$$\text{取 } y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \text{ 则 } y' = \frac{-\frac{2x}{4}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = -\frac{x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}},$$

$$\therefore k = k_1 = -\frac{x_0}{4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}} = -\frac{x_0}{4y_0}.$$

$$\therefore k_1 = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{3}}, \quad k_2 = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{3}},$$

$$\therefore \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2x_0}{y_0},$$

$$\therefore \frac{1}{kk_1} + \frac{1}{kk_2} = -\frac{4y_0}{x_0} \times \frac{2x_0}{y_0} = -8 \text{ 为定值.}$$



点评: 本题综合考查了椭圆的定义、标准方程及其性质、角平分线的性质、利用导数的几何意义研究切线、斜率计算公式等基础知识, 考查了推理能力、分类讨论的思想方法、计算能力、分析问题和解决问题的能力.