

1997 年湖南高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 2 页. 第 II 卷 3 至 8 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题共 65 分)

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案, 不能答在试题卷上.
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回.

一、选择题: 本大题共 15 小题; 第(1)一(10)题每小题 4 分, 第(11)一(15)题每小题 5 分, 共 65 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

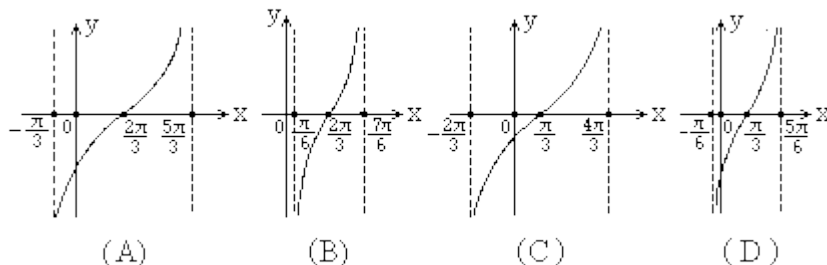
(1) 设集合 $M = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N =$ ()

- (A) $\{x | 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x | 0 \leq x < 2\}$
 (C) $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

(2) 如果直线 $ax + 2y + 2 = 0$ 与直线 $3x - y - 2 = 0$ 平行, 那么系数 $a =$ ()

- (A) -3 (B) -6 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

(3) 函数 $y = \text{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$ 在一个周期内的图像是 ()



(4) 已知三棱锥 $D-ABC$ 的三个侧面与底面全等, 且 $AB=AC=\sqrt{3}$, $BC=2$, 则以 BC 为棱, 以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是 ()

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

(5) 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) + \sin 2x$ 的最小正周期是 ()

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

(6) 满足 $\operatorname{tg} a \geq \operatorname{ctg} a$ 的角 a 的一个取值区间是 ()

- (A) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

(7) 设函数 $y = f(x)$ 定义在实数集上, 则函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$ 的图像关于 ()

- (A) 直线 $y=0$ 对称 (B) 直线 $x=0$ 对称
(C) 直线 $y=1$ 对称 (D) 直线 $x=1$ 对称

(8) 长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3, 4, 5 且它的八个顶点都在同一个球面上, 这个球的表面积是 ()

- (A) $20\sqrt{2}\pi$ (B) $25\sqrt{2}\pi$ (C) 50π (D) 200π

(9) 如果直线 l 将圆: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 平分, 且不通过第四象限, 那么 l 的斜率的取值范围是 ()

- (A) $[0, 2]$ (B) $[0, 1]$ (C) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (D) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

(10) 函数 $y = \cos^2 x - 3\cos x + 2$ 的最小值为 ()

- (A) 2 (B) 0 (C) $-\frac{1}{4}$ (D) 6

(11) 椭圆 C 与椭圆 $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称, 椭圆 C 的方程是 ()

- (A) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ (B) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

- (C) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$ (D) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

(12) 圆台上、下底面积分别为 π 、 4π , 侧面积为 6π , 这个圆台的体积是 ()

- (A) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ (B) $2\sqrt{3}\pi$ (C) $\frac{7\sqrt{3}\pi}{6}$ (D) $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

(13) 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数; 偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 的

图像与 $f(x)$ 的图像重合. 设 $a > b > 0$, 给出下列不等式 ()

① $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$; ② $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$;

③ $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$; ④ $f(a) - f(-b) < g(b) - g(-a)$.

- (A) ①与④ (B) ②与③ (C) ①与③ (D) ②与④

(14) 不等式组 $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{3-x}{3+x} > \left| \frac{2-x}{2+x} \right| \end{cases}$ 的解集是 ()

(A) $\{x | 0 < x < 2\}$ (B) $\{x | 0 < x < 2.5\}$

(C) $\{x | 0 < x < \sqrt{6}\}$ (D) $\{x | 0 < x < 3\}$

(15) 四面体的一个顶点为 A , 从其它顶点与各棱的中点中取 3 个点, 使它们和点 A 在同一平面上, 不同的取法有 ()

- (A) 30 种 (B) 33 种 (C) 36 种 (D) 39 种

第 II 卷 (非选择题 共 85 分)

注意事项:

- 第 II 卷共 6 页, 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.
- 答卷前将密封线内的项目填写清楚.

二、填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

(16) 已知 $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\frac{9}{4}$, 常数 a 的值为_____.

(17) 已知直线 $x - y = 2$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 那么线段的中点坐标是_____.

(18) $\frac{\sin 7^\circ + \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \sin 8^\circ}$ 的值为_____.

(19) 已知 m, l 是直线, α, β 是平面, 给出下列命题:

- ①若 l 垂直于 α 内的两条相交直线, 则 $l \perp \alpha$;
- ②若 l 平行于 α , 则 l 平行于 α 内的所有直线;
- ③若 $m \subset \alpha, l \subset \beta$, 且 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- ④若 $l \subset \beta$, 且 $l \perp \alpha$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- ⑤若 $m \subset \alpha, l \subset \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel l$.

其中正确的命题的序号是_____。(注：把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题：本大题共 6 小题；共 69 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(20) (本小题满分 10 分)

已知复数 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. 求复数 $z\omega + z\omega^3$ 的模及辐角主值.

(21) (本小题满分 11 分)

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和. 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1. 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

(22) (本小题满分 12 分)

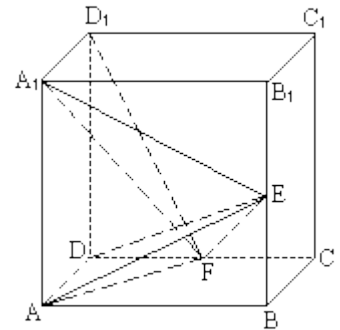
甲、乙两地相距 s 千米, 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 速度不得超过 c 千米/时. 已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度 v (千米/时)的平方成正比, 且比例系数为 b ; 固定部分为 a 元.

- (I) 把全程运输成本 y (元) 表示为速度 v (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;
- (II) 为了使全程运输成本最小, 汽车应以多大速度行驶?

(23) (本小题满分 12 分)

如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, CD 的中点.

- (I) 证明 $AD \perp D_1F$;
- (II) 求 AE 与 D_1F 所成的角;
- (III) 证明面 $AED \perp$ 面 A_1FD_1 ;
- (IV) 设 $AA_1=2$, 求三棱锥 $E-AA_1F$ 的体积 V_{E-AA_1F} .



(24) (本小题满分 12 分)

已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8x$ 的图像交于 A, B 两点, 分别过点 A, B 作 y 轴的平行线与函数的 $y=\log_2x$ 的图像交于 C, D 两点.

- (I) 证明点 C, D 和原点 O 在同一条直线上;
- (II) 当 BC 平行于 x 轴时, 求点 A 的坐标.

(25) (本小题满分 12 分)

已知圆满足: ①截 y 轴所得弦长为 2; ②被 x 轴分成两段圆弧, 其弧长的比为 3: 1; ③

圆心到直线 $l: x-2y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 求该圆的方程.

1997年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(文史类)参考解答及评分标准

说明:

一. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力, 并给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

三. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 第(1)一(10)题每小题4分, 第(11)一(15)题每小题5分. 满分65分.

(1)B (2)B (3)A (4)C (5)B (6)C (7)D (8)C (9)A (10)B (11)A (12)D
(13)C (14)C (15)B

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分, 满分16分.

(16)4 (17) (4, 2) (18) $2 - \sqrt{3}$ (19) ①, ④

注: 第(19)题多填、漏填和错填均给0分.

三、解答题

(20) 本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算等基础知识, 考查利用三角公式进行变形的技能和运算能力. 满分10分.

解法一: 将已知复数化为复数三角形式:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3},$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

依题意有 $z\omega + z\omega^3$

$$\begin{aligned} &= \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right) + \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}\right) \\ &= \left(\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{13\pi}{12}\right) + i \left(\sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{13\pi}{12}\right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

故复数 $z\omega + z\omega^3$ 的模为 $\sqrt{2}$ ，辐角主值为 $\frac{5\pi}{6}$ 。

解法二： $z\omega + z\omega^3$

$$\begin{aligned} &= z\omega(1 + \omega^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) (1+i) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

(21) 本小题主要考查等差数列、等比数列、方程组等基础知识，考查运算能力。满分 11 分。

解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a$ ，公差为 d ，则通项为

$$a_n = a + (n-1)d,$$

前 n 项和为

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d,$$

依题意有

$$\begin{cases} \frac{1}{3}S_3 \cdot \frac{1}{4}S_4 = \left(\frac{1}{5}S_5\right)^2 \\ \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{4}S_4 = 2 \end{cases}$$

其中 $S_5 \neq 0$ 。

由此可得

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\left(3a + \frac{3 \times 2}{2}d\right) \times \frac{1}{4}\left(4a + \frac{4 \times 3}{2}d\right) = \frac{1}{25}\left(5a + \frac{5 \times 4}{2}d\right)^2 \\ \frac{1}{3}\left(3a + \frac{3 \times 2}{2}d\right) + \frac{1}{4}\left(4a + \frac{4 \times 3}{2}d\right) = 2 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 3ad + 5d^2 = 0 \\ 2a + \frac{5}{2}d = 2 \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} d = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} d = -\frac{12}{5} \\ a = 4 \end{cases}$$

由此得

$$a_n = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{或 } a_n &= 4 - \frac{12}{5}(n-1) \\ &= \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n. \end{aligned}$$

经验证知时 $a_n = 1$, $S_5 = 5$, 或 $a_n = \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n$ 时, $S_5 = -4$, 均适合题意.

故所求等差数列的通项为 $a_n = 1$, 或 $a_n = \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n$.

(22) 本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识, 考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力. 满分 12 分.

解: (1) 依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{S}{v}$, 全程运输成本为

$$y = a \cdot \frac{S}{v} + bv^2 \cdot \frac{S}{v} = S\left(\frac{a}{v} + bv\right)$$

故所求函数及其定义域为

$$y = S\left(\frac{a}{v} + bv\right), \quad v \in (0, c]$$

(II) 依题意知 S 、 a 、 b 、 v 都为正数, 故有

$$S\left(\frac{a}{v} + bv\right) \geq 2S\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\frac{a}{v} = bv$, 即 $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 时上式中等号成立.

若 $\sqrt{\frac{a}{b}} \leq c$, 则当 $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 时, 全程运输成本 y 最小.

若 $\sqrt{\frac{a}{b}} > c$, 当 $x \in (0, c]$ 时, 有

$$S\left(\frac{a}{v} + bv\right) - S\left(\frac{a}{c} + bc\right) = S\left[\left(\frac{a}{v} - \frac{a}{c}\right) + (bv - bc)\right] = \frac{S}{vc} (c - v)(a - bcv).$$

因为 $c - v \geq 0$, 且 $a > bcv$, 故有

$$a - bcv \geq a - bc^2 > 0,$$

所以 $S\left(\frac{a}{v} + bv\right) \geq S\left(\frac{a}{c} + bc\right)$, 且仅当 $v = c$ 时等号成立.

也即当 $v = c$ 时, 全程运输成本 y 最小.

综上知, 为使全程运输成本 y 最小, 当 $\frac{\sqrt{ab}}{b} \leq c$ 时行驶速度应为 $v = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; 当

$\frac{\sqrt{ab}}{b} > c$ 时行驶速度应为.

(23) 本小题主要考查直线与直线, 直线与平面, 平面与平面的位置关系, 考查逻辑推理和空间想象能力. 满分 12 分.

解: (I) $\because AC_1$ 是正方体,

$\therefore AD \perp \text{面 } DC_1$.

又 $D_1F \subset \text{面 } DC_1$,

$\therefore AD \perp D_1F$.

(II) 取 AB 中点 G , 连结 A_1G, FG .

因为 F 是 CD 的中点, 所以 GF, AD 平行且相等, 又 A_1D_1, AD 平行且相等, 所以 GF, A_1D_1 平行且相等, 故 GFD_1A_1 是平行四边形,

$A_1G \parallel D_1F$.

设 A_1G 与 AE 相交于点 H , $\angle AHA_1$ 是 AE 与 D_1F 所成的角.

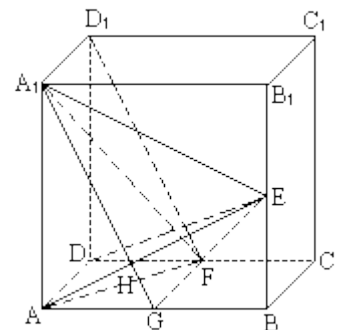
因为 E 是 BB_1 的中点, 所以

$\text{Rt} \triangle A_1AG \cong \text{Rt} \triangle ABE$, $\angle GA_1A = \angle GAH$,

从而 $\angle AHA_1 = 90^\circ$,

也即直线 AE 与 D_1F 所成的角为直角.

(III) 由 (I) 知 $AD \perp D_1F$, 由 (II) 知 $AE \perp D_1F$, 又 $AD \cap AE = A$,



所以 $D_1F \perp$ 面 AED .

又因为 $D_1F \subset$ 面 A_1FD_1 , 所以面 $AED \perp$ 面 A_1FD_1 .

$$(IV) \because \text{体积 } V_{E-AA_1F} = V_{F-AA_1E},$$

又 $FG \perp$ 面 ABB_1A_1 , 三棱锥 $F-AA_1E$ 的高 $FG=AA_1=2$,

$$\text{面积 } S_{\Delta AA_1E} = \frac{1}{2} S_{\square ABB_1A_1} = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2.$$

$$\therefore V_{E-AA_1F} = \frac{1}{3} \times S_{\Delta AA_1E} \times FG = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$$

(24) 本小题主要考查对数函数图像、对数换底公式、对数方程、指数方程等基础知识, 考查运算能力和分析问题的能力, 满分 12 分.

解: (I) 设点 A 、 B 的横坐标分别为 x_1 、 x_2 由题设知, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$. 则点 A 、 B 纵坐标分别为 $\log_8 x_1$ 、 $\log_8 x_2$.

$$\text{因为 } A、B \text{ 在过点 } O \text{ 的直线上, 所以, } \frac{\log_8 x_1}{x_1} = \frac{\log_8 x_2}{x_2}$$

点 C 、 D 坐标分别为 $(x_1, \log_2 x_1)$, $(x_2, \log_2 x_2)$.

$$\text{由于 } \log_2 x_1 = \frac{\log_8 x_2}{\log_8 2} = 3 \log_8 x_1,$$

$$\log_2 x_2 = \frac{\log_8 x_2}{\log_8 2} = 3 \log_8 x_2$$

$$OC \text{ 的斜率 } k_1 = \frac{\log_2 x_1}{x_1} = \frac{3 \log_8 x_1}{x_1},$$

$$OD \text{ 的斜率 } k_2 = \frac{\log_2 x_2}{x_2} = \frac{3 \log_8 x_2}{x_2}.$$

由此可知, $k_1 = k_2$,

即 O 、 C 、 D 在同一条直线上.

(II) 由于 BC 平行于 x 轴知

$$\log_2 x_1 = \log_8 x_2,$$

$$\text{即得 } \log_2 x_1 = \frac{1}{3} \log_2 x_2,$$

$$\therefore x_2 = x_1^3.$$

代入 $x_2 \log_8 x_1 = x_1 \log_8 x_2$ 得

$$x_1^3 \log_8 x_1 = 3x_1 \log_8 x_1.$$

由于 $x_1 > 1$ 知 $\log_8 x_1 \neq 0$,

$$\therefore x_1^3 = 3x_1.$$

考虑 $x_1 > 1$ 解得 $x_1 = \sqrt{3}$.

于是点 A 的坐标为 $(\sqrt{3}, \log_8 \sqrt{3})$.

(25) 本小题主要考查轨迹的思想, 考查综合运用知识建立曲线方程的能力. 满分 12 分.

解: 设圆 P 的圆心为 $P(a, b)$, 半径为 r , 则点 P 到 x 轴, y 轴的距离分别为 $|b|$,

$|a|$. 由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90° , 知圆 P 截 x 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$. 故

$$r^2 = 2b^2$$

又圆 P 被 y 轴所截得的弦长为 2, 所以有

$$r^2 = a^2 + 1.$$

从而得 $2b^2 - a^2 = 1$.

又因为 $P(a, b)$ 到直线 $x - 2y = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $d = \frac{|a - 2b| \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2b| \sqrt{5}}{5}$,

即有 $a - 2b = \pm 1$,

由此有

$$\begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1 \\ a - 2b = -1 \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

于是 $r^2 = 2b^2 = 2$,

所求圆的方程是

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2, \text{ 或 } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$