

2015 年高考天津市理科数学真题

一、选择题

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$ ，集合 $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ ，则集合 $A \cap C_U B =$ ()

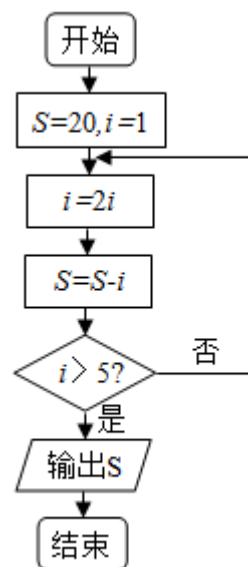
- A. $\{2, 5\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{2, 5, 6\}$ D. $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2 \geq 0. \\ x-y+3 \geq 0. \\ 2x+y-3 \leq 0. \end{cases}$ 则目标函数 $z = x+6y$ 的最大值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 18 D. 40

3. 阅读下边的程序框图，运行相应的程序，则输出 S 的值为 ()

- A. -10 B. 6 C. 14 D. 18

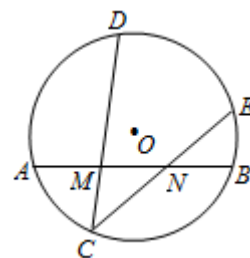


4. 设 $x \in R$ ，则 “ $|x-2| < 1$ ” 是 “ $x^2 + x - 2 > 0$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 如图，在圆 O 中， M, N 是弦 AB 的三等分点，弦 CD, CE 分别经过点 M, N ，若 $CM = 2, MD = 4, CN = 3$ ，则线段 NE 的长为 ()

- A. $\frac{8}{3}$ B. 3 C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{5}{2}$



6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$ ，且双曲线的一个焦点在抛物线

$y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线上，则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$ B. $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

7. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数，记 $a = f(\log_{0.5} 3)$ ， $b = f(\log_2 5)$ ，

$c = f(2m)$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 函数 $g(x) = b - f(2-x)$, 其中 $b \in R$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有

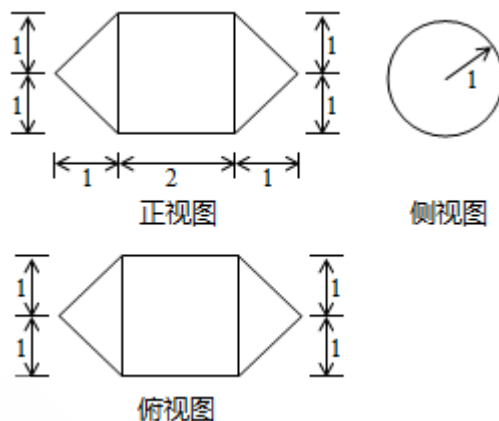
4 个零点, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{7}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{7}{4})$ C. $(0, \frac{7}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, 2)$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____ m^3 .



11. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的封闭图形的面积为_____.

12. 在 $(x - \frac{1}{4x})^6$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4}$, 则 a 的值为_____.

14. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel DC, AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$. 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overline{BE} = \lambda \overline{BC}, \overline{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overline{DC}$, 则 $\overline{AE} \cdot \overline{AF}$ 的最小值为_____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \sin^2(x - \frac{\pi}{6})$, $x \in R$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 内的最大值和最小值.

16. 为推动乒乓球运动的发展，某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加。现有来自甲协会的运动员 3 名，其中种子选手 2 名；乙协会的运动员 5 名，其中种子选手 3 名。从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛。

(I) 设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手，且这 2 名种子选手来自同一个协会”，求事件 A 发生的概率；

(II) 设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。

17. 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面

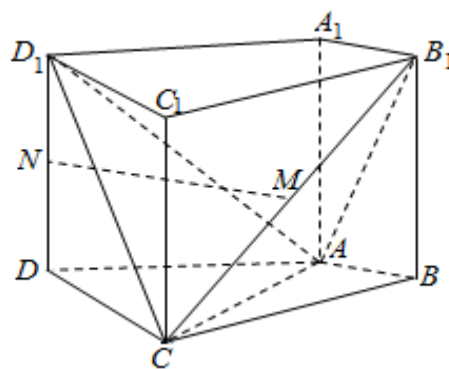
$ABCD$ ， $AB \perp AC$ ， $AB=1$ ， $AC=AA_1=2$ ， $AD=CD=\sqrt{5}$ ，

且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点。

(I) 求证： $MN \parallel$ 平面 $ABCD$ ；

(II) 求二面角 D_1-AC-B_1 的正弦值；

(III) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点。若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ ，求线段 A_1E 的长。



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ (q 为实数，且 $q \neq 1$)， $n \in N^*$ ， $a_1=1$ ， $a_2=2$ ，且 a_2+a_1 ， a_3+a_4 ， a_4+a_5 成等差数列。

(I) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$ ， $n \in N^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 M 在椭圆上且位于第一象限,

直线 FM 被圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c , $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(I) 求直线 FM 的斜率;

(II) 求椭圆的方程;

(III) 设动点 P 在椭圆上, 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围。

20. 已知函数 $f(x) = nx - x^n, x \in R$, 其中 $n \in N^*$, 且 $n \geq 2$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$,

求证: 对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$;

(III) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2 , 求证: $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$.