

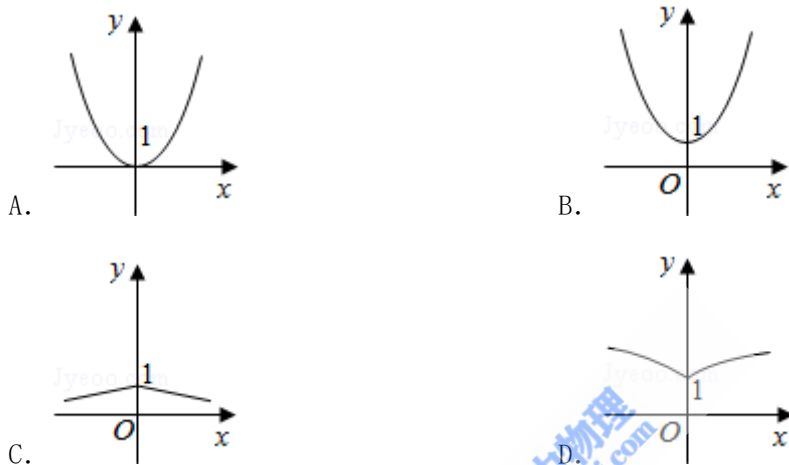
1998 年天津高考理科数学真题及答案

一、选择题（共 15 小题，每小题 4 分，满分 60 分）

1. (4 分) $\sin 330^\circ$ 等于 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (4 分) 函数 $y=a^{|x|}$ ($a>1$) 的图象是 ()



3. (4 分) 曲线的极坐标方程 $\rho = 4\cos \theta$ 化为直角坐标方程为 ()

- A. $(x+2)^2 + y^2 = 4$ B. $(x-2)^2 + y^2 = 4$
 C. $(x+4)^2 + y^2 = 16$ D. $(x-4)^2 + y^2 = 16$

4. (4 分) 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是 ()

- A. $A_1A_2+B_1B_2=0$ B. $A_1A_2 - B_1B_2=0$
 C. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = -1$ D. $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = 1$

5. (4 分) 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()

- A. x ($x \neq 0$) B. $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) C. $-x$ ($x \neq 0$) D. $-\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

6. (4 分) 若点 $P(\sin \alpha - \cos \alpha, \tan \alpha)$ 在第一象限, 则在 $[0, 2\pi)$ 内 α 的取值范围是

()

- A. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ * B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$

C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

D. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

7. (4分) 已知圆锥的全面积是底面积的3倍, 那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 ()

- A. 120° B. 150° C. 180° D. 240°

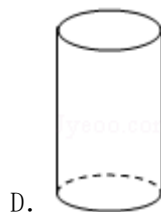
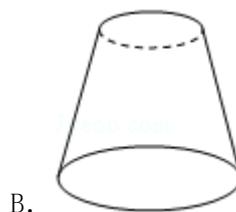
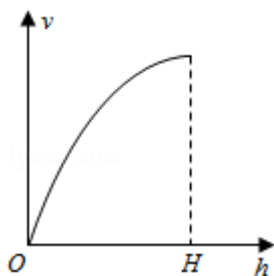
8. (4分) 复数 $-i$ 的一个立方根是 i , 它的另外两个立方根是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ C. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

9. (4分) 如果棱台的两底面积分别是 S, S' , 中截面的面积是 S_0 , 那么 ()

- A. $\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$ B. $S_0 = \sqrt{S' S}$ C. $2S_0 = S + S'$
D. $S_0^2 = 2S' S$

10. (4分) 向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系如图, 那么水瓶的形状是图中的 ()



11. (4分) 3名医生和6名护士被分配到3所学校为学生体检, 每校分配1名医生和2名护士. 不同的分配方法共有 ()

- A. 90种 B. 180种 C. 270种 D. 540种

12. (4分) 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1 和 F_2 , 点 P 在椭圆上, 如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 ()

- A. 7 倍 B. 5 倍 C. 4 倍 D. 3 倍

13. (4分) 球面上有 3 个点, 其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$, 经过这 3 个点的小圆的周长为 4π , 那么这个球的半径为 ()

- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$

14. (4分) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 其最小内角是 ()

- A. $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ D. $\arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

15. (4分) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 1$, 且前 n 项和 S_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_1} = \frac{1}{a_1}$, 那么 a_1 的取值范围是 ()

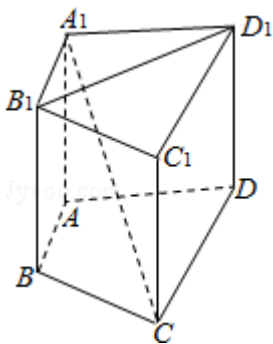
- A. $(1, +\infty)$ B. $(1, 4)$ C. $(1, 2)$ D. $(1, \sqrt{2})$

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

16. (5分) 已知圆 C 过双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的一个顶点和一个焦点, 且圆心在此双曲线上, 则圆心到双曲线中心的距离是_____.

17. (5分) $(x+2)^{10} (x^2 - 1)$ 的展开式中 x^0 的系数为_____ (用数字作答).

18. (5分) 如图, 在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$ 中, 当底面四边形 $ABCD$ 满足条件_____时, 有 $A_1C \perp B_1D_1$. (注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考虑所有可能的情形.)



19. (5分) 关于函数 $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 有下列命题:

①由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 可得 $x_1 - x_2$ 必是 π 的整数倍;

② $y = f(x)$ 的表达式可改写为 $y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

③ $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称;

④ $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是_____. (把你认为正确的命题序号都填上)

三、解答题 (共6小题, 满分70分)

20. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 设 $a+c=2b, A-C = \frac{\pi}{3}$. 求 $\sin B$

的值. 以下公式供解题时参考:

$$\sin \theta + \sin \phi = 2\sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

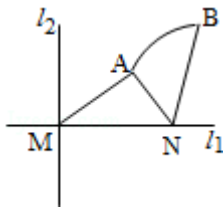
$$\sin \theta - \sin \phi = 2\cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta + \cos \phi = 2\cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta - \cos \phi = -2\sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}.$$

21. (12分) 如图, 直线 l_1 和 l_2 相交于点 $M, l_1 \perp l_2$, 点 $N \in l_1$. 以 A, B 为端点的曲线段 C

上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等. 若 $\triangle AMN$ 为锐角三角形, $|AM| = \sqrt{17}, |AN| = 3$, 且 $|BM| = 6$. 建立适当的坐标系, 求曲线段 C 的方程.



22. (12分) 如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱,

污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出。设箱体的长度为 a 米，高度为 b 米。已知流出的水中该杂质的质量分数与 a, b 的乘积 ab 成反比。现有制箱材料 60 平方米。问当 a, b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（ A, B 孔的面积忽略不计）。



23. (12 分) 已知如图，斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直， $\angle ABC = 90^\circ$

， $BC = 2$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ，且 $AA_1 \perp A_1C$ ， $AA_1 = A_1C$ 。

- (1) 求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小；
- (2) 求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小；
- (3) 求顶点 C 到侧面 A_1ABB_1 的距离。



24. (12 分) 设曲线 C 的方程是 $y = x^3 - x$ ，将 C 沿 x 轴、 y 轴正向分别平行移动 t, s 单位长度后得曲线 C_1 。

(1) 写出曲线 C_1 的方程；

(2) 证明曲线 C 与 C_1 关于点 $A\left(\frac{t}{2}, \frac{s}{2}\right)$ 对称；

(3) 如果曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点，证明 $s = \frac{t^3}{4} - t$ 且 $t \neq 0$ 。

25. (12 分) 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列， $b_1 = 1$ ， $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 145$ 。

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n ；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \log_a \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$ (其中 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$)，记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的

前 n 项和。试比较 S_n 与 $\frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论。

1998 年全国统一高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 15 小题，每小题 4 分，满分 60 分）

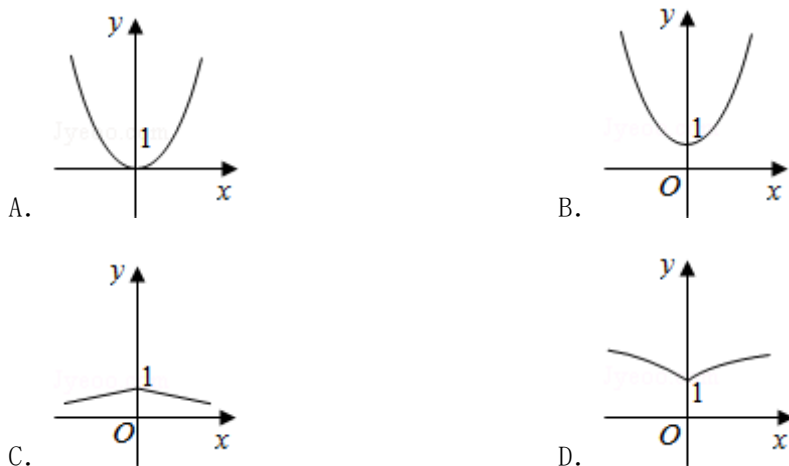
1. (4 分) $\sin 330^\circ$ 等于 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：∵ $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

故选：B.

2. (4 分) 函数 $y=a^{|x|}$ ($a>1$) 的图象是 ()



【解答】解：法一：由题设知 $y = \begin{cases} a^x, & x \geq 0 \\ (\frac{1}{a})^x, & x < 0 \end{cases}$,

又 $a>1$. 由指数函数图象易知答案为 B.

法二：因 $y=a^{|x|}$ 是偶函数，又 $a>1$.

所以 $a^{|x|} \geq 1$ ，排除 AC. 当 $x \geq 0$, $y=a^x$, 由指数函数图象知选 B.

故选：B.

3. (4 分) 曲线的极坐标方程 $\rho = 4\cos \theta$ 化为直角坐标方程为 ()

- A. $(x+2)^2 + y^2 = 4$ B. $(x-2)^2 + y^2 = 4$
 C. $(x+4)^2 + y^2 = 16$ D. $(x-4)^2 + y^2 = 16$

【解答】解：将原极坐标方程 $\rho = 4\cos \theta$ ，化为：

$$\rho^2 = 4\rho \cos \theta,$$

化成直角坐标方程为: $x^2 + y^2 - 4x = 0,$

$$\text{即 } y^2 + (x - 2)^2 = 4.$$

故选: B.

4. (4分) 两条直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 垂直的充要条件是 ()

A. $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

B. $A_1A_2 - B_1B_2 = 0$

C. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = -1$

D. $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = 1$

【解答】解: 直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 的方向向量为 $(-B_1, A_1)$, 直线 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的方向向量为 $(-B_2, A_2)$,

两条直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 垂直, 就是两条直线的方向向量的数量积为 0,

即: $(-B_1, A_1) \cdot (-B_2, A_2) = 0$ 可得 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

故选: A.

5. (4分) 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()

A. x ($x \neq 0$)

B. $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

C. $-x$ ($x \neq 0$)

D. $-\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

【解答】由 $y = \frac{1}{x}$ 得 $x = \frac{1}{y}$ 且 $y \neq 0$, 所以反函数 $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ 且 $x \neq 0$ 故选则 B

6. (4分) 若点 $P(\sin \alpha - \cos \alpha, \tan \alpha)$ 在第一象限, 则在 $[0, 2\pi)$ 内 α 的取值范围是 ()

A. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ *

B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$

C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

D. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

【解答】解: $\because \begin{cases} \sin \alpha - \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$

故选：B.

7. (4分) 已知圆锥的全面积是底面积的3倍，那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 ()

A. 120° B. 150° C. 180° D. 240°

【解答】解：圆锥的全面积是底面积的3倍，那么母线和底面半径的比为2，
设圆锥底面半径为1，则圆锥母线长为2，圆锥的侧面展开图扇形的弧长是圆锥底面周长为 2π ，

该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角： π ，即 180°

故选：C.

8. (4分) 复数 $-i$ 的一个立方根是 i ，它的另外两个立方根是 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ C. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

【解答】解： $\because -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$ ，其立方根是 $\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}$ ，
 $k \in \{0, 1, 2\}$ ，

即 $i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ，

故选：D.

9. (4分) 如果棱台的两底面积分别是 S, S' ，中截面的面积是 S_0 ，那么 ()

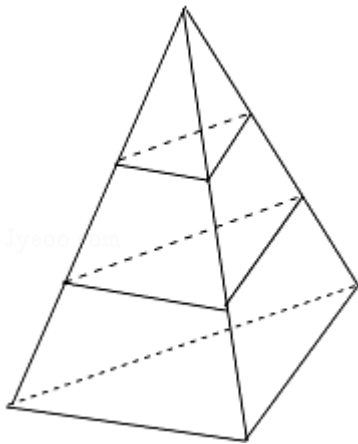
A. $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$ B. $S_0 = \sqrt{S'S}$ C. $2S_0 = S + S'$
D. $S_0^2 = 2S'S$

【解答】解：不妨设棱台为三棱台，设棱台的高为 $2r$ ，上部三棱锥的高为 a ，

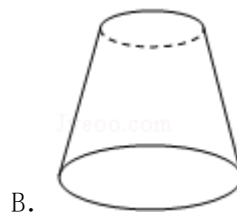
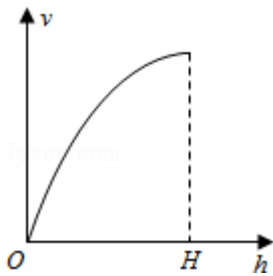
根据相似比的性质可得： $\begin{cases} (\frac{a}{a+2r})^2 = \frac{S'}{S} \\ (\frac{a}{a+r})^2 = \frac{S_0}{S} \end{cases}$ ，可得： $\begin{cases} \frac{a+2r}{a} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}} \\ \frac{a+r}{a} = \frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S'}} \end{cases}$

消去 r ，可得 $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$

故选：A.



10. (4分) 向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系如图, 那么水瓶的形状是图中的 ()



【解答】解: 如果水瓶形状是圆柱, $V = \pi r^2 h$, r 不变, V 是 h 的正比例函数, 其图象应该是过原点的直线, 与已知图象不符. 故 D 错;

由已知函数图可以看出, 随着高度 h 的增加 V 也增加, 但随 h 变大, 每单位高度的增加, 体积 V 的增加量变小, 图象上升趋势变缓,

其原因只能是瓶子平行底的截面的半径由底到顶逐渐变小. 故 A 、 C 错.

故选: B .

11. (4分) 3名医生和6名护士被分配到3所学校为学生体检, 每校分配1名医生和2名

护士. 不同的分配方法共有 ()

- A. 90 种 B. 180 种 C. 270 种 D. 540 种

【解答】解: 三所学校依次选医生、护士, 不同的分配方法共有: $C_3^1 C_6^2 C_2^1 C_4^2 = 540$ 种.

故选: D.

12. (4分) 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1 和 F_2 , 点 P 在椭圆上, 如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上,

那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 ()

- A. 7 倍 B. 5 倍 C. 4 倍 D. 3 倍

【解答】解: 由题设知 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$,

如图, 设 P 点的坐标是 (x, y) , 线段 PF_1 的中点坐标为 $(\frac{x-3}{2}, \frac{y}{2})$

\because 线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上,

$$\therefore \frac{x-3}{2} = 0$$

$$\therefore x = 3$$

将 $P(3, y)$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$, 得到 $y^2 = \frac{3}{4}$.

$$\therefore |PF_1| = \sqrt{36 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{147}}{2},$$

$$|PF_2| = \sqrt{0 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{\frac{\sqrt{147}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 7.$$

\therefore .

故选: A.



13. (4分) 球面上有3个点, 其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$, 经过这3个点的小圆的周长为 4π , 那么这个球的半径为 ()

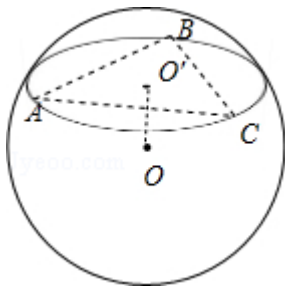
- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$

【解答】解法一: 过 O 作 $OO' \perp$ 平面 ABC , O' 是垂足,

则 O' 是 $\triangle ABC$ 的中心, 则 $O'A = r = 2$, 又因为 $\angle AOC = \theta = \frac{\pi}{3}$,

$OA = OC$ 知 $OA = AC < 2O'A$. 其次, OA 是 $\text{Rt}\triangle OO'A$ 的斜边,

故 $OA > O'A$. 所以 $O'A < OA < 2O'A$. 因为 $OA = R$, 所以 $2 < R <$



4.

因此, 排除 A 、 C 、 D , 得 B .

解法二: 在正三角形 ABC 中, 应用正弦定理, 得 $AB = 2r \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

因为 $\angle AOB = \theta = \frac{\pi}{3}$, 所以侧面 AOB 是正三角形, 得球半径 $R = OA = AB = 2\sqrt{3}$.

解法三: 因为正三角形 ABC 的外径 $r = 2$, 故高 $AD = \frac{3}{2}r = 3$, D 是 BC 的中点.

在 $\triangle OBC$ 中, $BO = CO = R$, $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$, 所以 $BC = BO = R$, $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}R$.

在 Rt $\triangle ABD$ 中, $AB=BC=R$, 所以由 $AB=BD+AD$, 得 $R^2 = \frac{1}{4}R^2 + 9$, 所以 $R=2\sqrt{3}$.

故选: B.

14. (4分) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 其最小内角是 ()

- A. $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ D. $\arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

【解答】解: 设 Rt $\triangle ABC$ 中, $C = \frac{\pi}{2}$, 则 A 与 B 互余且 A 为最小内角.

又由已知得 $\sin^2 B = \sin A$, 即 $\cos^2 A = \sin A$, $1 - \sin^2 A = \sin A$,

解得 $\sin A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\sin A = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ (舍).

故选: B.

15. (4分) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 1$, 且前 n 项和 S_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_1} = \frac{1}{a_1}$, 那么 a_1 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(1, 4)$ C. $(1, 2)$ D. $(1, \sqrt{2})$

【解答】解: 由题意知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{a_1}$,

$$\therefore a_1^2 = 1 - q,$$

$$\because a_1 > 1, |q| < 1, \therefore 1 < a_1^2 < 2,$$

$$\therefore 1 < a_1 < \sqrt{2}.$$

故选: D.

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

16. (5分) 已知圆 C 过双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的一个顶点和一个焦点, 且圆心在此双曲线上, 则

圆心到双曲线中心的距离是 $\frac{16}{3}$.

【解答】解: 由双曲线的几何性质易知圆 C 过双曲线同一支上的顶点和焦点, 所以圆 C 的圆心的横坐标为 4.

故圆心坐标为 $(4, \pm \frac{4\sqrt{7}}{3})$.

\therefore 它到中心 $(0, 0)$ 的距离为 $d = \sqrt{16 + \frac{112}{9}} = \frac{16}{3}$.

故答案为: $\frac{16}{3}$.

17. (5分) $(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中 x^{10} 的系数为 179 (用数字作答).

【解答】解: $(x+2)^{10}(x^2-1) = x^2(x+2)^{10} - (x+2)^{10}$

$\therefore (x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中 x^{10} 的系数是 $(x+2)^{10}$ 展开式的 x^8 的系数 - x^{10} 的系数

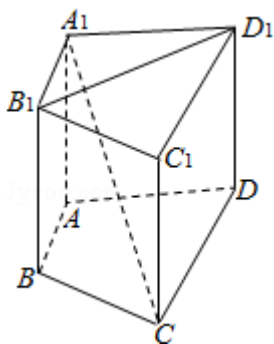
$\therefore (x+2)^{10}$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{10-r} 2^r = 2^r C_{10}^r x^{10-r}$

\therefore 令 $r=0, 2$ 分别得 x^{10}, x^8 的系数为 1, 180

故展开式中 x^{10} 的系数为 $180 - 1 = 179$,

故答案为 179

18. (5分) 如图, 在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$ 中, 当底面四边形 $ABCD$ 满足条件 $AC \perp BD$ 时, 有 $A_1C \perp B_1D_1$. (注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考虑所有可能的情形.)



【解答】解: \because 四棱柱 $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$ 是直棱柱,

$\therefore B_1D_1 \perp A_1A$, 若 $A_1C \perp B_1D_1$

则 $B_1D_1 \perp$ 平面 A_1AC_1C

$\therefore B_1D_1 \perp AC$,

又由 $B_1D_1 \parallel BD$,

则有 $BD \perp AC$,

反之, 由 $BD \perp AC$ 亦可得到 $A_1C \perp B_1D_1$

故答案为: $BD \perp AC$.

19. (5分) 关于函数 $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 有下列命题:

①由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 可得 $x_1 - x_2$ 必是 π 的整数倍;

② $y = f(x)$ 的表达式可改写为 $y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

③ $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称;

④ $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是 ②. (把你认为正确的命题序号都填上)

【解答】解: 函数 $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 $T = \pi$,

由相邻两个零点的横坐标间的距离是 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ 知①错.

利用诱导公式得 $f(x) = 4\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 知②正确.

由于曲线 $f(x)$ 与 x 轴的每个交点都是它的对称中心,

将 $x = \frac{\pi}{6}$ 代入得 $f(x) = 4\sin\frac{2\pi}{3} \neq 0$,

因此点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 不是 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

故命题③错误.

曲线 $f(x)$ 的对称轴必经过图象的最高点或最低点, 且与 y 轴平行, 而 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时 $y = 0$, 点

$\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 不是最高点也不是最低点,

故直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 不是图象的对称轴，因此命题④不正确。

故答案为：②

三、解答题（共6小题，满分70分）

20. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，设 $a+c=2b, A-C=\frac{\pi}{3}$ 。求 $\sin B$ 的值。以下公式供解题时参考：

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\sin \theta - \sin \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2},$$

$$\cos \theta - \cos \phi = -2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}.$$

【解答】解：由正弦定理和已知条件 $a+c=2b$ 得 $\sin A + \sin C = 2 \sin B$ 。

由和差化积公式得 $2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin B$ 。

由 $A+B+C=\pi$ 得 $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$ ，

又 $A-C=\frac{\pi}{3}$ 得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin B$ ，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$ 。

因为 $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ ， $\cos \frac{B}{2} \neq 0$ ，

所以 $\sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

从而 $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

21. (12分) 如图, 直线 l_1 和 l_2 相交于点 M , $l_1 \perp l_2$, 点 $N \in l_1$. 以 A, B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等. 若 $\triangle AMN$ 为锐角三角形, $|MN| = \sqrt{17}$, $|AM| = 3$, 且 $|BM| = 6$. 建立适当的坐标系, 求曲线段 C 的方程.



【解答】解：法一：如图建立坐标系，

以 l_1 为 x 轴， MN 的垂直平分线为 y 轴，点 O 为坐标原点.

依题意知：曲线段 C 是以点 N 为焦点，以 l_2 为准线的抛物线的一段，其中 A, B 分别为 C 的端点.

设曲线段 C 的方程为

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (x_A \leq x \leq x_B, \quad y > 0),$$

其中 x_A, x_B 分别为 A, B 的横坐标， $p = |MN|$.

所以 $M(-\frac{p}{2}, 0)$, $N(\frac{p}{2}, 0)$.

由 $|MN| = \sqrt{17}$, $|AM| = 3$ 得

$$(x_A + \frac{p}{2})^2 + 2px_A = 17, \quad \text{①}$$

$$(x_A - \frac{p}{2})^2 + 2px_A = 9. \quad \text{②}$$

由①, ②两式联立解得 $x_A = \frac{4}{p}$. 再将其代入①式并由 $p > 0$ 解得 $\begin{cases} p = 4 \\ x_A = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}$.

因为 $\triangle AMN$ 是锐角三角形，所以 $\frac{p}{2} > x_A$, 故舍去 $\begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}$

所以 $p=4$, $x_A=1$.

由点 B 在曲线段 C 上, 得 $x_B = |BM| - \frac{p}{2} = 4$.

综上得曲线段 C 的方程为

$$y^2 = 8x \quad (1 \leq x \leq 4, y > 0).$$

解法二: 如图建立坐标系,

分别以 l_1 、 l_2 为 x 、 y 轴, M 为坐标原点.

作 $AE \perp l_1$, $AD \perp l_2$, $BF \perp l_2$, 垂足分别为 E 、 D 、 F .

设 $A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 、 $N(x_N, 0)$.

依题意有

$$x_A = |ME| = |DA| = |AN| = 3,$$

$$y_A = |DM| = \sqrt{|AM|^2 - |DA|^2} = 2\sqrt{2},$$

由于 $\triangle AMN$ 为锐角三角形, 故有

$$x_N = |ME| + |EN|$$

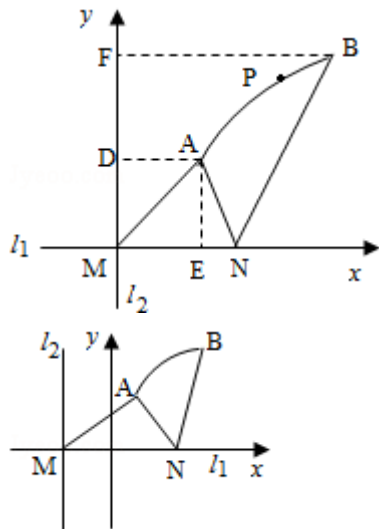
$$= |ME| + \sqrt{|AN|^2 - |AE|^2} = 4$$

$$x_B = |BF| = |BN| = 6.$$

设点 $P(x, y)$ 是曲线段 C 上任一点, 则由题意知 P 属于集合

$$\{(x, y) \mid (x - x_N)^2 + y^2 = x^2, x_A \leq x \leq x_B, y > 0\}.$$

故曲线段 C 的方程为 $y^2 = 8(x - 2) \quad (3 \leq x \leq 6, y > 0)$.



22. (12分) 如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱,

污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出。设箱体的长度为 a 米，高度为 b 米。已知流出的水中该杂质的质量分数与 a, b 的乘积 ab 成反比。现有制箱材料 60 平方米。问当 a, b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（ A, B 孔的面积忽略不计）。



【解答】解法一：设 y 为流出的水中杂质的质量分数，

则 $y = \frac{k}{ab}$ ，其中 $k > 0$ 为比例系数。依题意，即所求的 a, b 值使 y 值最小。

根据题设，有 $4b + 2ab + 2a = 60$ ($a > 0, b > 0$),

$$\text{得 } b = \frac{30-a}{2+a} \quad (0 < a < 30). \quad \textcircled{1}$$

于是 $y = \frac{k}{ab}$

$$= \frac{k}{\frac{30a-a^2}{2+a}} = \frac{k}{-a+32-\frac{64}{a+2}} = \frac{k}{34-(a+2+\frac{64}{a+2})}$$

$$\geq \frac{k}{34-2\sqrt{(a+2)\frac{64}{a+2}}} = \frac{k}{18},$$

当 $a+2 = \frac{64}{a+2}$ 时取等号， y 达到最小值。

这时 $a=6, a=-10$ (舍去)。

将 $a=6$ 代入①式得 $b=3$ 。

故当 a 为 6 米， b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小。

解法二：依题意，即所求的 a, b 的值使 ab 最大。

由题设知 $4b + 2ab + 2a = 60$ ($a > 0, b > 0$),

即 $a + 2b + ab = 30$ ($a > 0, b > 0$)。

因为 $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$,

所以 $2\sqrt{2}\sqrt{ab} + ab \leq 30$,

当且仅当 $a=2b$ 时, 上式取等号.

由 $a>0, b>0$, 解得 $0 < ab \leq 18$.

即当 $a=2b$ 时, ab 取得最大值, 其最大值为 18.

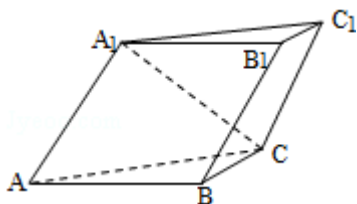
所以 $2b^2=18$. 解得 $b=3, a=6$.

故当 a 为 6 米, b 为 3 米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

23. (12 分) 已知如图, 斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直, $\angle ABC=90^\circ$

, $BC=2, AC=2\sqrt{3}$, 且 $AA_1 \perp A_1C, AA_1=A_1C$.

- (1) 求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小;
- (2) 求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小;
- (3) 求顶点 C 到侧面 A_1ABB_1 的距离.



【解答】(1) 解: 如图作 $A_1D \perp AC$, 垂足为 D , 由面 $A_1ACC_1 \perp$ 面 ABC , 得 $A_1D \perp$ 面 ABC , 所以 $\angle A_1AD$ 为 A_1A 与面 ABC 所成的角.

因为 $AA_1 \perp A_1C, AA_1=A_1C$,

所以 $\angle A_1AD=45^\circ$ 为所求.

(2) 解: 作 $DE \perp AB$, 垂足为 E , 连 A_1E , 则由 $A_1D \perp$ 面 ABC , 得 $A_1E \perp AB$.

所以 $\angle A_1ED$ 是面 A_1ABB_1 与面 ABC 所成二面角的平面角.

由已知, $AB \perp BC$, 得 $ED \parallel BC$.

又 D 是 AC 的中点, $BC=2, AC=2\sqrt{3}$,

所以 $DE=1, AD=A_1D = \sqrt{3}$, $\tan \angle A_1ED = \frac{A_1D}{DE} = \sqrt{3}$.

故 $\angle A_1ED=60^\circ$ 为所求.

(3) 解法一: 由点 C 作平面 A_1ABB_1 的垂线, 垂足为 H ,

则 CH 的长是 C 到平面 A_1ABB_1 的距离.

连接 HB , 由于 $AB \perp BC$, 得 $AB \perp HB$.

又 $A_1E \perp AB$, 知 $HB \parallel A_1E$, 且 $BC \parallel ED$,

所以 $\angle HBC = \angle A_1ED = 60^\circ$

所以 $CH = BC \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ 为所求.

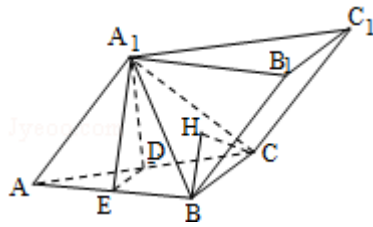
解法二: 连接 A_1B .

根据定义, 点 C 到面 A_1ABB_1 的距离, 即为三棱锥 $C - A_1AB$ 的高 h .

由 $V_{\text{锥}C-A_1AB} = V_{\text{锥}A_1-ABC}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B}h = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}A_1D$,

即 $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{2}h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

所以 $h = \sqrt{3}$ 为所求.



24. (12分) 设曲线 C 的方程是 $y = x^3 - x$, 将 C 沿 x 轴、 y 轴正向分别平行移动 t 、 s 单位长度后得曲线 C_1 .

(1) 写出曲线 C_1 的方程;

(2) 证明曲线 C 与 C_1 关于点 $A(\frac{t}{2}, \frac{s}{2})$ 对称;

(3) 如果曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点, 证明 $s = \frac{t^3}{4} - t$ 且 $t \neq 0$.

【解答】(1) 解: 曲线 C_1 的方程为 $y = (x - t)^3 - (x - t) + s$.

(2) 证明: 在曲线 C 上任取一点 $B_1(x_1, y_1)$. 设 $B_2(x_2, y_2)$ 是 B_1 关于点 A 的对称点,

则有 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{t}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{s}{2}$, 所以 $x_1 = t - x_2$, $y_1 = s - y_2$.

代入曲线 C 的方程, 得 x_2 和 y_2 满足方程:

$s - y_2 = (t - x_2)^3 - (t - x_2)$, 即 $y_2 = (x_2 - t)^3 - (x_2 - t) + s$, 可知点 $B_2(x_2, y_2)$ 在

曲线 C_1 上.

反过来, 同样可以证明, 在曲线 C_1 上的点关于点 A 的对称点在曲线 C 上.

因此, 曲线 C 与 C_1 关于点 A 对称.

(3) 证明: 因为曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点, 所以, 方程组

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (x-t)^3 - (x-t) + s \end{cases} \text{有且仅有一组解.}$$

消去 y , 整理得 $3tx^2 - 3t^2x + (t^3 - t - s) = 0$, 这个关于 x 的一元二次方程有且仅有一个根.

所以 $t \neq 0$ 并且其根的判别式 $\Delta = 9t^4 - 12t(t^3 - t - s) = 0$, 即
$$\begin{cases} t \neq 0 \\ t(t^3 - 4t - 4s) = 0. \end{cases}$$

所以 $s = \frac{t^3}{4} - t$ 且 $t \neq 0$.

25. (12分) 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1 = 1$, $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 145$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n ;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \log_a \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$ (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$), 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的

前 n 项和. 试比较 S_n 与 $\frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$ 的大小, 并证明你的结论.

【解答】解: (1) 设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 由题意得
$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ 10b_1 + \frac{10(10-1)}{2}d = 145. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

所以 $b_n = 3n - 2$.

(2) 由 $b_n = 3n - 2$, 知

$$\begin{aligned} S_n &= \log_a(1+1) + \log_a\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_a\left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) \\ &= \log_a\left[\left(1+1\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{3n-2}\right)\right], \quad \frac{1}{3} \log_a b_{n+1} = \log_a \sqrt[3]{3n+1}. \end{aligned}$$

因此要比较 S_n 与 $\frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$ 的大小, 可先比较 $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{n-2}})$ 与 $\sqrt[3]{3n+1}$ 的大小.

取 $n=1$ 有 $(1+\frac{1}{4}) > \sqrt[3]{3 \cdot 1+1}$,

取 $n=2$ 有 $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{2-2}}) > \sqrt[3]{3 \cdot 2+1}$,

由此推测 $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{n-2}}) > \sqrt[3]{3n+1}$. ①

若①式成立, 则由对数函数性质可断定:

当 $a > 1$ 时, $S_n > \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$.

当 $0 < a < 1$ 时, $S_n < \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}$.

下面用数学归纳法证明①式.

(i) 当 $n=1$ 时已验证①式成立.

(ii) 假设当 $n=k$ ($k \geq 1$) 时, ①式成立, 即

$$(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{k-2}}) > \sqrt[3]{3k+1}.$$

那么, 当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} & (1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{k-2}})(1+\frac{1}{3^{(k+1)-2}}) > \sqrt[3]{3k+1} (1+\frac{1}{3^{k+1}}) \\ & = \frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1} (3k+2). \end{aligned}$$

因为 $[\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2)]^3 - [\sqrt[3]{3k+4}]^3 = \frac{(3k+2)^3 - (3k+4)(3k+1)^2}{(3k+1)^2} = \frac{9k+4}{(3k+1)^2} > 0$,

所以 $\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1} (3k+2) > \sqrt[3]{3k+4} = \sqrt[3]{3(k+1)+1}$.

因而 $(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{3^{k-2}})(1+\frac{1}{3^{k+1}}) > \sqrt[3]{3(k+1)+1}$.

这就是说①式当 $n=k+1$ 时也成立.

由 (i), (ii) 知①式对任何正整数 n 都成立.

由此证得:

$$\text{当 } a > 1 \text{ 时, } S_n > \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}.$$

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } S_n < \frac{1}{3} \log_a b_{n+1}.$$

声明: 试题解析著作权属菁优网所有, 未经书面同意, 不得复制发布

日期: 2019/8/12 0:35:12; 用户: 黄熠; 邮箱: huangyi12388@163.com; 学号: 716378