2006年四川高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3到8页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

3．本卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么球是表面积公式

$P(A+B)=P(A)+P(B)$ $S=4\pi R^2$

如果事件A、B相互独立，那么其中R表示球的半径

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ 球的体积公式

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

n次独立重复试验中恰好发生k次的概率其中R表示球的半径

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

一、选择题 本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合A=$\{x\,|\,x^2-5x+6\le 0\}$，$B=\{x\,|\,|2x-1|>3\}$，则集合A∩B＝

（A）$\{x\,|\,2\le x\le 3\}$ （B）$\{x\,|\,2\le x<3\}$ （C）$\{x\,|\,2<x\le 3\}$ （D）$\{x\,|\,-1<x<3\}$

2. 复数 $(1-3i)^3$ 的虚部为

（A）3 （B）－3 （C）2 （D）－2.

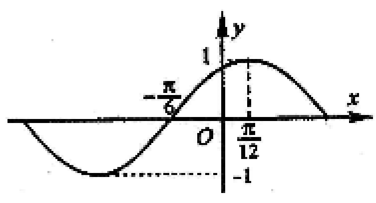
3. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\ne 1\\ 2, & x=1\end{cases}$，下面结论正确的是

（A）f(x)在x=1处连续 （B）f(1)＝5 （C）$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$ （D）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=5$

4. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 60^0，m、n为异面直线，且$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则m、n所成的角为

（A）30^0 （B）60^0 （C）90^0 （D）120^0

5. 下列函数中，图像的一部分如右图所示的是

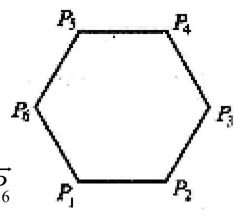


（A） $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$ （B） $y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

（C） $y=\cos(4x-\dfrac{\pi}{3})$ （D） $y=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$

6. 已知两定点 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，如果动点P满足条件 $|PA|=2|PB|$，则点P的轨迹所包围的图形的面积等于

（A）π （B）4π （C）8π （D）9π



7. 如图，已知正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$，下列向量的数量积中最大的是

（A）$\overrightarrow{P_1P_2}\bullet\overrightarrow{P_1P_3}$ （B）$\overrightarrow{P_1P_2}\bullet\overrightarrow{P_1P_4}$ （C）$\overrightarrow{P_1P_2}\bullet\overrightarrow{P_1P_5}$ （D）$\overrightarrow{P_1P_2}\bullet\overrightarrow{P_1P_6}$

8. 某厂生产甲产品每千克需用原料A和原料B分别为a_1、b_1千克，生产

乙产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为a_2、b_2千克。甲、乙产品每千克可获利润分别为d_1、d_2元。月初一次性购进本月用原料 A、B 各c_1、c_2千克。要计划本月生产甲、乙两种产品各多少千克才能使月利润总额达到最大。在这个问题中，设全月生产甲、乙两种产品分别为 x 千克、 y 千克，月利润总额为 z 元，那么，用于求使总利润$z=d_1x+d_2y$最大的数学模型中，约束条件为

（A）$\begin{cases}a_1x+a_2y\ge c_1,\\ b_1x+b_2y\ge c_2,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$ （B）$\begin{cases}a_1x+b_1y\le c_1,\\ a_2x+b_2y\le c_2,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$ （C）$\begin{cases}a_1x+a_2y\le c_1,\\ b_1x+b_2y\le c_2,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$ （D）$\begin{cases}a_1x+a_2y=c_1,\\ b_1x+b_2y=c_2,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$

9. 直线 y ＝ x －3 与抛物线$y^2=4x$交于 A、B 两点，过 A、B 两点向抛物线的准线作垂线，垂足分别为 P、Q ，则梯形 APQB 的面积为

（A）48 （B）56 （C）64 （D）72.

10. 已知球 O 半径为 1，A、B、C 三点都在球面上，A、B 两点和 A、C 两点的球面距离都是$\frac{\pi}{4}$，B、C 两点的球面距离是$\frac{\pi}{3}$，则二面角$B-OA-C$的大小是

（A）$\frac{\pi}{4}$ （B）$\frac{\pi}{3}$ （C）$\frac{\pi}{2}$ （D）$\frac{2\pi}{3}$

11. 设a、b、c分别为ΔABC的三内角 A、B、C 所对的边，则$a^2=b(b+c)$是 $A=2B$ 的

（A）充要条件（B）充分而不必要条件（C）必要而不充分条件（D）既不充分也不必要条件

12. 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数，这个数不能被 3 整除的概率为

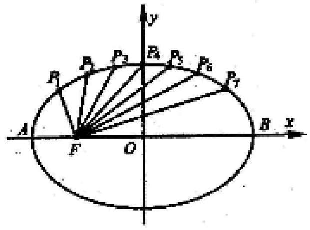
（A）$\frac{19}{54}$ （B）$\frac{35}{54}$ （C）$\frac{38}{54}$ （D）$\frac{41}{60}$

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

13. 在三棱锥 O-ABC 中，三条棱 OA、OB、OC 两两互相垂直，且 OA＝OB＝OC，M 是 AB 的中点，则 OM 与平面 ABC 所成角的大小是______________（用反三角函数表示）。

14. 设离散型随机变量ξ可能取的值为 1，2，3，4. P($\xi=k$)＝ak+b(k=1，2，3，4)，又ξ的数学期望 Eξ＝3，则 a ＋ b ＝_______________。



15. 如图把椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的长轴 AB 分成 8 分，过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于$P_1, P_2, \cdots\cdots P_7$七个点，F 是椭圆的一个焦点，则$|P_1F|+|P_2F|+\ldots\ldots+|P_7F|=$____________.

16. 非空集合 G 关于运算⊕满足：（1）对任意的$a,b\in G$，都有$a\oplus b\in G$，(2) 存在$e\in G$，都有$a\oplus b=b\oplus a=a$，则称 G 关于运算⊕为“融洽集”。现给出下列集合和运算：

①G＝｛非负整数｝，⊕为整数的加法。

②G＝｛偶数｝，⊕为整数的乘法。

③G＝｛平面向量｝，⊕为平面向量的加法。

④G＝｛二次三项式｝，⊕为多项式的加法。

⑤G＝｛虚数｝，⊕为复数的乘法。

其中 G 关于运算⊕为“融洽集”的是________。（写出所有“融洽集”的序号）

三. 解答题共 6 个小题，共 74 分，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知 A、B、C 是 ΔABC 三内角，向量 $m=(-1,\sqrt{3}),\ n=(\cos A,\sin A),$

且 $m\bullet n=1.$

（Ⅰ）求角 A

（Ⅱ）若 $\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3,$ 求t anC。

18.（本小题满分 12 分）

某课程考核分理论与实验两部分进行，每部分考核成绩只记“合格”与“不合格”，两部分考核都“合格”则该课程考核“合格”。甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9、0.8、0.7；在实验考核中合格的概率分别为 0.8、0.7、0.9。所有考核是否合格相互之间没有影响。

（Ⅰ）求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率；

（Ⅱ）求这三人该课程考核都合格的概率（结果保留三位小数）。

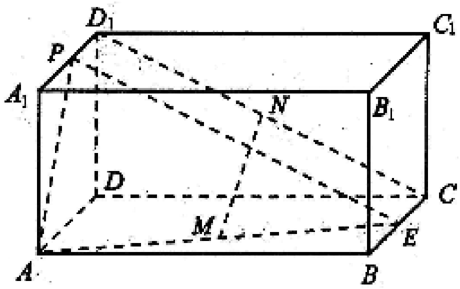
19.（本小题满分 12 分）

如图, 长方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，E、P 分别是 BC、A_1D_1 的中点, M、N 分别是 AE、CD_1 的中点, AD=$A_1A_1=a$, Ab=$2a$,

（Ⅰ）求证：MN//平面ADD_1A_1;；

（Ⅱ）求二面角 $P-AE-D$ 的大小；

（Ⅲ）求三棱锥 P－DEN 的体积。



20.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1,a_2=3,\ 2a_n=a_{n+1}+a_{n-1},(n\ge 2)$ 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 数列 $\{\ln S_n\}$ 的前 n 项和为 U_n.

(Ⅰ)求 U_n；

(Ⅱ)设 $F_n(x)=\dfrac{e^{U_N}}{2n(n!)^2}x^{2n},\ T_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}F_k^1(x),$（其中 $F_k^1(x)$ 为 $F_k\ (x)$ 的导函数），

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n(x)}{T_{n+1}(x)}$

21.（本小题满分 12 分）

已知两定点 $F_1(-\sqrt{2},0),\ F_2(\sqrt{2},0),$ 满足条件 $\left|\overline{PF}_2\right|-\left|\overline{PF}_1\right|=2$ 的点 P 的轨迹是曲线 E, 直线 y ＝kx－1 与曲线 E 交于 A、B 两点。如果 $\left|\overline{AB}\right|=6\sqrt{3},$ 且曲线 E 上存在点 C，使 $\overline{OA}+\overline{OB}=m\overline{OC},$ 求 m 的值和 ΔABC 的面积S。

22.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}+a\ln x(x>0)$，f(x) 的导函数是 $f'(x)$。对任意两个不相等的正数 x_1、x_2，证明：

（Ⅰ）当 $a\le 0$ 时，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$；

（Ⅱ）当 $a\le 4$ 时，$\left|f'(x_1)-f'(x_2)\right|>\left|x_1-x_2\right|$。

2006 年四川高考理科数学真题参考答案

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分；

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	D	B	D	B	A	C	A	C	A	B

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分；把答案填在题中的横线上。

（13）$\arctan\sqrt{2}$；（14）$\frac{1}{10}$；（15）35；（16）①，③

三．解答题：本大题共 6 小题，共 74 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）本小题主要考察三角函数概念、同角三角函数的关系、两角和与差的三角函数的公式以及倍角公式，考察应用、分析和计算能力。满分 12 分。

解：（Ⅰ）$\because \vec{m}\cdot\vec{n}=1\ \therefore \left(-1,\sqrt{3}\right)\cdot\left(\cos A,\sin A\right)=1$ 即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$

$2\left(\sin A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos A\cdot\frac{1}{2}\right)=1$，$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\because 0<A<\pi,-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}\ \therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ \therefore A=\frac{\pi}{3}$

（Ⅱ）由题知 $\frac{1+2\sin B\cos B}{\cos^2B-\sin^2B}=-3$，整理得 $\sin^2B-\sin B\cos B-2\cos^2B=0$

$\therefore \cos B\ne 0\ \therefore \tan^2B-\tan B-2=0$

$\therefore \tan B=2$ 或 $\tan B=-1$

而 $\tan B=-1$ 使 $\cos^2B-\sin^2B=0$，舍去 $\therefore \tan B=2$

$\therefore \tan C=\tan\left[\pi-\left(A+B\right)\right]=-\tan\left(A+B\right)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\frac{8+5\sqrt{3}}{11}$

（18）（本大题满分 12 分）

本小题主要考察相互独立事件、互斥事件、对立事件等概率的计算方法，考察应用概率知识解决实际问题的能力。满分 12 分。

解：记“甲理论考核合格”为事件 A_1；“乙理论考核合格”为事件 A_2；“丙理论考核合格”为事件 A_3；记 $\overline{A_i}$ 为 A_i 的对立事件，$i=1,2,3$；记“甲实验考核合格”为事件 B_1；“乙实验

考核合格”为事件B_2；“丙实验考核合格”为事件B_3；

（Ⅰ）记“理论考核中至少有两人合格”为事件C，记$\overline{C}$为C的对立事件

解法1：$P(C)=P\left(A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3\right)$

$=P\left(A_1A_2\overline{A_3}\right)+P\left(A_1\overline{A_2}A_3\right)+P\left(\overline{A_1}A_2A_3\right)+P\left(A_1A_2A_3\right)$

$=0.9\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.8\times0.7$

$=0.902$

解法2：$P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)$

$=1-\left[P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)+P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)\right]$

$=1-\left(0.1\times0.2\times0.3+0.9\times0.2\times0.3+0.1\times0.8\times0.3+0.1\times0.2\times0.7\right)$

$=1-0.098=0.902$

所以，理论考核中至少有两人合格的概率为0.902

（Ⅱ）记“三人该课程考核都合格”为事件D

$P(D)=P\left[\left(A_1\cdot B_1\right)\cdot\left(A_2\cdot B_2\right)\cdot\left(A_3\cdot B_3\right)\right]$

$=P\left(A_1\cdot B_1\right)\cdot P\left(A_2\cdot B_2\right)\cdot P\left(A_3\cdot B_3\right)$

$=P\left(A_1\right)\cdot P\left(B_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(B_2\right)\cdot P\left(A_3\right)\cdot P\left(B_3\right)$

$=0.9\times0.8\times0.8\times0.8\times0.7\times0.9$

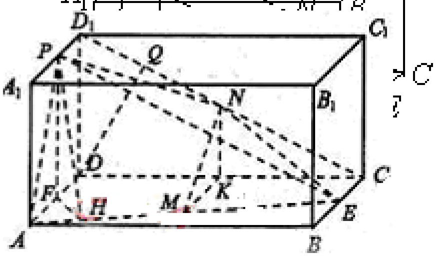
$=0.254016$

≈0.254

所以，这三人该课程考核都合格的概率为0.254

（19）（本大题满分12分）

本小题主要考察长方体的概念、直线和平面、平面和平面的关系等基础知识，以及空间想象能力和推理能力。满分12分



解法一：（Ⅰ）证明：取CD的中点K，连结MK,NK

$\because M,N,K$分别为AK,CD_1,CD的中点

$\because MK\,//\,AD,NK\,//\,DD_1$

$\therefore MK\,//$面ADD_1A_1，$NK\,//$面ADD_1A_1

$\therefore$面$MNK\,//$面ADD_1A_1 $\therefore MN\,//$面ADD_1A_1

（Ⅱ）设F为AD的中点

$\because P$为A_1D_1的中点$\therefore PF\,//\,D_1D$ $\therefore PF\perp$面$ABCD$

作 $FH \perp AE$，交 AE 于 H，连结 PH，则由三垂线定理得 $AE \perp PH$
从而 $\angle PHF$ 为二面角 $P-AE-D$ 的平面角。

在 $Rt\Delta AEF$ 中，$AF=\frac{a}{2}, EF=2a, AE=\frac{\sqrt{17}}{2}a$，从而 $FH=\frac{AF\cdot EF}{AE}=\frac{\frac{a}{2}\cdot 2a}{\frac{\sqrt{17}}{2}a}=\frac{2a}{\sqrt{17}}$

在 $Rt\Delta PFH$ 中，$\tan\angle PFH=\frac{PF}{FH}=\frac{DD_1}{FH}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

故：二面角 $P-AE-D$ 的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{17}}{2}$

（III）$S_{\Delta NEP}=\frac{1}{2}S_{矩形ECD_1P}=\frac{1}{4}BC\cdot CD_1=\frac{1}{4}\cdot a\cdot\sqrt{a^2+4a^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}a^2$

作 $DQ\perp CD_1$，交 CD_1 于 Q，由 $A_1D_1\perp$ 面 CDD_1C_1 得 $A_1C_1\perp DQ$

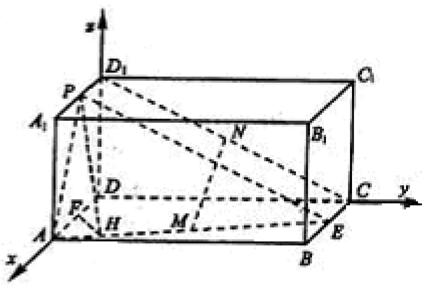
$\therefore DQ\perp$ 面 BCD_1A_1

$\therefore$ 在 $Rt\Delta CDD_1$ 中，$DQ=\frac{CD\cdot DD_1}{CD_1}=\frac{2a\cdot a}{\sqrt{5}a}=\frac{2}{\sqrt{5}}a$

$\therefore V_{P-DEN}=V_{D-ENP}=\frac{1}{3}S_{\Delta NEP}\cdot DQ=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}}{4}a^2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}a=\frac{1}{6}a^3$

方法二：以 D 为原点，DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立直角坐标系，则

$A(a,0,0), B(a,2a,0), C(0,2a,0), A_1(a,0,a), D_1(0,0,a)$



$\because E,P,M,N$ 分别是 BC, A_1D_1, AE, CD_1 的中点

$\therefore E\left(\frac{a}{2},2a,0\right), P\left(\frac{a}{2},0,a\right), M\left(\frac{3a}{4},a,0\right), N\left(0,a,\frac{a}{2}\right)$,

（I）$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{3}{4}a,0,\frac{a}{2}\right)$

取 $\vec{n}=(0,1,0)$，显然 $\vec{n}\perp$ 面 ADD_1A_1

$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0$，$\therefore\overrightarrow{MN}\perp\vec{n}$

又 $MN\not\subset$ 面 ADD_1A_1 $\therefore MN//$ 面 ADD_1A_1

（II）过 P 作 $PH\perp AE$，交 AE 于 H，取 AD 的中点 F，则 $F\left(\frac{a}{2},0,0\right)\because$

设 $H(x,y,0)$，则 $\overrightarrow{HP}=\left(\frac{a}{2}-x,-y,a\right),\overrightarrow{HF}=\left(\frac{a}{2}-x,-y,0\right)$

又 $\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{a}{2},2a,0\right)$

由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，及 H 在直线 AE 上，可得: $\begin{cases}-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}x-2ay=0\\ 4x+y=4a\end{cases}$

解得 $x=\frac{33}{34}a,y=\frac{2}{17}a$

$\therefore\overrightarrow{HP}=\left(-\frac{8a}{17},-\frac{2a}{17},a\right),\overrightarrow{HF}=\left(-\frac{8a}{17},-\frac{2a}{17},0\right)\therefore\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ 即 $\overrightarrow{HF}\perp\overrightarrow{AE}$

$\therefore\overrightarrow{HP}$ 与 $\overrightarrow{HF}$ 所夹的角等于二面角 $P-AE-D$ 的大小

$$\cos\left\langle\overrightarrow{HP},\overrightarrow{HF}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HF}}{\left|\overrightarrow{HP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{HF}\right|}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

故：二面角 $P-AE-D$ 的大小为 $\arccos\frac{2\sqrt{21}}{21}$

（III）设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 DEN 的法向量，则 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{DE},\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{DN}$

又 $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{a}{2},2a,0\right),\overrightarrow{DN}=\left(0,a,\frac{a}{2}\right),\overrightarrow{DP}=\left(\frac{a}{2},0,a\right)$

$\therefore\begin{cases}\frac{a}{2}x_1+2ay_1=0\\ 2y_1+\frac{a}{2}z_1=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=-4y_1\\ z_1=-2y_1\end{cases}$ $\therefore$ 可取 $\overrightarrow{n_1}=(4,-1,2)$

$\therefore P$ 点到平面 DEN 的距离为 $d=\frac{\left|\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\frac{|2a+2a|}{\sqrt{16+1+4}}=\frac{4a}{\sqrt{21}}$

$\because\cos\left\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DN}}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DN}\right|}=\frac{8}{\sqrt{85}}$， $\sin\left\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right\rangle=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{85}}$

$\therefore S_{\Delta DEN}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DN}\right|\cdot\sin\left\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right\rangle=\frac{\sqrt{21}}{8}a^2$

$\therefore V_{P-DEN}=\frac{1}{3}S_{\Delta DEN}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{8}a^2\times\frac{4a}{\sqrt{21}}=\frac{a^3}{6}$

（20）（本大题满分 12 分）

本小题主要考察等差数列、等比数列的基础知识，以及对数运算、导数运算和极限运算的能力，同时考查分类讨论的思想方法，满分 12 分。

解：（Ⅰ）由题意，$\{a_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列

前n项和$S_n=\dfrac{1+1+2(n-1)}{2}\cdot n=n^2$，$\ln S_n=\ln n^2=2\ln n$

$U_n=2(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)=2\ln(n!)$

（Ⅱ）$F_n(x)=\dfrac{e^{U_n}}{2n(n!)^2}\cdot x^{2n}=\dfrac{(n!)^2}{2n(n!)^2}\cdot x^{2n}=\dfrac{x^{2n}}{2n}$ $F_n'(x)=x^{2n-1}$

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}F_k'(x)=\sum_{k=1}^{n}x^{2k-1}=\begin{cases}\dfrac{x(1-x^{2n})}{1-x^2} & (0<x<1)\\ n & (x=1)\\ \dfrac{x(1-x^{2n})}{1-x^2} & (x>1)\end{cases}$$

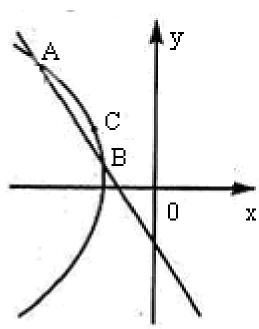
$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n(x)}{T_{n+1}(x)}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1-x^{2n+2}}=1 & (0<x<1)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1 & (x=1)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^{2n}}\right)-1}{\left(\dfrac{1}{x^{2n}}\right)-x^2} & (x>1)\end{cases}$$

（21）（本大题满分 14 分）

本小题主要考察双曲线的定义和性质、直线与双曲线的关系、点到直线的距离等知识及解析几何的基本思想、方法和综合解决问题的能力。满分 12 分。

解：由双曲线的定义可知，曲线E是以$F_1(-\sqrt{2},0),F_2(\sqrt{2},0)$为焦点的双曲线的左支，

且$c=\sqrt{2},a=1$，易知$b=1$



故曲线E的方程为$x^2-y^2=1(x<0)$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题意建立方程组$\begin{cases}y=kx-1\\ x^2-y^2=1\end{cases}$

消去y，得$(1-k^2)x^2+2kx-2=0$

又已知直线与双曲线左支交于两点A,B，有

$$\begin{cases} 1-k^2 \neq 0 \\ \Delta=(2k)^2+8(1-k^2)>0 \\ x_1+x_2=\dfrac{-2k}{1-k^2}<0 \\ x_1x_2=\dfrac{-2}{1-k^2}>0 \end{cases}$$ 解得 $-\sqrt{2}<k<-1$

又∵ $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{-2k}{1-k^2}\right)^2-4\times\dfrac{-2}{1-k^2}}=2\sqrt{\dfrac{(1+k^2)(2-k^2)}{(1-k^2)^2}}$

依题意得 $2\sqrt{\dfrac{(1+k^2)(2-k^2)}{(1-k^2)^2}}=6\sqrt{3}$ 整理后得 $28k^4-55k^2+25=0$

$\therefore k^2=\dfrac{5}{7}$ 或 $k^2=\dfrac{5}{4}$ 但 $-\sqrt{2}<k<-1$ $\therefore k=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

故直线 AB 的方程为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+y+1=0$

设 $C(x_c,y_c)$，由已知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OC}$，得 $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(mx_c,my_c)$

$\therefore (mx_c,my_c)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{m},\dfrac{y_1+y_2}{m}\right)$，$(m\neq 0)$

又 $x_1+x_2=\dfrac{2k}{k^2-1}=-4\sqrt{5}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\dfrac{2k^2}{k^2-1}-2=\dfrac{2}{k^2-1}=8$

$\therefore$ 点 $C\left(\dfrac{-4\sqrt{5}}{m},\dfrac{8}{m}\right)$

将点 C 的坐标代入曲线 E 的方程，得 $\dfrac{80}{m^2}-\dfrac{64}{m^2}=1$

得 $m=\pm 4$，但当 $m=-4$ 时，所得的点在双曲线的右支上，不合题意

$\therefore m=4$，C 点的坐标为 $(-\sqrt{5},2)$

C 到 AB 的距离为 $\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times(-\sqrt{5})+2+1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \Delta ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\sqrt{3}$

（22）（本大题满分 14 分）

本小题主要考查导数的基本性质和应用，函数的性质和平均值不等式等知识及综合分析、推理论证的能力，满分 14 分。

证明：（Ⅰ）由 $f\left(x\right)=x^2+\dfrac{2}{x}+a\ln x$

得 $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)+\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)+\dfrac{a}{2}\left(\ln x_1+\ln x_2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)+\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}+a\ln\sqrt{x_1x_2}$

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\dfrac{4}{x_1+x_2}+a\ln\dfrac{x_1+x_2}{2}$

而 $\dfrac{1}{2}\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)>\dfrac{1}{4}\left[\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)+2x_1x_2\right]^2=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2$ ①

又 $\left(x_1+x_2\right)^2=\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)+2x_1x_2>4x_1x_2$

$\therefore\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}>\dfrac{4}{x_1+x_2}$ ②

$\because\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}\therefore\ln\sqrt{x_1x_2}<\ln\dfrac{x_1+x_2}{2}$

$\because a\le 0\therefore a\ln\sqrt{x_1x_2}<a\ln\dfrac{x_1+x_2}{2}$ ③

由①、②、③得

$\dfrac{1}{2}\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)+\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}+a\ln\sqrt{x_1x_2}>\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\dfrac{4}{x_1+x_2}+a\ln\sqrt{x_1x_2}$

即 $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

（Ⅱ）证法一：由 $f\left(x\right)=x^2+\dfrac{2}{x}+a\ln x$，得 $f'\left(x\right)=2x-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{a}{x}$

$\therefore\left|f'\left(x_1\right)-f'\left(x_2\right)\right|=\left|\left(2x_1-\dfrac{2}{x_1{}^2}+\dfrac{a}{x_1}\right)-\left(2x_2-\dfrac{2}{x_2{}^2}+\dfrac{a}{x_2}\right)\right|=\left|x_1-x_2\right|\cdot\left|2+\dfrac{2\left(x_1+x_2\right)}{x_1{}^2x_2{}^2}-\dfrac{a}{x_1x_2}\right|$

$\left|f'\left(x_1\right)-f'\left(x_2\right)\right|>\left|x_1-x_2\right|\Leftrightarrow\left|2+\dfrac{2\left(x_1+x_2\right)}{x_1{}^2x_2{}^2}-\dfrac{a}{x_1x_2}\right|>1$

下面证明对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，有 $2+\dfrac{2\left(x_1+x_2\right)}{x_1{}^2x_2{}^2}-\dfrac{a}{x_1x_2}>1$ 恒成立

即证$a<x_1x_2+\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}$成立

$\because x_1x_2+\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}>x_1x_2+\dfrac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$

设$t=\sqrt{x_1x_2},u(x)=t^2+\dfrac{4}{t}(t>0)$，则$u'(x)=2t-\dfrac{4}{t^2}$

令$u'(x)=0$得$t=\sqrt[3]{2}$，列表如下：

t	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},+\infty)$
$u'(t)$	$-$	0	$+$
$u(t)$	↘	极小值$3\sqrt[3]{4}$	↗

$u(t)\geq 3\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{108}>4\geq a\therefore x_1x_2+\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}>a$

$\therefore$对任意两个不相等的正数x_1,x_2，恒有$|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$

证法二：由$f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}+a\ln x$，得$f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{a}{x}$

$\therefore|f'(x_1)-f'(x_2)|=\left|\left(2x_1-\dfrac{2}{x_1^{\,2}}+\dfrac{a}{x_1}\right)-\left(2x_2-\dfrac{2}{x_2^{\,2}}+\dfrac{a}{x_2}\right)\right|=|x_1-x_2|\cdot\left|2+\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1^{\,2}x_2^{\,2}}-\dfrac{a}{x_1x_2}\right|$

$\because x_1,x_2$是两个不相等的正数

$\therefore 2+\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1^{\,2}x_2^{\,2}}-\dfrac{a}{x_1x_2}>2+\dfrac{4}{\left(\sqrt{x_1x_2}\right)^3}-\dfrac{a}{x_1x_2}\geq 2+\dfrac{4}{\left(\sqrt{x_1x_2}\right)^3}-\dfrac{4}{x_1x_2}$

设$t=\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$，$u(t)=2+4t^3-4t^2(t>0)$

则$u'(t)=4t(3t-2)$，列表：

t	$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$	$\dfrac{2}{3}$	$\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$
$u'(t)$	$-$	0	$+$
$u(t)$	↘	极小值$\dfrac{38}{27}$	↗

$\therefore u=\dfrac{38}{27}>1$ 即 $2+\dfrac{2\left(x_1+x_2\right)}{{x_1}^2{x_2}^2}-\dfrac{a}{x_1x_2}>1$

$\therefore \left|f^{'}\left(x_1\right)-f^{'}\left(x_2\right)\right|==\left|x_1-x_2\right|\cdot\left|2+\dfrac{2\left(x_1+x_2\right)}{{x_1}^2{x_2}^2}-\dfrac{a}{x_1x_2}\right|>\left|x_1-x_2\right|$

即对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，恒有 $\left|f^{'}\left(x_1\right)-f^{'}\left(x_2\right)\right|>\left|x_1-x_2\right|$