

# 1997年北京高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 2 页. 第 II 卷 3 至 8 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

## 第 I 卷(选择题共 65 分)

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案, 不能答在试题卷上.
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回.

一、选择题: 本大题共 15 小题; 第(1)一(10)题每小题 4 分, 第(11)一(15)题每小题 5 分, 共 65 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

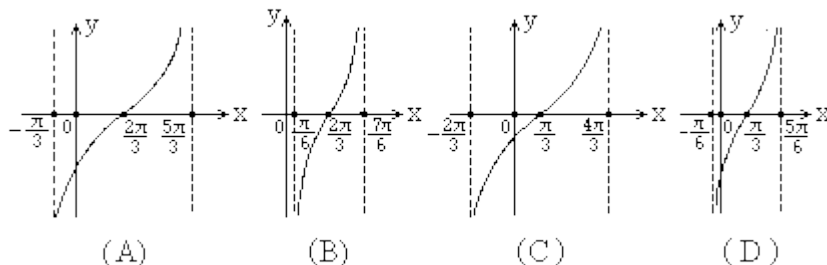
(1) 设集合  $M = \{x | 0 \leq x < 2\}$ , 集合  $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 集合  $M \cap N =$  ( )

- (A)  $\{x | 0 \leq x < 1\}$  (B)  $\{x | 0 \leq x < 2\}$   
(C)  $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$  (D)  $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

(2) 如果直线  $ax + 2y + 2 = 0$  与直线  $3x - y - 2 = 0$  平行, 那么系数  $a =$  ( )

- (A)  $-3$  (B)  $-6$  (C)  $-\frac{3}{2}$  (D)  $\frac{2}{3}$

(3) 函数  $y = \text{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$  在一个周期内的图像是 ( )



(4) 已知三棱锥  $D-ABC$  的三个侧面与底面全等, 且  $AB=AC=\sqrt{3}$ ,  $BC=2$ , 则以  $BC$  为棱, 以面  $BCD$  与面  $BCA$  为面的二面角的大小是 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\frac{2\pi}{3}$
- (5) 函数  $y = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) + \sin 2x$  的最小正周期是 ( )
- (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $4\pi$
- (6) 满足  $\operatorname{tg} a \geq \operatorname{ctg} a$  的角  $a$  的一个取值区间是 ( )
- (A)  $(0, \frac{\pi}{4}]$  (B)  $[0, \frac{\pi}{4}]$  (C)  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  (D)  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$
- (7) 设函数  $y = f(x)$  定义在实数集上, 则函数  $y = f(x-1)$  与  $y = f(1-x)$  的图像关于 ( )
- (A) 直线  $y=0$  对称 (B) 直线  $x=0$  对称  
(C) 直线  $y=1$  对称 (D) 直线  $x=1$  对称
- (8) 长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3, 4, 5 且它的八个顶点都在同一个球面上, 这个球的表面积是 ( )
- (A)  $20\sqrt{2}\pi$  (B)  $25\sqrt{2}\pi$  (C)  $50\pi$  (D)  $200\pi$
- (9) 如果直线  $l$  将圆:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$  平分, 且不通过第四象限, 那么  $l$  的斜率的取值范围是 ( )
- (A)  $[0, 2]$  (B)  $[0, 1]$  (C)  $[0, \frac{1}{2}]$  (D)  $[0, \frac{1}{2})$
- (10) 函数  $y = \cos^2 x - 3\cos x + 2$  的最小值为 ( )
- (A) 2 (B) 0 (C)  $-\frac{1}{4}$  (D) 6
- (11) 椭圆  $C$  与椭圆  $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$  关于直线  $x+y=0$  对称, 椭圆  $C$  的方程是 ( )
- (A)  $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$  (B)  $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$   
(C)  $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$  (D)  $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$
- (12) 圆台上、下底面积分别为  $\pi$ 、 $4\pi$ , 侧面积为  $6\pi$ , 这个圆台的体积是 ( )
- (A)  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$  (B)  $2\sqrt{3}\pi$  (C)  $\frac{7\sqrt{3}\pi}{6}$  (D)  $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$
- (13) 定义在区间  $(-\infty, +\infty)$  的奇函数  $f(x)$  为增函数; 偶函数  $g(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  的

图像与  $f(x)$  的图像重合. 设  $a > b > 0$ , 给出下列不等式 ( )

①  $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$ ; ②  $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$ ;

③  $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$ ; ④  $f(a) - f(-b) < g(b) - g(-a)$ .

- (A) ①与④ (B) ②与③ (C) ①与③ (D) ②与④

(14) 不等式组  $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{3-x}{3+x} > \left| \frac{2-x}{2+x} \right| \end{cases}$  的解集是 ( )

(A)  $\{x | 0 < x < 2\}$  (B)  $\{x | 0 < x < 2.5\}$

(C)  $\{x | 0 < x < \sqrt{6}\}$  (D)  $\{x | 0 < x < 3\}$

(15) 四面体的一个顶点为  $A$ , 从其它顶点与各棱的中点中取 3 个点, 使它们和点  $A$  在同一平面上, 不同的取法有 ( )

- (A) 30 种 (B) 33 种 (C) 36 种 (D) 39 种

## 第 II 卷 (非选择题 共 85 分)

**注意事项:**

- 第 II 卷共 6 页, 用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.
- 答卷前将密封线内的项目填写清楚.

**二、填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.**

(16) 已知  $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)^9$  的展开式中  $x^3$  的系数为  $\frac{9}{4}$ , 常数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

(17) 已知直线  $x - y = 2$  与抛物线  $y^2 = 4x$  交于  $A, B$  两点, 那么线段的中点坐标是\_\_\_\_\_.

(18)  $\frac{\sin 7^\circ + \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \sin 8^\circ}$  的值为\_\_\_\_\_.

(19) 已知  $m, l$  是直线,  $\alpha, \beta$  是平面, 给出下列命题:

- ①若  $l$  垂直于  $\alpha$  内的两条相交直线, 则  $l \perp \alpha$ ;
- ②若  $l$  平行于  $\alpha$ , 则  $l$  平行于  $\alpha$  内的所有直线;
- ③若  $m \subset \alpha, l \subset \beta$ , 且  $l \perp m$ , 则  $\alpha \perp \beta$ ;
- ④若  $l \subset \beta$ , 且  $l \perp \alpha$ , 则  $\alpha \perp \beta$ ;
- ⑤若  $m \subset \alpha, l \subset \beta$ , 且  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $m \parallel l$ .

其中正确的命题的序号是\_\_\_\_\_。(注：把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题：本大题共 6 小题；共 69 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(20) (本小题满分 10 分)

已知复数  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . 求复数  $z\omega + z\omega^3$  的模及辐角主值.

(21) (本小题满分 11 分)

设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项的和. 已知  $\frac{1}{3}S_3$  与  $\frac{1}{4}S_4$  的等比中项为  $\frac{1}{5}S_5$ ,  $\frac{1}{3}S_3$  与  $\frac{1}{4}S_4$  的等差中项为 1. 求等差数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n$ .

(22) (本小题满分 12 分)

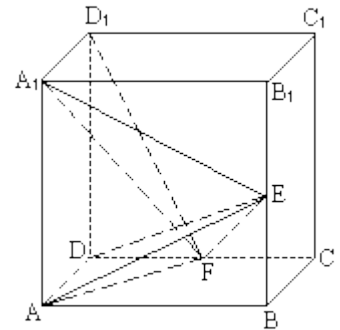
甲、乙两地相距  $s$  千米, 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 速度不得超过  $c$  千米/时. 已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度  $v$ (千米/时)的平方成正比, 且比例系数为  $b$ ; 固定部分为  $a$  元.

- (I) 把全程运输成本  $y$ (元) 表示为速度  $v$ (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;
- (II) 为了使全程运输成本最小, 汽车应以多大速度行驶?

(23) (本小题满分 12 分)

如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别是  $BB_1, CD$  的中点.

- (I) 证明  $AD \perp D_1F$ ;
- (II) 求  $AE$  与  $D_1F$  所成的角;
- (III) 证明面  $AED \perp$  面  $A_1FD_1$ ;
- (IV) 设  $AA_1=2$ , 求三棱锥  $E-AA_1F$  的体积  $V_{E-AA_1F}$ .



(24) (本小题满分 12 分)

已知过原点  $O$  的一条直线与函数  $y=\log_8x$  的图像交于  $A, B$  两点, 分别过点  $A, B$  作  $y$  轴的平行线与函数的  $y=\log_2x$  的图像交于  $C, D$  两点.

- (I) 证明点  $C, D$  和原点  $O$  在同一条直线上;
- (II) 当  $BC$  平行于  $x$  轴时, 求点  $A$  的坐标.

(25) (本小题满分 12 分)

已知圆满足: ①截  $y$  轴所得弦长为 2; ②被  $x$  轴分成两段圆弧, 其弧长的比为 3: 1; ③

圆心到直线  $l: x-2y=0$  的距离为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . 求该圆的方程.

1997年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(文史类)参考解答及评分标准

说明:

一. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力, 并给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

三. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 第(1)一(10)题每小题4分, 第(11)一(15)题每小题5分. 满分65分.

(1)B (2)B (3)A (4)C (5)B (6)C (7)D (8)C (9)A (10)B (11)A (12)D  
(13)C (14)C (15)B

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分, 满分16分.

(16)4 (17) (4, 2) (18)  $2 - \sqrt{3}$  (19) ①, ④

注: 第(19)题多填、漏填和错填均给0分.

三、解答题

(20) 本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算等基础知识, 考查利用三角公式进行变形的技能和运算能力. 满分10分.

解法一: 将已知复数化为复数三角形式:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3},$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

依题意有  $z\omega + z\omega^3$

$$\begin{aligned} &= \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right) + \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}\right) \\ &= \left(\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{13\pi}{12}\right) + i \left(\sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{13\pi}{12}\right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

故复数  $z\omega + z\omega^3$  的模为  $\sqrt{2}$ ，辐角主值为  $\frac{5\pi}{6}$ 。

解法二： $z\omega + z\omega^3$

$$\begin{aligned} &= z\omega(1 + \omega^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) (1+i) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

(21) 本小题主要考查等差数列、等比数列、方程组等基础知识，考查运算能力。满分 11 分。

解：设等差数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = a$ ，公差为  $d$ ，则通项为

$$a_n = a + (n-1)d,$$

前  $n$  项和为

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d,$$

依题意有

$$\begin{cases} \frac{1}{3}S_3 \cdot \frac{1}{4}S_4 = \left(\frac{1}{5}S_5\right)^2 \\ \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{4}S_4 = 2 \end{cases}$$

其中  $S_5 \neq 0$ 。

由此可得

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\left(3a + \frac{3 \times 2}{2}d\right) \times \frac{1}{4}\left(4a + \frac{4 \times 3}{2}d\right) = \frac{1}{25}\left(5a + \frac{5 \times 4}{2}d\right)^2 \\ \frac{1}{3}\left(3a + \frac{3 \times 2}{2}d\right) + \frac{1}{4}\left(4a + \frac{4 \times 3}{2}d\right) = 2 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 3ad + 5d^2 = 0 \\ 2a + \frac{5}{2}d = 2 \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} d = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} d = -\frac{12}{5} \\ a = 4 \end{cases}$$

由此得

$$a_n = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{或 } a_n &= 4 - \frac{12}{5}(n-1) \\ &= \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n. \end{aligned}$$

经验证知时  $a_n = 1$ ,  $S_5 = 5$ , 或  $a_n = \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n$  时,  $S_5 = -4$ , 均适合题意.

故所求等差数列的通项为  $a_n = 1$ , 或  $a_n = \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n$ .

(22) 本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识, 考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力. 满分 12 分.

解: (1) 依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为  $\frac{S}{v}$ , 全程运输成本为

$$y = a \cdot \frac{S}{v} + bv^2 \cdot \frac{S}{v} = S\left(\frac{a}{v} + bv\right)$$

故所求函数及其定义域为

$$y = S\left(\frac{a}{v} + bv\right), \quad v \in (0, c]$$

(II) 依题意知  $S$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $v$  都为正数, 故有

$$S\left(\frac{a}{v} + bv\right) \geq 2S\sqrt{ab}.$$

当且仅当  $\frac{a}{v} = bv$ , 即  $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$  时上式中等号成立.

若  $\sqrt{\frac{a}{b}} \leq c$ , 则当  $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$  时, 全程运输成本  $y$  最小.

若  $\sqrt{\frac{a}{b}} > c$ , 当  $x \in (0, c]$  时, 有

$$S\left(\frac{a}{v} + bv\right) - S\left(\frac{a}{c} + bc\right) = S\left[\left(\frac{a}{v} - \frac{a}{c}\right) + (bv - bc)\right] = \frac{S}{vc} (c - v)(a - bcv).$$

因为  $c - v \geq 0$ , 且  $a > bcv$ , 故有

$$a - bcv \geq a - bc^2 > 0,$$

所以  $S\left(\frac{a}{v} + bv\right) \geq S\left(\frac{a}{c} + bc\right)$ , 且仅当  $v = c$  时等号成立.

也即当  $v = c$  时, 全程运输成本  $y$  最小.

综上知, 为使全程运输成本  $y$  最小, 当  $\frac{\sqrt{ab}}{b} \leq c$  时行驶速度应为  $v = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ ; 当

$\frac{\sqrt{ab}}{b} > c$  时行驶速度应为.

(23) 本小题主要考查直线与直线, 直线与平面, 平面与平面的位置关系, 考查逻辑推理和空间想象能力. 满分 12 分.

解: (I)  $\because AC_1$  是正方体,

$\therefore AD \perp \text{面 } DC_1$ .

又  $D_1F \subset \text{面 } DC_1$ ,

$\therefore AD \perp D_1F$ .

(II) 取  $AB$  中点  $G$ , 连结  $A_1G, FG$ .

因为  $F$  是  $CD$  的中点, 所以  $GF, AD$  平行且相等, 又  $A_1D_1, AD$  平行且相等, 所以  $GF, A_1D_1$  平行且相等, 故  $GFD_1A_1$  是平行四边形,

$A_1G \parallel D_1F$ .

设  $A_1G$  与  $AE$  相交于点  $H$ ,  $\angle AHA_1$  是  $AE$  与  $D_1F$  所成的角.

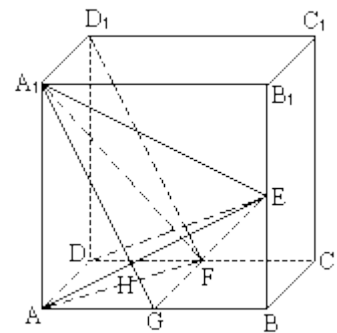
因为  $E$  是  $BB_1$  的中点, 所以

$$\text{Rt} \triangle A_1AG \cong \text{Rt} \triangle ABE, \quad \angle GA_1A = \angle GAH,$$

从而  $\angle AHA_1 = 90^\circ$ ,

也即直线  $AE$  与  $D_1F$  所成的角为直角.

(III) 由 (I) 知  $AD \perp D_1F$ , 由 (II) 知  $AE \perp D_1F$ , 又  $AD \cap AE = A$ ,



所以  $D_1F \perp$  面  $AED$ .

又因为  $D_1F \subset$  面  $A_1FD_1$ , 所以面  $AED \perp$  面  $A_1FD_1$ .

$$(IV) \because \text{体积 } V_{E-AA_1F} = V_{F-AA_1E},$$

又  $FG \perp$  面  $ABB_1A_1$ , 三棱锥  $F-AA_1E$  的高  $FG=AA_1=2$ ,

$$\text{面积 } S_{\Delta AA_1E} = \frac{1}{2} S_{\square ABB_1A_1} = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2.$$

$$\therefore V_{E-AA_1F} = \frac{1}{3} \times S_{\Delta AA_1E} \times FG = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$$

(24) 本小题主要考查对数函数图像、对数换底公式、对数方程、指数方程等基础知识, 考查运算能力和分析问题的能力, 满分 12 分.

解: (I) 设点  $A$ 、 $B$  的横坐标分别为  $x_1$ 、 $x_2$  由题设知,  $x_1 > 1$ ,  $x_2 > 1$ . 则点  $A$ 、 $B$  纵坐标分别为  $\log_8 x_1$ 、 $\log_8 x_2$ .

$$\text{因为 } A、B \text{ 在过点 } O \text{ 的直线上, 所以, } \frac{\log_8 x_1}{x_1} = \frac{\log_8 x_2}{x_2}$$

点  $C$ 、 $D$  坐标分别为  $(x_1, \log_2 x_1)$ ,  $(x_2, \log_2 x_2)$ .

$$\text{由于 } \log_2 x_1 = \frac{\log_8 x_2}{\log_8 2} = 3 \log_8 x_1,$$

$$\log_2 x_2 = \frac{\log_8 x_2}{\log_8 2} = 3 \log_8 x_2$$

$$OC \text{ 的斜率 } k_1 = \frac{\log_2 x_1}{x_1} = \frac{3 \log_8 x_1}{x_1},$$

$$OD \text{ 的斜率 } k_2 = \frac{\log_2 x_2}{x_2} = \frac{3 \log_8 x_2}{x_2}.$$

由此可知,  $k_1 = k_2$ ,

即  $O$ 、 $C$ 、 $D$  在同一条直线上.

(II) 由于  $BC$  平行于  $x$  轴知

$$\log_2 x_1 = \log_8 x_2,$$

$$\text{即得 } \log_2 x_1 = \frac{1}{3} \log_2 x_2,$$

$$\therefore x_2 = x_1^3.$$

代入  $x_2 \log_8 x_1 = x_1 \log_8 x_2$  得

$$x_1^3 \log_8 x_1 = 3x_1 \log_8 x_1.$$

由于  $x_1 > 1$  知  $\log_8 x_1 \neq 0$ ,

$$\therefore x_1^3 = 3x_1.$$

考虑  $x_1 > 1$  解得  $x_1 = \sqrt{3}$ .

于是点  $A$  的坐标为  $(\sqrt{3}, \log_8 \sqrt{3})$ .

(25) 本小题主要考查轨迹的思想, 考查综合运用知识建立曲线方程的能力. 满分 12 分.

解: 设圆  $P$  的圆心为  $P(a, b)$ , 半径为  $r$ , 则点  $P$  到  $x$  轴,  $y$  轴的距离分别为  $|b|$ ,

$|a|$ . 由题设知圆  $P$  截  $x$  轴所得劣弧对的圆心角为  $90^\circ$ , 知圆  $P$  截  $x$  轴所得的弦长为  $\sqrt{2}r$ . 故

$$r^2 = 2b^2$$

又圆  $P$  被  $y$  轴所截得的弦长为 2, 所以有

$$r^2 = a^2 + 1.$$

从而得  $2b^2 - a^2 = 1$ .

又因为  $P(a, b)$  到直线  $x - 2y = 0$  的距离为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $d = \frac{|a - 2b| \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2b| \sqrt{5}}{5}$ ,

即有  $a - 2b = \pm 1$ ,

由此有

$$\begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1 \\ a - 2b = -1 \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

于是  $r^2 = 2b^2 = 2$ ,

所求圆的方程是

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2, \text{ 或 } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$