

2006 年河北高考理科数学真题及答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$, $N=\{x||x|<2\}$, 则 ()

- A. $M \cap N = \emptyset$ B. $M \cap N = M$ C. $M \cup N = M$ D. $M \cup N = \mathbb{R}$

2. (5 分) 已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 ()

- A. $f(2x) = e^{2x} (x \in \mathbb{R})$ B. $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x (x > 0)$

- C. $f(2x) = 2e^x (x \in \mathbb{R})$ D. $f(2x) = \ln x + \ln 2 (x > 0)$

3. (5 分) 双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m=$ ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. -4 C. 4 D. $\frac{1}{4}$

4. (5 分) 如果复数 $(m^2+i)(1+mi)$ 是实数, 则实数 $m=$ ()

- A. 1 B. -1 C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

5. (5 分) 函数 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为 ()

- A. $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$ B. $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$

- C. $(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}), k \in \mathbb{Z}$ D. $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}), k \in \mathbb{Z}$

6. (5 分) $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 若 a、b、c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B=$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

7. (5 分) 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ()

- A. 16π B. 20π C. 24π D. 32π

8. (5 分) 抛物线 $y = -x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{5}$ D. 3

9. (5 分) 设平面向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 的和 $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$. 如果向量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, 满足 $|\vec{b}_i| = 2|\vec{a}_i|$, 且 \vec{a}_i 顺时针旋转 30° 后与 \vec{b}_i 同向, 其中 $i=1, 2, 3$, 则 ()

- A. $-\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$ B. $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$ C. $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3 = 0$ D. $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$

10. (5 分) 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1+a_2+a_3=15, a_1a_2a_3=80$, 则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$ ()

A. 120 B. 105 C. 90 D. 75

11. (5分) 用长度分别为2、3、4、5、6 (单位: cm) 的5根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ()

A. $8\sqrt{5}\text{cm}^2$ B. $6\sqrt{10}\text{cm}^2$ C. $3\sqrt{55}\text{cm}^2$ D. 20cm^2

12. (5分) 设集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 选择 I 的两个非空子集 A 和 B , 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 ()

A. 50种 B. 49种 C. 48种 D. 47种

二、填空题 (共4小题, 每小题4分, 满分16分)

13. (4分) 已知正四棱锥的体积为12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于 $\underline{\quad}$ °.

14. (4分) 设 $z = 2y - x$, 式中变量 x, y 满足下列条件:
$$\begin{cases} 2x - y \geq -1 \\ 3x + 2y \leq 23 \\ y \geq 1 \end{cases}$$
 则 z 的最大值为 $\underline{\quad}$.

15. (4分) 安排7位工作人员在5月1日至5月7日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在5月1日和2日. 不同的安排方法共有 $\underline{\quad}$ 种 (用数字作答).

16. (4分) 设函数 $f(x) = \cos(\sqrt{3}x + \phi)$ ($0 < \phi < \pi$). 若 $f(x) + f'(x)$ 是奇函数, 则 $\phi = \underline{\quad}$.

三、解答题 (共6小题, 满分74分)

17. (12分) ABC 的三个内角为 A, B, C , 求当 A 为何值时, $\cos A + 2\cos \frac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.

18. (12分) A, B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由4只小白鼠组成, 其中2只服用 A , 另2只服用 B , 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$.

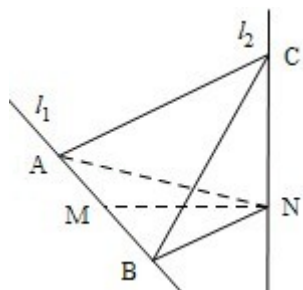
(I) 求一个试验组为甲类组的概率;

(II) 观察3个试验组, 用 ξ 表示这3个试验组中甲类组的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. (12分)如图, l_1 、 l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A 、 B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM=MB=MN$.

(I) 证明 $AC \perp NB$;

(II) 若 $\angle ACB=60^\circ$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



20. (12分)在平面直角坐标系 xOy 中, 有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点、离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆, 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C , 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x 、 y 轴的交点分别为 A 、 B , 且向量 $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$. 求:

(I) 点 M 的轨迹方程;

(II) $|\vec{OM}|$ 的最小值.

21. (14分)已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x} e^{-ax}$.

(I) 设 $a > 0$, 讨论 $y=f(x)$ 的单调性;

(II) 若对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > 1$, 求 a 的取值范围.

22. (12分)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$, $n=1, 2, 3, \dots$

(I) 求首项 a_1 与通项 a_n ;

(II) 设 $T_n = \frac{2^n}{S_n}$, $n=1, 2, 3, \dots$, 证明: $\sum_{i=1}^n T_i < \frac{3}{2}$.

2006年河北高考理科数学真题参考答案

一、选择题 (共12小题, 每小题5分, 满分60分)

1. (5分) 设集合 $M = \{x | x^2 - x < 0\}$, $N = \{x | |x| < 2\}$, 则 ()

A. $M \cap N = \emptyset$ B. $M \cap N = M$ C. $M \cup N = M$ D. $M \cup N = \mathbb{R}$

【分析】 M 、 N 分别是二次不等式和绝对值不等式的解集, 分别解出再求交集合并集.

【解答】解：集合 $M = \{x | x^2 - x < 0\} = \{x | 0 < x < 1\}$, $N = \{x | |x| < 2\} = \{x | -2 < x < 2\}$, $M \cap N = M$,
故选：B.

2. (5分) 已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 ()

- A. $f(2x) = e^{2x} (x \in \mathbb{R})$ B. $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x (x > 0)$
C. $f(2x) = 2e^x (x \in \mathbb{R})$ D. $f(2x) = \ln x + \ln 2 (x > 0)$

【分析】本题考查反函数的概念、互为反函数的函数图象的关系、求反函数的方法等相关知识和方法.

根据函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称可知 $f(x)$ 是 $y=e^x$ 的反函数, 由此可得 $f(x)$ 的解析式, 进而获得 $f(2x)$.

【解答】解：函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 所以 $f(x)$ 是 $y=e^x$ 的反函数, 即 $f(x) = \ln x$,
 $\therefore f(2x) = \ln 2x = \ln x + \ln 2 (x > 0)$,
选 D.

3. (5分) 双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m =$ ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. -4 C. 4 D. $\frac{1}{4}$

【分析】由双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 可求出该双曲线的方程, 从而求出 m 的值.

【解答】解：双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍,

$$\therefore m < 0, \text{ 且双曲线方程为 } -\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$\therefore m = -\frac{1}{4},$$

故选：A.

4. (5分) 如果复数 $(m^2 + i)(1 + mi)$ 是实数, 则实数 $m =$ ()

- A. 1 B. -1 C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

【分析】注意到复数 $a + bi (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ 为实数的充要条件是 $b = 0$

【解答】解：复数 $(m^2 + i)(1 + mi) = (m^2 - m) + (1 + m^3)i$ 是实数,

$$\therefore 1 + m^3 = 0, m = -1,$$

选 B.

5. (5分) 函数 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为 ()

A. $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in Z$ B. $(k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$

C. $(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}), k \in Z$ D. $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}), k \in Z$

【分析】先利用正切函数的单调性求出函数单调增时 $x + \frac{\pi}{4}$ 的范围 i , 进而求得 x 的范围.

【解答】解: 函数 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的单调增区间满足 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}$,

\therefore 单调增区间为 $(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}), k \in Z$,

故选 C

6. (5分) $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 若 a、b、c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B =$ ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【分析】根据等比数列的性质, 可得 $b = \sqrt{2}a$, 将 c、b 与 a 的关系结合余弦定理分析可得答案.

【解答】解: $\triangle ABC$ 中, a、b、c 成等比数列, 则 $b^2 = ac$,

由 $c=2a$, 则 $b = \sqrt{2}a$,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 4a^2 - 2a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$$

故选 B.

7. (5分) 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ()

A. 16π B. 20π C. 24π D. 32π

【分析】先求正四棱柱的底面边长, 然后求其对角线, 就是球的直径, 再求其表面积.

【解答】解: 正四棱柱高为 4, 体积为 16, 底面积为 4, 正方形边长为 2,

正四棱柱的对角线长即球的直径为 $2\sqrt{6}$,

∴球的半径为 $\sqrt{6}$ ，球的表面积是 24π ，

故选 C.

8. (5分) 抛物线 $y = -x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{5}$ D. 3

【分析】设抛物线 $y = -x^2$ 上一点为 $(m, -m^2)$ ，该点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离为

$$\frac{|4m - 3m^2 - 8|}{5},$$
 由此能够得到所求距离的最小值.

【解答】解：设抛物线 $y = -x^2$ 上一点为 $(m, -m^2)$ ，

该点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离为 $\frac{|4m - 3m^2 - 8|}{5}$,

分析可得，当 $m = \frac{2}{3}$ 时，取得最小值为 $\frac{4}{3}$ ，

故选 B.

9. (5分) 设平面向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 的和 $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$. 如果向量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ，满足

$|\vec{b}_i| = 2|\vec{a}_i|$ ，且 \vec{a}_i 顺时针旋转 30° 后与 \vec{b}_i 同向，其中 $i=1, 2, 3$ ，则 ()

- A. $-\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$ B. $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$ C. $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3 = 0$ D. $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$

【分析】三个向量的和为零向量，在这三个向量前都乘以相同的系数，我们可以把系数提出公因式，括号中各项的和仍是题目已知中和为零向量的三个向量，当三个向量都按相同的方向和角度旋转时，相对关系不变.

【解答】解：向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 的和 $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$ ，

向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 顺时针旋转 30° 后与 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 同向，

且 $|\vec{b}_i| = 2|\vec{a}_i|$ ，

∴ $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$ ，

故选 D.

10. (5分) 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ ， $a_1 a_2 a_3 = 80$ ，则 $a_{11} + a_{12} + a_{13} =$ ()

A. 120 B. 105 C. 90 D. 75

【分析】先由等差数列的性质求得 a_2 ，再由 $a_1a_2a_3=80$ 求得 d 即可.

【解答】解： $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，

$$\because a_1+a_2+a_3=15, a_1a_2a_3=80,$$

$$\therefore a_2=5,$$

$$\therefore a_1a_3=(5-d)(5+d)=16,$$

$$\therefore d=3, a_{12}=a_2+10d=35$$

$$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}=105$$

故选 B.

11. (5分) 用长度分别为 2、3、4、5、6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ()

A. $8\sqrt{5}\text{cm}^2$ B. $6\sqrt{10}\text{cm}^2$ C. $3\sqrt{55}\text{cm}^2$ D. 20cm^2

【分析】设三角形的三边分别为 a, b, c , 令 $p=\frac{a+b+c}{2}$, 则 $p=10$. 海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{10 \left[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3} \right]^3} = \frac{100\sqrt{3}}{9} \text{ 故排除 C, D,}$$

由于等号成立的条件为 $10-a=10-b=10-c$, 故“=”不成立, 推测当三边长相等时面积最大, 故考虑当 a, b, c 三边长最接近时面积最大, 进而得到答案.

【解答】解: 设三角形的三边分别为 a, b, c ,

$$\text{令 } p=\frac{a+b+c}{2}, \text{ 则 } p=10. \text{ 由海伦公式 } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{知 } S=\sqrt{10(10-a)(10-b)(10-c)} \leq \sqrt{10 \left[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3} \right]^3} = \frac{100\sqrt{3}}{9} <_{20} <_3$$

$$\sqrt{55}$$

由于等号成立的条件为 $10-a=10-b=10-c$, 故“=”不成立,

$$\therefore S < 20 <_3 \sqrt{55}.$$

排除 C, D.

由以上不等式推测, 当三边长相等时面积最大, 故考虑当 a, b, c 三边长最接近时面积最大, 此时三边长为 7, 7, 6, 用 2、5 连接, 3、4 连接各为一边, 第三边长为 7 组成三角形, 此

三角形面积最大，面积为 $6\sqrt{10}\text{cm}^2$,

故选 B.

12. (5分) 设集合 $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. 选择 I 的两个非空子集 A 和 B, 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 ()

A. 50 种 B. 49 种 C. 48 种 D. 47 种

【分析】解法一, 根据题意, 按 A、B 的元素数目不同, 分 9 种情况讨论, 分别计算其选法种数, 进而相加可得答案;

解法二, 根据题意, B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则集合 A、B 中没有相同的元素, 且都不是空集, 按 A、B 中元素数目之和的情况, 分 4 种情况讨论, 分别计算其选法种数, 进而相加可得答案.

【解答】解:

解法一, 若集合 A、B 中分别有一个元素, 则选法种数有 $C_5^2=10$ 种;

若集合 A 中有一个元素, 集合 B 中有两个元素, 则选法种数有 $C_5^3=10$ 种;

若集合 A 中有一个元素, 集合 B 中有三个元素, 则选法种数有 $C_5^4=5$ 种;

若集合 A 中有一个元素, 集合 B 中有四个元素, 则选法种数有 $C_5^5=1$ 种;

若集合 A 中有两个元素, 集合 B 中有一个元素, 则选法种数有 $C_5^3=10$ 种;

若集合 A 中有两个元素, 集合 B 中有两个元素, 则选法种数有 $C_5^4=5$ 种;

若集合 A 中有两个元素, 集合 B 中有三个元素, 则选法种数有 $C_5^5=1$ 种;

若集合 A 中有三个元素, 集合 B 中有一个元素, 则选法种数有 $C_5^4=5$ 种;

若集合 A 中有三个元素, 集合 B 中有两个元素, 则选法种数有 $C_5^5=1$ 种;

若集合 A 中有四个元素, 集合 B 中有一个元素, 则选法种数有 $C_5^5=1$ 种;

总计有 49 种, 选 B.

解法二: 集合 A、B 中没有相同的元素, 且都不是空集,

从 5 个元素中选出 2 个元素, 有 $C_5^2=10$ 种选法, 小的给 A 集合, 大的给 B 集合;

从 5 个元素中选出 3 个元素, 有 $C_5^3=10$ 种选法, 再分成 1、2 两组, 较小元素的一组给 A 集合, 较大元素的一组的给 B 集合, 共有 $2 \times 10=20$ 种方法;

从 5 个元素中选出 4 个元素, 有 $C_5^4=5$ 种选法, 再分成 1、3; 2、2; 3、1 两组, 较小元素的一组给 A 集合, 较大元素的一组的给 B 集合, 共有 $3 \times 5=15$ 种方法;

从 5 个元素中选出 5 个元素，有 $C_5^5=1$ 种选法，再分成 1、4；2、3；3、2；4、1 两组，较小元素的一组给 A 集合，较大元素的一组的给 B 集合，共有 $4 \times 1=4$ 种方法；
总计为 $10+20+15+4=49$ 种方法。选 B.

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13. (4 分) 已知正四棱锥的体积为 12，底面对角线长为 $2\sqrt{6}$ ，则侧面与底面所成的二面角等于 60° .

【分析】先根据底面对角线长求出边长，从而求出底面积，再由体积求出正四棱锥的高，求出侧面与底面所成的二面角的平面角的正切值即可.

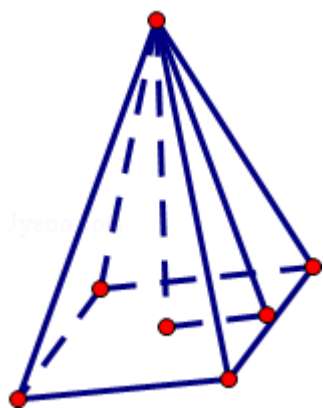
【解答】解：正四棱锥的体积为 12，底面对角线的长为 $2\sqrt{6}$ ，底面边长为 $2\sqrt{3}$ ，底面积为 12，

所以正四棱锥的高为 3，

则侧面与底面所成的二面角的正切 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ，

\therefore 二面角等于 60° ，

故答案为 60°



14. (4 分) 设 $z=2y-x$ ，式中变量 x 、 y 满足下列条件：
$$\begin{cases} 2x-y \geq -1 \\ 3x+2y \leq 23 \\ y \geq 1 \end{cases}$$
，则 z 的最大值为

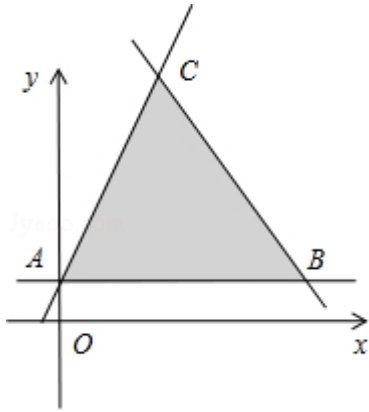
11 .

【分析】先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值， $z=2y-x$ 表示直线在 y 轴上的截距，只需求出可行域直线在 y 轴上的截距最大值即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} 2x-y \geq -1 \\ 3x+2y \leq 23 \\ y \geq 1 \end{cases}$$
，在坐标系中画出图象，

三条线的交点分别是 $A(0, 1)$, $B(7, 1)$, $C(3, 7)$,

在 $\triangle ABC$ 中满足 $z=2y-x$ 的最大值是点 C , 代入得最大值等于 11.



故填: 11.

15. (4分) 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都都不安排在 5 月 1 日和 2 日. 不同的安排方法共有 2400 种 (用数字作答).

【分析】本题是一个分步计数问题, 先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班, 有 A_5^2 种排法, 其余 5 人再进行排列, 有 A_5^5 种排法, 根据分步计数原理得到结果.

【解答】解: 由题意知本题是一个分步计数问题,
首先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班, 有 $A_5^2=20$ 种排法,
其余 5 人再进行排列, 有 $A_5^5=120$ 种排法,
 \therefore 根据分步计数原理知共有 $20 \times 120=2400$ 种安排方法.

故答案为: 2400

16. (4分) 设函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\Phi)$ ($0 < \Phi < \pi$). 若 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数, 则 $\Phi = \underline{\frac{\pi}{6}}$.

【分析】对函数求导结合两角差的正弦公式, 代入整理可得, $f(x)+f'(x)=2\sin(\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}x-\Phi)$, 根据奇函数的性质可得 $x=0$ 时函数值为 0, 代入可求 Φ 的值

【解答】解: $f'(x)=-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\Phi)$,
则 $f(x)+f'(x)=\cos(\sqrt{3}x+\Phi)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\Phi)=2\sin(\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}x-\Phi)$, 为奇函数,

令 $g(x) = f(x) + f'(x)$, 即函数 $g(x)$ 为奇函数,

$$g(0) = 0 \Rightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) = 0,$$

$$\because 0 < \phi < \pi,$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{6}.$$

故答案为: $\frac{\pi}{6}$.

三、解答题 (共 6 小题, 满分 74 分)

17. (12 分) ABC 的三个内角为 A、B、C, 求当 A 为何值时, $\cos A + 2\cos\frac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.

【分析】利用三角形中内角和为 π , 将三角函数变成只含角 A, 再利用三角函数的二倍角公式将函数化为只含角 $\frac{A}{2}$, 利用二次函数的最值求出最大值

【解答】解: 由 $A+B+C = \pi$, 得 $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$,

$$\text{所以有 } \cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}.$$

$$\cos A + 2\cos\frac{B+C}{2} = \cos A + 2\sin\frac{A}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}$$

$$= -2\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

当 $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, $\cos A + 2\cos\frac{B+C}{2}$ 取得最大值为 $\frac{3}{2}$

故最大值为 $\frac{3}{2}$

18. (12 分) A、B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A, 另 2 只服用 B, 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求一个试验组为甲类组的概率;

(II) 观察 3 个试验组, 用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

【分析】(1) 由题意知本题是一个独立重复试验, 根据所给的两种药物对小白鼠有效的概率,

计算出小白鼠有效的只数的概率，对两种药物有效的小白鼠进行比较，得到甲类组的概率。

(2) 由题意知本试验是一个甲类组的概率不变，实验的条件不变，可以看做是一个独立重复试验，所以变量服从二项分布，根据二项分布的性质写出分布列和期望。

【解答】解：(1) 设 A_i 表示事件“一个试验组中，服用 A 有效的小鼠有 i 只”， $i=0, 1, 2$,

B_i 表示事件“一个试验组中，服用 B 有效的小鼠有 i 只”， $i=0, 1, 2$,

$$\text{依题意有：} P(A_1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, P(A_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, P(B_0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(B_1) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 所求概率为：}$$

$$P = P(B_0 \cdot A_1) + P(B_0 \cdot A_2) + P(B_1 \cdot A_2)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

(II) ξ 的可能值为 0, 1, 2, 3 且 $\xi \sim B(3, \frac{4}{9})$.

$$P(\xi=0) = \left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{125}{729},$$

$$P(\xi=1) = C_3^1 \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{100}{243},$$

$$P(\xi=2) = C_3^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \frac{5}{9} = \frac{80}{243},$$

$$P(\xi=3) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$$

$\therefore \xi$ 的分布列为：

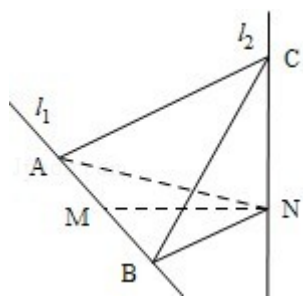
ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

$$\therefore \text{数学期望 } E\xi = 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3}.$$

19. (12分) 如图， l_1 、 l_2 是互相垂直的异面直线，MN 是它们的公垂线段。点 A、B 在 l_1 上，C 在 l_2 上， $AM=MB=MN$ 。

(I) 证明 $AC \perp NB$ ；

(II) 若 $\angle ACB=60^\circ$ ，求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值。



【分析】(1) 欲证 $AC \perp NB$, 可先证 $BN \perp$ 面 ACN , 根据线面垂直的判定定理只需证 $AN \perp BN$, $CN \perp BN$ 即可;

(2) 易证 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心, 连接 BH , $\angle NBH$ 为 NB 与平面 ABC 所成的角, 在 $Rt\triangle NHB$ 中求出此角即可.

【解答】解: (I) 由已知 $l_2 \perp MN$, $l_2 \perp l_1$, $MN \cap l_1 = M$, 可得 $l_2 \perp$ 平面 ABN .

由已知 $MN \perp l_1$, $AM = MB = MN$,

可知 $AN = NB$ 且 $AN \perp NB$.

又 AN 为 AC 在平面 ABN 内的射影.

$\therefore AC \perp NB$

(II) $\because AM = MB = MN$, MN 是它们的公垂线段,

由中垂线的性质可得 $AN = BN$,

$\therefore Rt\triangle CAN \cong Rt\triangle CNB$,

$\therefore AC = BC$, 又已知 $\angle ACB = 60^\circ$,

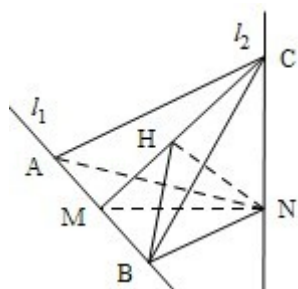
因此 $\triangle ABC$ 为正三角形.

$\therefore Rt\triangle ANB \cong Rt\triangle CNB$,

$\therefore NC = NA = NB$, 因此 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心,

连接 BH , $\angle NBH$ 为 NB 与平面 ABC 所成的角.

在 $Rt\triangle NHB$ 中, $\cos \angle NBH = \frac{HB}{NB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} AB}{\frac{\sqrt{2}}{2} AB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



20. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点、离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆, 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C , 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切

线与 x 、 y 轴的交点分别为 A 、 B , 且向量 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. 求:

(I) 点 M 的轨迹方程;

(II) $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值.

【分析】(1) 利用相关点法求轨迹方程, 设 $P(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, 利用点 M 的坐标来表示点 P 的坐标, 最后根据 x_0, y_0 满足 C 的方程即可求得;

(2) 先将 $|\overrightarrow{OM}|$ 用含点 M 的坐标的函数来表示, 再利用基本不等式求此函数的最小值即可.

【解答】解: (I) 椭圆方程可写为: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 式中 $a > b > 0$, 且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 得 $a^2 = 4$,

$b^2 = 1$,

所以曲线 C 的方程为: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ($x > 0, y > 0$). $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ ($0 < x < 1$) $y' = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$

设 $P(x_0, y_0)$, 因 P 在 C 上, 有 $0 < x_0 < 1, y_0 = 2\sqrt{1 - x_0^2}$, $y'|_{x=x_0} = -\frac{4x_0}{y_0}$, 得切线 AB 的方

程为:

$$y = -\frac{4x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0.$$

设 $A(x, 0)$ 和 $B(0, y)$, 由切线方程得 $x = \frac{1}{x_0}, y = \frac{4}{y_0}$.

由 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 得 M 的坐标为 (x, y) , 由 x_0, y_0 满足 C 的方程, 得点 M 的轨迹方程为:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1 \quad (x > 1, y > 2)$$

$$(II) |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2, \quad y^2 = \frac{4}{1 - \frac{1}{x^2}} = 4 + \frac{4}{x^2 - 1},$$

$$\therefore |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 - 1} + 5 \geq 4 + 5 = 9.$$

且当 $x^2 - 1 = \frac{4}{x^2 - 1}$, 即 $x = \sqrt{3} > 1$ 时, 上式取等号.

故 $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值为 3.

21. (14分) 已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x} e^{-ax}$.

(I) 设 $a > 0$, 讨论 $y = f(x)$ 的单调性;

(II) 若对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > 1$, 求 a 的取值范围.

【分析】(I) 根据分母不为 0 得到 $f(x)$ 的定义域, 求出 $f'(x)$, 利用 a 的范围得到导函数的正负讨论函数的增减性即可得到 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > 1$ 即要讨论当 $0 < a \leq 2$ 时, 当 $a > 2$ 时, 当 $a \leq 0$ 时三种情况讨论得到 a 的取值范围.

【解答】解: (I) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. 对 $f(x)$ 求导数得 $f'(x) = \frac{ax^2 + 2 - a}{(1-x)^2} e^{-ax}$.

(i) 当 $a=2$ 时, $f'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^2} e^{-2x}$, $f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$

均大于 0,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ 为增函数.

(ii) 当 $0 < a < 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ 为增函数.

(iii) 当 $a > 2$ 时, $0 < \frac{a-2}{a} < 1$, 令 $f'(x) = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = -\sqrt{\frac{a-2}{a}}, x_2 = \sqrt{\frac{a-2}{a}}.$$

当 x 变化时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\sqrt{\frac{a-2}{a}})$	$(-\sqrt{\frac{a-2}{a}}, \sqrt{\frac{a-2}{a}})$	$(\sqrt{\frac{a-2}{a}}, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	+	-	+	+

(x)				
f (x)	↑	↓	↑	↑

$f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{a-2}{a}})$, $(\sqrt{\frac{a-2}{a}}, 1)$, $(1, +\infty)$ 为增函数, $f(x)$ 在 $(-\sqrt{\frac{a-2}{a}}, \sqrt{\frac{a-2}{a}})$ 为减函数.

(II) (i) 当 $0 < a \leq 2$ 时, 由 (I) 知: 对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > f(0) = 1$.

(ii) 当 $a > 2$ 时, 取 $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{a}} \in (0, 1)$, 则由 (I) 知 $f(x_0) < f(0) = 1$

(iii) 当 $a \leq 0$ 时, 对任意 $x \in (0, 1)$, 恒有 $\frac{1+x}{1-x} > 1$ 且 $e^{-ax} \geq 1$, 得 $f(x) = \frac{1+x}{1-x} e^{-ax} \geq \frac{1+x}{1-x} > 1$.

综上所述且仅当 $a \in (-\infty, 2]$ 时, 对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > 1$.

22. (12分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$, $n=1, 2, 3, \dots$

(I) 求首项 a_1 与通项 a_n ;

(II) 设 $T_n = \frac{2^n}{S_n}$, $n=1, 2, 3, \dots$, 证明: $\sum_{i=1}^n T_i < \frac{3}{2}$.

【分析】对于 (I) 首先由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和求首项 a_1 与通项 a_n , 可先求出 S_{n-1} , 然后有 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 公比为 4 的等比数列, 从而求解;

对于 (II) 已知 $T_n = \frac{2^n}{S_n}$, $n=1, 2, 3, \dots$, 将 $a_n = 4^n - 2^n$ 代入 $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$, $n=1, 2,$

3, 得 $S_n = \frac{4}{3} \times (4^n - 2^n) - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times (2^{n+1} - 1)(2^{n+1} - 2)$

然后再利用求和公式进行求解.

【解答】解: (I) 由 $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$, $n=1, 2, 3$, ①得 $a_1 = S_1 = \frac{4}{3}a_1 - \frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3}$

所以 $a_1 = 2$.

再由①有 $S_{n-1} = \frac{4}{3}a_{n-1} - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$, $n=2, 3, 4,$

将①和②相减得： $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{4}{3}(a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{3} \times (2^{n+1} - 2^n)$, $n=2, 3$,

整理得： $a_n + 2^n = 4(a_{n-1} + 2^{n-1})$, $n=2, 3$,

因而数列 $\{a_n + 2^n\}$ 是首项为 $a_1 + 2 = 4$, 公比为 4 的等比数列, 即: $a_n + 2^n = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$, $n=1, 2, 3$,

因而 $a_n = 4^n - 2^n$, $n=1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \text{(II) 将 } a_n = 4^n - 2^n \text{ 代入①得 } S_n &= \frac{4}{3} \times (4^n - 2^n) - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times (2^{n+1} - 1)(2^{n+1} - 2) \\ &= \frac{2}{3} \times (2^{n+1} - 1)(2^n - 1) \end{aligned}$$

$$T_n = \frac{2^n}{S_n} = \frac{3}{2} \times \frac{2^n}{(2^{n+1} - 1)(2^n - 1)} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right)$$

$$\text{所以, } \sum_{i=1}^n T_i = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^i - 1} - \frac{1}{2^{i+1} - 1} \right) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) < \frac{3}{2} \left(1 - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) < \frac{3}{2}$$