绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.

4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．不等式 $\frac{x}{2x-1}<0$ 的解为____.

2．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2+a_3+a_4=30$，则 $a_2+a_3=$____.

3．设 $m\in\mathbf{R}$，$m^2+m-2+(m^2-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数，其中 i 是虚数单位，则 $m=$____.

4．若 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则y =____.

5．已知 ΔABC 的内角 A、B、C 所对的边分别是 a，b，c．若 $a^2+ab+b^2-c^2=0$，则角 C 的大小是____.

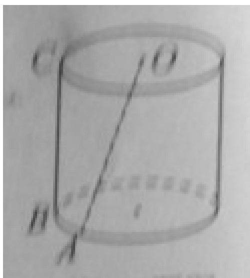
6．某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%．在一次考试中，男、女生平均分数分别为75、80，则这次考试该年级学生平均分数为____.

7．设常数 $a\in\mathbf{R}$．若 $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为-10，则 $a=$____.

8．方程 $\frac{9}{3^x-1}+1=3^x$ 的实数解为____.

9．若 $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{1}{3}$，则 $\cos(2x-2y)=$____.

10．已知圆柱 Ω 的母线长为 l，底面半径为 r，O 是上地面圆心，A、B 是下底面圆心上两个不同的点，BC 是母线，如图．若直线 OA 与 BC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$，则 $\frac{1}{r}=$____.



第10题图

11．盒子中装有编号为1,2,3,4,5,6,7的七个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是____（结果用最简分数表示）.

12．设 AB 是椭圆 Γ 的长轴，点 C 在 Γ 上，且 $\angle CBA=\frac{\pi}{4}$．若 $AB=4$，$BC=\sqrt{2}$，则 Γ 的两个焦点之间的距离为____.

13．设常数 $a>0$，若 $9x+\frac{a^2}{x}\ge a+1$ 对一切正实数 x 成立，则 a 的取值范围为____.

14．已知正方形 $ABCD$ 的边长为1．记以 A 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{a_1}$、

$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$；以 C 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{c_1}$、$\overrightarrow{c_2}$、$\overrightarrow{c_3}$．若 $i,j,k,l\in\{1,2,3\}$ 且 $i\ne j,k\ne l$，则 $\left(\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c_k}+\overrightarrow{c_l}\right)$ 的最小值是____．

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分．

15．函数 $f\left(x\right)=x^2-1\left(x\ge1\right)$ 的反函数为 $f^{-1}\left(x\right)$，则 $f^{-1}\left(2\right)$ 的值是（　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$-\sqrt{3}$　　（C）$1+\sqrt{2}$　　（D）$1-\sqrt{2}$

16．设常数 $a\in\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\mid\left(x-1\right)\left(x-a\right)\ge0\right\}$，$B=\left\{x\mid x\ge a-1\right\}$．若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围为（　）

（A）$\left(-\infty,2\right)$　　（B）$\left(-\infty,2\right]$　　（C）$\left(2,+\infty\right)$　　（D）$\left[2,+\infty\right)$

17．钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的（　）

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分又非必要条件

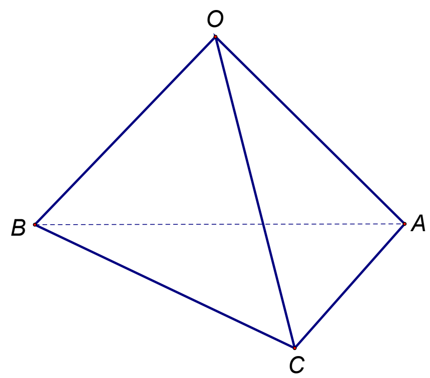
18．记椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{ny^2}{4n+1}=1$ 围成的区域（含边界）为 $\Omega_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，当点 $\left(x,y\right)$ 分别在 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots$ 上时，$x+y$ 的最大值分别是 $M_1,M_2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$（　）

（A）0　（B）$\dfrac{1}{4}$　(C) 2　(D) $2\sqrt{2}$

三．解答题（本大题共有5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域写出必要的步骤．

19．（本题满分12分）

如图，正三棱锥 $O-ABC$ 底面边长为 2，高为 1，求该三棱锥的体积及表面积．



第19题图

20．（本题满分14分）本题共有2个小题．第1小题满分5分，第2小题满分9分．

甲厂以 x 千米/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求 $1\le x\le10$），每小时可获得的利润是 $100(5x+1-\dfrac{3}{x})$ 元．

（1）求证：生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2})$；

（2）要使生产 900 千克该产品获得的利润最大，问：甲厂应该如何选取何种生产速度？并求此最大利润．

21．（本题满分14分）本题共有2个小题．第1小题满分6分，第2小题满分8分．

曹亚辉高中物理 www.zhidaowuli.com

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$，其中常数 $\omega>0$．

（1）令 $\omega=1$，判断函数 $F(x)=f(x)+f(x+\dfrac{\pi}{2})$ 的奇偶性并说明理由；

（2）令 $\omega=2$，将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再往上平移1个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像．对任意的 $a\in R$，求 $y=g(x)$ 在区间 $[a,a+10\pi]$ 上零点个数的所有可能值．

22．（本题满分16分）本题共有3个小题．第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分．

已知函数 $f(x)=2-|x|$．无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n),n\in N^*$．

（1）若 $a_1=0$，求 a_2，a_3，a_4；

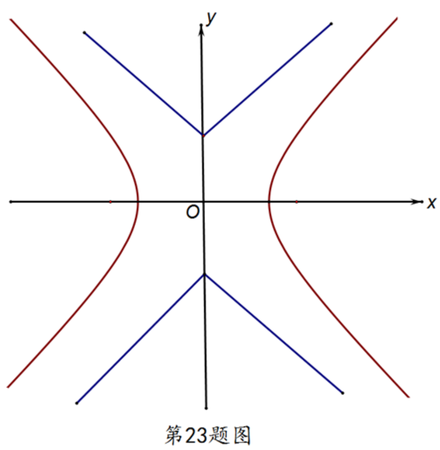
（2）若 $a_1>0$，且 a_1，a_2，a_3 成等比数列，求 a_1 的值；

（3）是否存在 a_1，使得 a_1，a_2，a_3，…，a_n …成等差数列？若存在，求出所有这样的 a_1；若不存在，说明理由．

23．（本题满分18分）本题共有3个小题．第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分．

如图，已知双曲线 C_1：$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$，曲线 C_2：$|y|=|x|+1$．P 是平面内一点，若存在过点 P 的直线与 C_1、C_2 都有公共点，则称 P 为“C_1-C_2 型点”．

（1）在正确证明 C_1 的左焦点是“C_1-C_2 型点”时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；



第23题图

（2）设直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点，求证 $|k|>1$，进而证明原点不是“C_1-C_2 型点；

（3）求证：圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内的点都不是“C_1-C_2 型点”.

2013年上海高考数学试题（文科）

参考答案

一． 填空题

1. $0 < X < \frac{1}{2}$

2. 15

3. -2

4. 1

5. $\frac{2\pi}{3}$

6. 78

7. -2

8. $\log_3 4$

9. $-\frac{7}{9}$

10. $\sqrt{3}$

11. $\frac{5}{7}$

12. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

13. $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$

14. -5

二． 选择题

题号	15	16	17	18
代号	A	B	A	D

三． 解答题

19.解：由已知条件可知，正三棱锥O-ABC的底面△ABC是边长为2的正三角形。

经计算得底面△ABC的面积为$\sqrt{3}$

所以该三锥的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

设O’是正三角形ABC的中心

由正三棱锥的性质可知，OO’垂直于平面ABC

延长AO’交BC于D，得AD=$\sqrt{3}$,O’D=$\frac{\sqrt{3}}{3}$

又因为OO’=1，所以正三棱锥的斜高OD=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故侧面积为$\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}$=$2\sqrt{3}$

所以该三棱锥的表面积为$\sqrt{3}$+$2\sqrt{3}$=$3\sqrt{3}$

因此，所求三棱锥的体积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，表面积为$3\sqrt{3}$

20.解：

（1）生产a千克该产品，所用的时间是$\frac{a}{x}$小时

所获得的利润为$100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{a}{x}$

所以生产a千克该产品所获得的利润为100a$\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$元

（2）生产900千克该产品，获得的利润为$90000\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$，

1≤x≤10,记f（x）$=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+5,1\le x\le 10$

则f（x）$=-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}+5$,当且仅当$x=6$时取到最大值。

获得最大利润$90000\times\frac{61}{12}$=457500元。

因此甲厂应以6千克/小时的速度生产，可获得最大利润457500元。

21.解：（1）f（x）$=2\sin x$,　　F（x）=　　f（x）+　　$f$$\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2(\sin x+\cos x)$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2},F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0,F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne F\left(\frac{\pi}{4}\right),F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne -F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

所以，F（x）既不是奇函数也不是偶函数。

（2）f（x）$=2\sin x$,

将y=

f（x）的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再向上平移1个单位后

得到$y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$的图像，所以个g（x)=$2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$

令$g(x)=0$,得$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$或$x=k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\subset z)$

因为$[a,a+10\pi]$上零点个数为21

当a不是零时，

$a+k\pi(k\subset z)$也都不是零点，区间$\left[a+k\pi,a+(k+1)\pi\right]$上恰有两个零点，故在$\left[a,a+10\pi\right]$上有20个零点。

综上，$y=g(x)$在$\left[a,a+10\pi\right]$上零点个数的所有可能值为21或20.

22.解：（1）$a_2=2,a_3=0,a_4=2$

（2）$a_2=2-|a_1|=2-a_1,a_3=2-|a_2|=2-|2-a_1|$

①当$0<a_1\le 2$时，$a_3=2-(2-a_1)=a_1$,所以$a_1^2=(2-a_1)^2$,得$a_1=1$

②当$a_1>2$时，

$a_3=2-(a_1-2)=4-a_1$,所以$a_1(4-a_1)=(2-a_1)^2$,得$a=2-\sqrt{2}$(舍去）或$a_1=2+\sqrt{2}$

综合①②得$a_1=1$或$a_1=2+\sqrt{2}$

（3）假设这样的等差数列存在，那么$a_2=2-|a_1|,a_3=2-\ \left|2-|a_1|\right|$

由$2a_2=a_1+a_3$得$2-a_1+\left|2-|a_1|\right|=2|a_1|(*)$

以下分情况讨论：

①当$a_1>2$时，由（*）得$a_1=0$,与$a_1>2$矛盾

②当$0<a_1\le 2$时，有（*）得$a_1=1$，从而$a_n=1(n=1,2,...)$

所以$\{a_n\}$是一个的等差数列

③当$a_1\le 0$时，则公差$d=a_2-a_1=(a_1+2)-a_1=2>0$，因此存在m≧2使得$a_m=a_1+2(m-1)>2$.此时$d=a_{m+1}-a_m=2-|a_m|-a_m<0$，矛盾

综合①②③可知，当且仅当

$a_1=1$时，$a_1,a_2,a_3......$构成等差数列

23．解：（1）C_1的左焦点为$F(-\sqrt{3},0)$，过F的直线$x=-\sqrt{3}$与C_1交于$(-\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$，与$C_2$交于$(-\sqrt{3},\pm(\sqrt{3}+1))$，故$C_1$的左焦点为“$C_1$-$C_2$型点”，且直线可以为$x=-\sqrt{3}$；

（2）直线$y=kx$与C_2有交点，则

$\begin{cases}y=kx\\|y|=|x|+1\end{cases}\Rightarrow(|k|-1)|x|=1$，若方程组有解，则必须$|k|>1$；

直线$y=kx$与C_2有交点，则

$\begin{cases}y=kx\\x^2-2y^2=2\end{cases}\Rightarrow(1-2k^2)x^2=2$，若方程组有解，则必须$k^2<\frac{1}{2}$

故直线$y=kx$至多与曲线C_1和C_2中的一条有交点，即原点不是“C_1-C_2型点”。

（3）显然过圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内一点的直线 l 若与曲线C_1有交点，则斜率必存在

；

根据对称性，不妨设直线 l 斜率存在且与曲线C_2交于点 $(t,t+1)(t\ge 0)$，则 $l: y=(t+1)=k(x-t)\Rightarrow kx-y+(1+t-kt)=0$

直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内部有交点，故 $\frac{|1+t-kt|}{\sqrt{k^2+1}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

化简得，$(1+t-tk)^2<\frac{1}{2}(k^2+1)$。。。。。。。。。。。。①

若直线 l 与曲线C_1有交点，则

$$\begin{cases} y=kx-kt+t+1 \\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}\Rightarrow (k^2-\frac{1}{2})x^2+2k(1+t-kt)x+(1+t-kt)^2+1=0$$

$$\Delta=4k^2(1+t-kt)^2-4(k^2-\frac{1}{2})[(1+t-kt)^2+1]\ge 0\Rightarrow (1+t-kt)^2\ge 2(k^2-1)$$

化简得，$(1+t-kt)^2\ge 2(k^2-1)$。。。。。②

由①②得，$2(k^2-1)\le(1+t-tk)^2<\frac{1}{2}(k^2+1)\Rightarrow k^2<1$

但此时，因为 $t\ge 0,[1+t(1-k)]^2\ge 1,\frac{1}{2}(k^2+1)<1$，即①式不成立；

当 $k^2=\frac{1}{2}$ 时，①式也不成立

综上，直线 l 若与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内有交点，则不可能同时与曲线C_1和C_2有交点

，

即圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内的点都不是“C_1-C_2型点”.

2013年全国普通高等学校招生统一考试

上海 数学试卷（文史类）

考生注意：

1. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名.

2. 本试卷共有23道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1.不等式$\frac{x}{2x-1}$<0的解为 __$(0,\frac{1}{2})$__.

【答案】 $(0,\frac{1}{2})$

【解析】 $x(2x-1)<0 \Rightarrow x \in (0,\frac{1}{2})$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，若a_1+ a_2+ a_3+ a_4=30，则a_2+ a_3= __15__.

【答案】 15

【解析】 $a_1+a_2+a_3+a_4=2(a_2+a_3)=30 \Rightarrow a_2+a_3=15$

3. 设m∈R, $m^2+m-2+(m^2-1)i$是纯虚数，其中i是虚数单位，则m=_____.

【答案】 -2

【解析】 $m^2+m-2+(m^2-1)i\text{是纯虚数} \Rightarrow \begin{cases} m^2+m-2=0 \\ m^2-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow m=-2$

4. 已知$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$=0，$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$=1，则y= __1__ .

【答案】 1

【解析】 已知$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=x-2=0 \Rightarrow x=2$，又$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=x-y=1$

联立上式，解得$x=2, y=1$,

5. 已知ΔABC的内角A、B、C所对的边分别是a、b、c. 若$a^2+ab+b^2-c^2=0$，则角C的大小是__$\frac{2}{3}\pi$__.

【答案】 $\frac{2}{3}\pi$

【解析】 $a^2+ab+b^2-c^2=0 \Rightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-1}{2} \Rightarrow C=\frac{2}{3}\pi$

6.某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%.在一次考试中，男、女生平均分数分别是75、80，则这次考试该年级学生平均分数为 __78__.

【答案】 78

【解析】 $\text{平均成绩}=\frac{40}{100}\cdot 75+\frac{60}{100}\cdot 80=78$

7.设常数a∈R. 若$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$的二项展开式中$x^7$项的系数为-10，则a= __-2__.

【答案】-2

【解析】$(x^2+\dfrac{a}{x})^5 \Rightarrow C_5^r(x^2)^{5-r}(\dfrac{a}{x})^r=-10x^7 \Rightarrow r=1, C_5^1a=-10$

$\Rightarrow 5a=-10, a=-2$

8. 方程$\dfrac{9}{3^x-1}+1=3^x$的实数解为 __$\log_3 4$__.

【答案】$\log_3 4$

【解析】

$\dfrac{9}{3^x-1}+1=3^x \Rightarrow \dfrac{9}{3^x-1}=3^x-1 \Rightarrow 3^x-1=\pm 3 \Rightarrow 3^x=\pm 3+1>0 \Rightarrow 3^x=4 \Rightarrow x=\log_3 4$

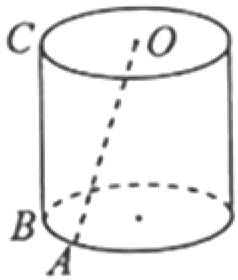
9. 若cosxcosy+sinxsiny=$\dfrac{1}{3}$，则cos(2x-2y)= _$-\dfrac{7}{9}$_.

【答案】$-\dfrac{7}{9}$

【解析】

$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos 2(x-y)=2\cos^2(x-y)-1=-\dfrac{7}{9}$

10. 已知圆柱Ω的母线长为l，底面半径为r，O是上底面圆心，A、B是下底面圆周上的两个不同的点，BC是母线，如图. 若直线OA与BC所成角的大小为$\dfrac{\pi}{6}$，则$\dfrac{l}{r}$= __$\sqrt{3}$___ .



第 10 题图

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】由题知，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{r}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{l}{r}=\sqrt{3}$

11.盒子中装有编号为1，2，3，4，5，6，7的七个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是 _$\dfrac{5}{7}$_ （结果用最简分数表示）.

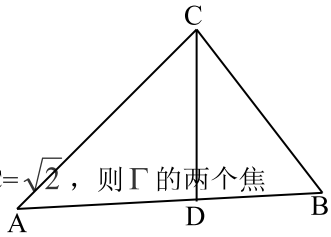
【答案】$\dfrac{5}{7}$

【解析】考查排列组合；概率计算策略：正难则反。

从4个奇数和3个偶数共7个数中任取2个，共有$C_7^2=21$个

2个数之积为奇数$\Rightarrow$2个数分别为奇数，共有$C_4^2=6$个.

所以2个数之积为偶数的概率$P=1-\dfrac{C_4^2}{C_7^2}=1-\dfrac{6}{21}=\dfrac{5}{7}$



12.设AB是椭圆Γ的长轴，点C在Γ上，且$\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$.若AB=4，BC=$\sqrt{2}$，则Γ的两个焦点之间的距离为 _$\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$_ .

【答案】$\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$

【解析】如右图所示。

设D在AB上，且$CD\perp AB, AB=4, BC=\sqrt{2}, \angle CBA=45^\circ \Rightarrow CD=1, DB=1, AD=3 \Rightarrow C(1,1)$

$\Rightarrow 2a=4$,把$C(1,1)$代入椭圆标准方程得$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1, a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=\dfrac{4}{3}, c^2=\dfrac{8}{3}$

$\Rightarrow 2c=\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$

13.设常数a＞0. 若$9x+\dfrac{a^2}{x}\geq a+1$对一切正实数x成立，则a的取值范围为 ___$[\dfrac{1}{5},\infty)$__ .

【答案】$[\dfrac{1}{5},\infty)$

【解析】考查均值不等式的应用。

由题知，当$x>0$时, $f(x)=9x+\dfrac{a^2}{x}\geq 2\sqrt{9x+\dfrac{a^2}{x}}=6a\geq a+1 \Rightarrow a\geq \dfrac{1}{5}$

14. 已知正方形ABCD的边长为1. 记以A为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$；以C为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\vec{c_1}$、$\vec{c_2}$、$\vec{c_3}$. 若i, j, k, l∈$\{1,2,3\}$且i≠j, k≠l，则$(\vec{a_i}+\vec{a_j})\cdot(\vec{c_k}+\vec{c_l})$的最小值是 ___-5__ .

【答案】-5

【解析】根据对称性，

当向量$(\vec{a_i}+\vec{a_j})$与$(\vec{c_k}+\vec{c_l})$互为相反向量，且它们的模最大时

,$(\vec{a_i}+\vec{a_j})(\vec{c_k}+\vec{c_l})$最小。这时$\vec{a_i}=\overrightarrow{AC}, \vec{a_j}=\overrightarrow{AD}, \vec{c_k}=\overrightarrow{CA}, \vec{c_l}=\overrightarrow{CB}$,

$(\vec{a_i}+\vec{a_j})(\vec{c_k}+\vec{c_l})=-|\vec{a_i}+\vec{a_j})|^2=-5$。

二、选择题（本大题共有4小题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分.

15.函数$f(x)=x^2-1$（x≥0）的反函数为$f^{-1}(x)$，则$f^{-1}(2)$的值是（ A ）

（A）$\sqrt{3}$ （B）$-\sqrt{3}$ （C）1+$\sqrt{2}$ （D）1$-\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】由反函数的定义可知，$x\geq 0, 2=f(x)=x^2-1 \Rightarrow x=\sqrt{3}$

选A

16.设常数a∈R，集合A=$\{x|(x-1)(x-a)\geq 0\}$，B=$\{x|x\geq a-1\}$. 若A∪B=R，则a的取值范围为（ B ）

（A）（－∞，2）　（B）（－∞，2]　（C）（2，+∞）　（D）[2，+∞）

【答案】 B

【解析】 方法：代值法，排除法。当a=1时，A=R，符合题意；当a=2时，

$\because B=[1,+\infty), A=(-\infty,1]\cup[+\infty),2)\therefore A\cup B=R,$符合题意。

综上，选B

标准解法如下: $\because B=[a-1,+\infty), A\cup B=R\therefore A\supseteq(-\infty,a-1)$

由$(x-1)(x-a)\geq 0\Rightarrow$当$a=1$时，$x\in R,$当$a=1$符合题意；当$a>1$时$x\in(-\infty,1]\cup[a,+\infty),$

$\Rightarrow 1\geq a-1$解得$1<a\leq 2;$当$a<1$时$x\in(-\infty,a]\cup[1,+\infty)\Rightarrow a\geq a-1\Rightarrow a<1$.

综上，$a\leq 2$

选B

17.钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的（ A ）

（A）充分条件　（B）必要条件

（C）充分必要条件　（D）既非充分又非必要条件

【答案】 A

【解析】 便宜没好货$\Leftrightarrow$便宜则不是好货$\Leftrightarrow$好货则不便宜

所以“好货”是“不便宜”的充分条件

选A

当点（x, y）分别在Ω_1，Ω_2，…上时，x+y的最大值分别是M_1, M_2, …，则$\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$=（ D ）

（A）0　（B）$\frac{1}{4}$　（C）2　（D）$2\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 椭圆方程为:$\frac{x^2}{4}+\frac{ny^2}{4n+1}=1\Rightarrow\lim\limits_{n->+\infty}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4+\frac{1}{n}}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1\\ u=x+y\end{cases}\Rightarrow x^2+(u-x)^2=4\Rightarrow 2x^2-2ux+u^2-4=0\Rightarrow\Delta=4u^2-8(u^2-4)\geq 0$

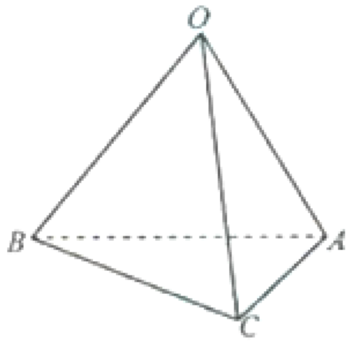
$\Rightarrow u^2-2(u^2-4)\geq 0\Rightarrow 8\leq u^2\Rightarrow u\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}],$所以$x+y$的最大值为$,2\sqrt{2}$

选D

三、解答题（本大题共有5下题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19.（本题满分12分）

如图，正三棱锥O-ABC的底面边长为2，高为1，求该三棱锥的体积及表面积。



第 19 题图

【答案】 $V_{O-ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3};S_{O-ABC}=3\sqrt{3}$

【解析】 三棱锥$O-ABC$的体积$V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot 1=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$

设O在面ABC中的射影为Q,BC的中点为$E,$则$OQ=1$，$QE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，在$RT\Delta OQE$中

，$OE^2=OQ^2+EQ^2\Rightarrow 1^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2=\dfrac{4}{3}\Rightarrow OE=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

三棱锥$O-ABC$的表面积$S_{O-ABC}=3S_{\Delta OBC}+S_{\Delta ABC}=3\cdot\dfrac{BC}{2}\cdot OE+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

所以，三棱锥$O-ABC$的体积$V_{O-ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,表面积$S_{O-ABC}=3\sqrt{3}$

20.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分5分，第2小题满分9分.
甲厂以x千克/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求1≤x≤10），每小时可获得的利润是$100\left(5x+1-\dfrac{3}{x}\right)$元.

（1）求证：生产a千克该产品所获得的利润为$100a\left(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$元；

（2）要使生产900千克该产品获得的利润最大，问：甲厂应该选取何种生产速度？并求此最大利润.

【答案】（1） 见下
（2） 当生产速度为6千克/小时，这时获得最大利润为457500元。

【解析】（1）证明：由题知，生产a千克该产品所需要的时间$t=\dfrac{a}{x}$小时，

所获得的利润$y=\dfrac{a}{x}\cdot 100(5x+1-\dfrac{3}{x})=100a(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2})$(元)，其中$1\le x\le 10$.

所以，生产a千克该产品所获得的利润为$100a\left(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$元；（证毕）

（2） 由（1）知，生产900千克该产品即a=900千克时，获得的利润

$y=100\cdot 900(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2})=90000[5+\dfrac{1}{x}(1-3\cdot\dfrac{1}{x})]$

由二次函数的知识可知，当$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}$，即x=6时，$y\le 90000[5+\dfrac{1}{6}(1-3\cdot\dfrac{1}{6})]$

$=450000+7500=457500$(元)
所以，当生产速度为6千克/小时，这时获得最大利润为457500元。

21.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.
已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$，其中常数ω＞0.
（1）令ω=1，判断函数 $F(x)=f(x)+f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的奇偶性，并说明理由；
（2）令ω=2，将函数y=f(x)的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位，得到函数y=g(x)的图像.对任意a∈R，求y=g(x)在区间[a，a+10π]上零点个数的所有可能值.
【答案】（1） 不是奇函数，也不是偶函数。
（2） 20,21
【解析】（1）
$\omega=1$时，$f(x)=2\sin x, F(x)=f(x)+f(x+\dfrac{\pi}{2})=2\sin x+2\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$
$=2\sin x+2\cos x=2\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}),\because$ 周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi, y=2\sqrt{2}\sin x$是奇函数，
$\therefore$图像左移$\dfrac{\pi}{4}$后得$f(x)=2\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，即不是奇函数，也不是偶函数。

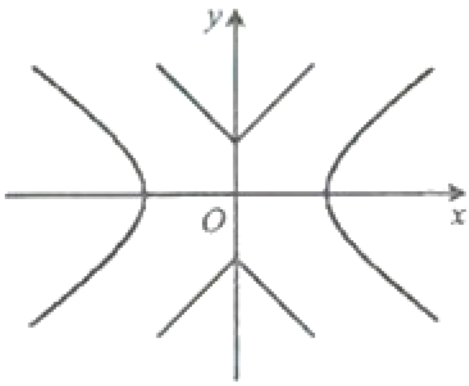
（2）ω=2，将函数y=f(x)的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位，得到函数y=g(x):
$f(x)=2\sin 2x, g(x)=f(x-\dfrac{\pi}{6})+1=2\sin 2(x-\dfrac{\pi}{6})+1$，最小正周期$T=\pi$.
令$f(x)=0\Rightarrow \sin 2(x-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}$在一个周期内最多有3个零点，最少2个零点。
所以y=g(x)在区间[a, a+10π]、其长度为10个周期上，零点个数可以取20, 21个

22.(本题满分16分)本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分.
已知函数 $f(x)=2-|x|$，无穷数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=f(a_n)$, n∈N*
（1）若$a_1=0$，求a_2，a_3，a_4；
（2）若$a_1>0$，且a_1，a_2，a_3成等比数列，求a_1的值.
（3）是否存在a_1，使得a_1，a_2，…，a_n…成等差数列？若存在，求出所有这样的a_1；若不存在，说明理由.
【答案】（1） $a_2=2, a_3=0, a_4=2$
（2） $a_1=1$，或$a_1=2+\sqrt{2}$
（3） $a_1=1$，且$a_n=1$
【解析】（1） 由$a_{n+1}=f(a_n)\Rightarrow a_{n+1}=2-|a_n|.a_1=0\Rightarrow a_2=2, a_3=0, a_4=2$
（2）$\because a_1,a_2,a_3$成等比$\Rightarrow a_3=\dfrac{a_2^{\ 2}}{a_1}=2-|a_2|\Rightarrow a_2^{\ 2}=a_1(2-|a_2|)$，且$a_2=2-|a_1|$
$\Rightarrow(2-|a_1|)^2=a_1[2-|2-|a_1||]\Rightarrow(2-a_1)^2=a_1[2-|2-a_1|]$
分情况讨论如何：

当$2-a_1 \geq 0$时,$(2-a_1)^2 = a_1[2-(2-a_1)) = a_1^{\ 2} \Rightarrow a_1 = 1$，且$a_1 \leq 2$
当$2-a_1 < 0$时,$(2-a_1)^2 = a_1[2-(a_1-2)) = a_1(4-a_1) \Rightarrow 2a_1^{\ 2} - 8a_1 + 4 = 0 \Rightarrow a_1^{\ 2} - 4a_1 + 4 = 2$
$\Rightarrow 2a_1^{\ 2} - 8a_1 + 4 = 0 \Rightarrow (a_1-2)^2 = 2 \Rightarrow a_1 = 2+\sqrt{2}$，且$a_1 \geq 2$
综上，$a_1 = 1$，或$a_1 = 2+\sqrt{2}$
（3）假设存在公差为d的等差数列$\{a_n\}$满足题意,,则：$\forall n \in N^*, a_{n+1} = 2-|a_n| = a_n + d$
$\Rightarrow 2-d = a_n + |a_n|$. 讨论如下:
当$a_n = m$即数列$\{a_n\}$为常数数列时，$d = 0, 2 = 2a_n \Rightarrow a_n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$
当数列$\{a_n\}$不是常数数列时$\Rightarrow a_n < 0, 2-d = 0 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \exists a_n > 0$,所以不满足题意。
综上，存在$a_1 = 1$的等差数列$\{a_n\}$,且$a_n = 1$满足题意。

23.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分.

如图，已知双曲线C_1: $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$，曲线C_2: $|y| = |x| + 1$. P是平面内一点. 若存在过点P的直线与C_1、C_2都有共同点，则称P为“C_1-C_2型点”.



第 23 题图

（1）在正确证明C_1的左焦点是“C_1-C_2型点”时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；
（2）设直线y=kx与C_2有公共点，求证$|k|>1$，进而证明圆点不是“C_1-C_2型点”；
（3）求证：圆 $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ 内的点都不是“C_1-C_2型点”.

【答案】（1） $\sqrt{3}y - x - \sqrt{3} = 0$
【解析】（1）
由C_1方程:$\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$可知：$a^2 = 2, b^2 = 1, c^2 = a^2 + b^2 = 3, F_1(-\sqrt{3}, 0)$
显然，由双曲线C_1的几何图像性质可知，过F_1的任意直线都与曲线C_1相交.从曲线C_2图像上取点P(0,1),则直线PF_1与两曲线C_1、C_2均有交点。这时直线方程为
$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3}y - x - \sqrt{3} = 0$$

（2） 先证明“若直线y=kx与C_2有公共点，则$|k|>1$”.

双曲线C_1的渐近线：$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x.$

若直线$y=kx$与双曲线C_1有交点，则$k\in A=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

若直线$y=kx$与双曲线C_2有交点，则$k\in B=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

所以直线y=kx与C_2有公共点，则$|k|>1$．（证毕）

$\because A\cap B=\phi,\therefore$直线$y=kx$与曲线$C_1$、$C_2$不能同时有公共交点。

所以原点不是“C_1-C_2型点”；（完）

（3）设直线l过圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$内一点，则直线l斜率不存在时与曲线C_1无交点。

设直线l方程为：y = kx + m，则：$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2m^2-1<k^2$

假设直线l与曲线C_2相交上方，则$y\geq 1$

2013年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试卷(文史类)

答案要点及评分标准

说明

1. 本解答列出试题的解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅. 当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半. 如果有较严重的概念性错误，就不给分.

解答

一、（第1题至第14题）

1. $0<x<\frac{1}{2}$　2. 15　3. -2　4. 1　5. $\frac{2\pi}{3}$　6. 78

7. -2　8. $\log_3 4$　9. $-\frac{7}{9}$　10. $\sqrt{3}$　11. $\frac{5}{7}$　12. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

13. $\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$　14. -5

二、（第15题至第18题）

题　号	15	16	17	18
代　号	A	B	A	D

三、（第19题至第23题）

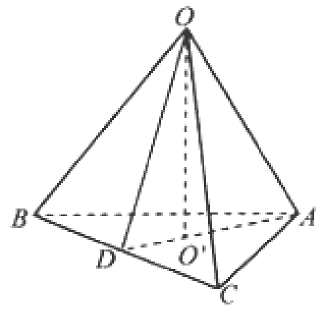
19. [解] 由已知条件可知，正三棱锥$O-ABC$的底面$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，

经计算得底面$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$.　…… 2分

所以该三棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　…… 4分

设O'是正三角形ABC的中心.

由正三棱锥的性质可知，OO'垂直于平面ABC.



第19题图

延长AO'交BC于D，得$AD=\sqrt{3}$，$O'D=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　…… 7分

又因为$OO'=1$，所以正三棱锥的斜高$OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.　…… 9分

故侧面积为$\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

所以该三棱锥的表面积为$\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，

因此，所求三棱锥的体积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，表面积为$3\sqrt{3}$. …… 12分

20. [解] (1) 生产a千克该产品，所用的时间是$\frac{a}{x}$小时， …… 3分

所获得的利润为$100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{a}{x}$.

所以，生产a千克该产品所获得的利润为$100a\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$元. …… 5分

(2) 生产900千克该产品，获得的利润为$90000\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$，$1\le x\le 10$. …… 7分

记 $f(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+5$，$1\le x\le 10$，

则$f(x)=-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}+5$，当且仅当$x=6$时取到最大值. …… 11分

获得最大利润$90000\times\frac{61}{12}=457500$元.

因此甲厂应以6千克/小时的速度生产，可获得最大利润为457500元. …… 14分

21. [解] (1) $f(x)=2\sin x$，

$F(x)=f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2(\sin x+\cos x)$. …… 2分

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$，$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne F\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne -F\left(\frac{\pi}{4}\right)$. …… 4分

所以，$F(x)$既不是奇函数，也不是偶函数. …… 6分

(2) $f(x)=2\sin 2x$，

将 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移1个单位后得到 $y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$的图像，所以$g(x)=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$. …… 8分

令$g(x)=0$，得$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$或$x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

因为$[a,a+10\pi]$恰含10个周期，所以，

当a是零点时，在$[a,a+10\pi]$上零点个数为21； …… 11分

当a不是零点时，$a+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）也都不是零点，区间$[a+k\pi,a+(k+1)\pi]$上恰有两个零点，故在$[a,a+10\pi]$上有20个零点.

综上，$y=g(x)$在$[a,a+10\pi]$上零点个数的所有可能值为21或20. …… 14分

22. [解] (1) $a_2=2$，$a_3=0$，$a_4=2$. …… 3分

(2) $a_2=2-|a_1|=2-a_1$，$a_3=2-|a_2|=2-|2-a_1|$.

① 当$0<a_1\le 2$时，$a_3=2-(2-a_1)=a_1$，所以$a_1^2=(2-a_1)^2$，得a_1=1. …… 5分

② 当$a_1>2$时，$a_3=2-(a_1-2)=4-a_1$，所以$a_1(4-a_1)=(2-a_1)^2$，

得$a_1=2-\sqrt{2}$（舍去）或$a_1=2+\sqrt{2}$.

综合①②得$a_1=1$或$a_1=2+\sqrt{2}$. …… 8分

(3) 假设这样的等差数列存在，那么$a_2=2-|a_1|$，$a_3=2-|2-|a_1||$.

由$2a_2=a_1+a_3$得$2-a_1+|2-|a_1||=2|a_1|$（*）.

以下分情况讨论：

① 当$a_1>2$时，由（*）得$a_1=0$，与$a_1>2$矛盾； ……·10分

② 当$0<a_1\le 2$时，由（*）得$a_1=1$，从而a_n=1（$n=1,2,\cdots$），

所以$\{a_n\}$是一个等差数列； …… 12分

③ 当$a_1\le 0$时，则公差$d=a_2-a_1=(a_1+2)-a_1=2>0$，因此存在$m\ge 2$使得$a_m=a_1+2(m-1)>2$. 此时$d=a_{m+1}-a_m=2-|a_m|-a_m<0$，矛盾.

综合①②③可知，当且仅当$a_1=1$时，$a_1,a_2,a_3,\ldots$构成等差数列. …… 16分

23. [解] (1) C_1的左焦点为$(-\sqrt{3},0)$，写出的直线方程可以是以下形式：

$x=-\sqrt{3}$或$y=k\left(x+\sqrt{3}\right)$，其中$|k|\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …… 3分

(2) 因为直线$y=kx$与C_2有公共点，

所以方程组$\begin{cases}y=kx,\\|y|=|x|+1\end{cases}$有实数解，因此$|kx|=|x|+1$，得$|k|=\dfrac{|x|+1}{|x|}>1$. …… 6分

若原点是“C_1-C_2型点”，则存在过原点的直线与C_1、C_2都有公共点.

考虑过原点与C_2有公共点的直线$x=0$或$y=kx$（$|k|>1$）.

显然直线$x=0$与C_1无公共点.

如果直线为$y=kx$（$|k|>1$），则由方程组$\begin{cases}y=kx,\\\dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$得$x^2=\dfrac{2}{1-2k^2}<0$，矛盾.

所以直线$y=kx$（$|k|>1$）与C_1也无公共点.

因此原点不是“C_1-C_2型点”. …… 9分

(3) 记圆 $O: x^2+y^2=\frac{1}{2}$，取圆 O 内的一点 Q．设有经过 Q 的直线 l 与 C_1、C_2 都有公共点. 显然 l 不垂直于 x 轴，故可设 $l: y=kx+b$．

若 $|k|\le 1$，由于圆 O 夹在两组平行线 $y=x\pm 1$ 与 $y=-x\pm 1$ 之间，因此圆 O 也夹在直线 $y=kx\pm 1$ 与 $y=-kx\pm 1$ 之间，从而过 Q 且以 k 为斜率的直线 l 与 C_2 无公共点，矛盾，所以 $|k|>1$. …… 11分

因为 l 与 C_1 有公共点，所以方程组 $\begin{cases} y=kx+b, \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$ 有实数解，

得 $\left(1-2k^2\right)x^2-4kbx-2b^2-2=0$．因为 $|k|>1$，所以 $1-2k^2\ne 0$，

因此 $\Delta=(4kb)^2-4\left(1-2k^2\right)\left(-2b^2-2\right)=8\left(b^2+1-2k^2\right)\ge 0$，

即 $b^2\ge 2k^2-1$. …… 14分

因为圆 O 的圆心 $(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $\frac{b^2}{1+k^2}=d^2<\frac{1}{2}$，从而 $\frac{1+k^2}{2}>b^2\ge 2k^2-1$，得 $k^2<1$，与 $|k|>1$ 矛盾.

因此，圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内的点都不是“C_1-C_2 型点”． …… 18分